Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 23. Dezember 2004

a) Konstruieren Sie zu einer gegebenen Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und einer Konstanten $\Omega > 0$ eine Funktion g mit der Eigenschaft, daß $\widehat{g}(\omega) = \widehat{f}(\omega)$ ist für $|\omega| \leq \Omega$ und $\widehat{g}(\omega) = 0$ für $|\omega| > \Omega$!

b) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2N+1} \delta\Big(t - \big(\tfrac{2N+1}{2} - k\big)\, d\Big)\,!$$

c) Sei nun $a < \frac{d}{2}$ eine Konstante und $g(t) = 1$, falls es eine eine ganze Zahl $0 \leq k \leq 2N+1$ gibt, so daß $\left|t - \big(\frac{2N+1}{2} - k\big)\, d\right| \leq \frac{a}{2}$ ist; ansonsten sei $g(t) = 0$. Berechnen Sie auch die Fourier-Transformierte von g!

d) Ein Student habe zum Zeitpunkt $t = 0$ der Modulklausur seinen maximalen Wissenstand in Höherer Mathematik erreicht. Wenn man davon ausgeht, daß er einen gewissen Bruchteil β davon nie wieder vergißt, erfüllt der Anteil $w(t)$, den er zur Zeit t nach der Prüfung noch beherrscht, nach dem deutschen Psychologen Hermann Ebbinghaus (1850–1909) die Differentialgleichung $\dot{w}(t) = -\gamma \cdot \big(w(t) - \beta\big)$ mit einem $\gamma \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $w(t)$!

e) Für einen speziellen Studenten sei $\beta = 10\%$ und $w(1\,\text{Jahr}) = 60\%$. Wieviel hat er (ohne zusätzliches Lernen) bis zum Wiederholungstermin nach einem halben Jahr vergessen?

f) Ein Erwachsener atmet etwa 16 Mal pro Minute je einen halben Liter Luft ein; die ausgeatmete Luft enthält 20% weniger Sauerstoff als die eingeatmete. Angenommen, 30 Studenten sitzen in einem nicht gelüfteten Seminarraum von $40\,\text{m}^3$, dessen Luft anfänglich 20% Sauerstoff enthält. Wieviel enthält sie noch nach 90 Minuten?

g) Die stetig differenzierbare Funktion $y(t)$ erfülle die Gleichungen $\dot{y}(t)^2 = 1$ und $y(1) = 0$. Was können Sie über $y(t)$ sagen?

h) Bestimmen Sie für $\lambda_i \in \mathbb{R}$ den Lösungsraum des Differentialgleichungssystems

$$\dot{y}_1(t) = \lambda_1 y_1(t), \quad \dot{y}_2(t) = \lambda_2 y_2(t), \quad \dots \quad \dot{y}_n(t) = \lambda_n y_n(t)\,!$$

i) Erraten Sie eine spezielle Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad \dot{y}(t) = 1 - x(t)$$

und geben Sie dann die allgemeine Lösung dieses Systems an!

j) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $\dot{y}(t) + y \cdot \sin t = 0$!
(*Hinweis:* Was ist $\frac{d}{dt} \ln y(t)$?)

FROHE WEIHNACHTEN

und

VIEL ERFOLG BEI DEN KLAUSUREN IM NEUEN JAHR!