

31. Januar 2005

14. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Bei der exakten Differentialgleichung $a(y, t)\dot{y}(t) + b(y, t) = 0$ sei $a(y, t)$ überall von null verschieden. Dann geht durch jeden Punkt (t_0, y_0) höchstens eine Lösungskurve.
- 2) *Richtig oder falsch:* Die Gleichgewichtspunkte eines linearen homogenen Differentialgleichungssystems bilden einen Vektorraum.
- 3) Welche Fixpunkte hat das System $\dot{x}(t) = 2x(t) - 5y(t)$ und $\dot{y}(t) = 10y(t) - 4x(t)$?
- 4) Ist der Nullpunkt ein stabiler Fixpunkt von $\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$?
- 5) *Richtig oder falsch:* Jedes autonome Differentialgleichungssystem $\dot{\vec{y}}(t) = F(\vec{y}(t))$ hat mindestens einen Fixpunkt.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Finden Sie für die folgenden Differentialgleichungen einen Zusammenhang $F(y, t) = 0$ zwischen y und t . Lösen Sie, falls möglich, *explizit* auf nach y , und untersuchen Sie, falls das nicht geht, wo $F(y, t) = 0$ eine eindeutige Funktion $y = y(t)$ definiert!

- a) $(t^4 e^{y(t)} + 2 \cos y(t) + 4e^t y(t)^3)\dot{y}(t) + 4t^3 e^{y(t)} + y(t)^4 e^t - 3 \sin t = 0$
- b) $(t \cos y(t) - 2y(t))\dot{y}(t) + t + \sin y(t) = 0$
- c) $t^2 \cos y(t)\dot{y}(t) = 1 + 3t \sin y(t)$ *Hinweis:* Diese Gleichung wird viel angenehmer, wenn Sie anstelle von $y(t)$ die Funktion $u(t) = \sin y(t)$ betrachten!

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Finden Sie Differentialgleichungen, deren Lösungskurven durch folgende Gleichungen gegeben sind und geben Sie jeweils an, für welche Anfangsbedingungen $y(t_0) = c_0$ die gefundene Differentialgleichung eine eindeutige Lösung hat!

- a) $3y^4 - 4t^3 = C$ b) $y \cos t + t \sin y = C$

Aufgabe 3: (5 Punkte)

- a) Untersuchen Sie die Stabilität des Fixpunkts $(0, 0)$ des Raubtier-Beutetier-Systems

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t)!$$

- b) Linearisieren Sie die Raubtier-Beutetier-Gleichung in der Umgebung des anderen Fixpunkts und lösen Sie das linearisierte System. Welche Form haben die Lösungskurven?
- c) Das Raubtier-Beutetier-System kann auch benutzt werden zur Beschreibung eines Systems aus einem Nützling (Raubtier) und einem Schädling (Beutetier). Wie verschiebt sich das Gleichgewicht, wenn man durch ein Schädlingsbekämpfungsmittel die Wachstumsrate α der Schädlinge auf ein Zehntel senkt und (wegen der Nebenwirkungen) γ um 10% erhöht?

Abgabe bis zum Montag, dem 7. Februar 2005, um 15.30 Uhr