

29. November 2004

7. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $e^{-t} \cos t$ ist stark abfallend.
- 2) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(t) = 1$ für $|t| \leq 1$ und $f(t) = 0$ sonst ist stark abfallend.
- 3) *Richtig oder falsch:* Das Produkt zweier stark abfallender Funktionen ist stark abfallend.
- 4) *Richtig oder falsch:* Jede stark abfallende Funktion hat mindestens eine stark abfallende Stammfunktion.

Aufgabe 1: (10 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme (nur) mit Hilfe der Tabelle von LAPLACE-Transformationen auf der Rückseite des Übungsblatts:

- a) $\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 4x(t) = te^{-3t}$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$
- b) $\ddot{x}(t) - 9x(t) = \cos 3t$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$
- c) $\ddot{x}(t) + 9x(t) = \cosh 3t$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$
- d) $\dot{x}(t) + 5x(t) = \sin 3t$, $x(0) = 0$
- e) $\ddot{x}(t) + x(t) = \sin t$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Zeigen Sie: Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt

- a) Für $g(t) = f(t) e^{ct}$ ist $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega + ci)$.
- b) Für $g(t) = f(t - c)$ ist $\hat{g}(\omega) = e^{-i\omega c} \hat{f}(\omega)$.

Aufgabe 3: (2 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 25y(t) = 17 \cos t !$$

Einige Laplace-Transformierte

| $f(t)$ | $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ |
|--|--|
| $e^{\lambda t}$ | $\frac{1}{s - \lambda}$ |
| $\sin \omega t$ | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ |
| $\sinh \omega t$ | $\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$ |
| $\cos \omega t$ | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$ |
| $\cosh \omega t$ | $\frac{s}{s^2 - \omega^2}$ |
| $e^{-\lambda t} - \cos \omega t + \frac{\lambda}{\omega} \sin \omega t$ | $\frac{\lambda^2 + \omega^2}{(s^2 + \omega^2)(s + \lambda)}$ |
| $e^{\lambda t} - 2e^{-\lambda t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t + \frac{\pi}{6}\right)$ | $\frac{3\lambda^2}{s^3 - \lambda^3}$ |
| $\sinh \omega t - \sin \omega t$ | $\frac{2\omega^3}{s^4 - \omega^4}$ |
| $\cosh \omega t - \cos \omega t$ | $\frac{2\omega^2 s}{s^4 - \omega^4}$ |
| $\sinh \omega t + \sin \omega t$ | $\frac{2\omega s^2}{s^4 - \omega^4}$ |
| $\cosh \omega t + \cos \omega t$ | $\frac{2s^3}{s^4 - \omega^4}$ |
| $\sin \omega t - \omega t \cos \omega t$ | $\frac{2\omega^3}{(s^2 + \omega^2)^2}$ |
| $t \sin \omega t$ | $\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$ |
| $\sin \omega t + \omega t \cos \omega t$ | $\frac{2\omega s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$ |
| $2 \cos \omega t - \omega t \sin \omega t$ | $\frac{2s^3}{(s^2 + \omega^2)^2}$ |