Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 A5, C201

25. Oktober 2004

2. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Berechnen Sie $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{e^{\cos^2 z}}$ für γ: $\begin{cases} [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \\ \quad t \mapsto 2e^{it} \end{cases}$!

Lösung: Da die Exponentialfunktion keine Nullstellen hat, ist der Integrand auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph; da der Integrationsweg ein geschlossene Kurve (Kreislinie) ist, verschwindet das Integral.

2) Was ist $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{|z|}$ für diesen Integrationsweg?

Lösung: Auf dem Einheitskreis ist $|z| = 1$, also ist das Integral gleich $\int_\gamma dz = 0$ nach dem Cauchyschen Integralsatz. (Man beachte, daß $1/|z|$ *keine* meromorphe Funktion ist; der Residuensatz ist also nicht anwendbar.)

3) Richtig oder falsch: $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{z}\, dz = 0$.

Lösung: Weder richtig noch falsch, sondern sinnlos: Wir haben $\sqrt{z}$ nicht als Funktion auf $\mathbb{C}$ definiert. In der Tat gibt es keine Möglichkeit, konsistent so zwischen den beiden Werten der Quadratwurzel zu unterscheiden, daß eine stetige Funktion auf $\mathbb{C}$ entsteht. (Eine mögliche Definition wäre $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Ln} z}$, aber diese Funktion ist wie $\operatorname{Ln} z$ unstetig auf der negativen reellen Achse.)

4) Richtig oder falsch: Die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{Ln} z}$ ist meromorph auf der Menge aller komplexer Zahlen mit positivem Realteil.

Lösung: *Richtig,* denn dort ist $\operatorname{Ln} z$ holomorph. $\operatorname{Ln} z$ verschwindet nur für $z = 1$ und das ist ein Pol erster Ordnung, da $\lim_{z\to 0} \frac{z}{\operatorname{Ln} z}$ nach de l'Hôpital verschwindet.

5) Richtig oder falsch: Die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{|z|}$ ist meromorph auf ganz $\mathbb{C}$.

Lösung: *Falsch:* Sie ist auch auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht holomorph, da die Betragsfunktion nicht holomorph ist.

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

Berechnen Sie für γ: $\begin{cases} [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \\ \quad t \mapsto 3 + e^{it} \end{cases}$ die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z-\pi}$ *b)* $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-\pi)^2}$ *c)* $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2-\pi^2}$

Lösung: Der Integrationsweg ist ein im Gegenuhrzeigersinn durchlaufener Kreis um drei mit Radius eins. Da π im Innern dieses Kreises liegt, ist

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-\pi} = 2\pi i$$

nach der CAUCHYschen Integralformel. Der Integrand aus *b)* hat die entlang des gesamten Integrationswegs holomorphe Stammfunktion $-1/(z-\pi)$, daher ist

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-\pi)^2} = 0\,.$$

Für das dritte Integral machen wir eine Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{z^2-\pi^2} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{z-\pi} - \frac{1}{z+\pi}\right) \Longrightarrow \int_\gamma \frac{dz}{z^2-\pi^2} = \frac{1}{2\pi}\left(\int_\gamma \frac{dz}{z-\pi} - \int_\gamma \frac{dz}{z+\pi}\right) = \frac{2\pi i}{2\pi} = i\,,$$

nach *a)* und dem CAUCHYschen Integralsatz, wonach das zweite Integral verschwindet, da sein Integrand im Kreis um drei mit Radius eins holomorph ist.

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)

Berechnen Sie für γ: $\begin{cases} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto 3 + e^{it} \end{cases}$ die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_\gamma z^2\,dz$ *b)* $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z-\pi}$ *c)* $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-\pi)^2}$

Lösung: Hier ist der Integrationsweg nur noch ein Halbkreis um drei mit Radius ein; er geht von $3-i$ nach $3+i$ durch die Halbebene $\Re z \geq 3$. Die Integrale aus *a)* und *c)* lassen sich problemlos mit Hilfe der Stammfunktionen ihrer Integranden ausrechnen:

$$\begin{aligned}\int_\gamma z^2\,dz &= \frac{(3+i)^3}{3} - \frac{(3-i)^3}{3} = \frac{(27+3\cdot 9i+3\cdot 3i^2+i^3)-(27-3\cdot 9i+3\cdot 3i^2-i^3)}{3} \\ &= \frac{6\cdot 9i-2i}{3} = \frac{52i}{3}\end{aligned}$$

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-\pi)^2} = \frac{-1}{3+i-\pi} - \frac{-1}{3-i-\pi} = \frac{-(3-\pi-i)+(3-\pi+i)}{(\pi-3)^2+1} = \frac{2i}{(\pi-3)^2+1}$$

Auch bei *b)* gibt es mit diesem Ansatz keine Schwierigkeiten, denn $\mathrm{Ln}(z-\pi)$ überschreitet auf dem ganzen Integrationsweg nie die reelle Achse. Somit ist

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-\pi} = \mathrm{Ln}(3-\pi+i) - \mathrm{Ln}(3-\pi-i)\,.$$

Um das weiter ausrechnen zu können, brauchen wir Betrag und Argument von $3-\pi\pm i$: Der Betrag ist natürlich in beiden Fällen gleich $\sqrt{(\pi-3)^2+1}$ und hebt sich daher weg. Die Argumente sind entgegengesetzt gleich; da $3-\pi+i$ im dritten Quadranten liegt, ist

$$\arg(3-\pi+i) = \arg(\pi-3-i) + \pi = \pi - \arctan\frac{1}{\pi-3}\,.$$

Somit ist

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-\pi} = 2\pi i - 2i \arctan \frac{1}{\pi - 3} \approx 1{,}089545433\pi i\,.$$

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)

a) Für $z, w \in \mathbb{C}$ sei $\sin z = \sin w$. Zeigen Sie: Dann ist $\cos z = \pm \cos w$ und $e^{iz} = e^{iw}$ oder $e^{iz} = -e^{-iw}$.

Lösung: Ist $\sin z = \sin w$, so ist auch $\sin^2 z = \sin^2 w$, also, nach PYTHAGORAS, auch $\cos^2 z = \cos^2 w$ und damit $\cos z = \pm \cos w$. Somit ist

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z = \pm \cos w + i \sin w = \begin{cases} \cos w + i \sin w = e^{iw} & \text{oder} \\ -\cos w + i \sin w = -e^{-iw} & \end{cases}.$$

b) Zeigen Sie: Die komplexe Sinusfunktion ist injektiv auf der Menge

$$W = \left\{ x + iy \in \mathbb{C} \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Lösung: Falls $z, w \in W$ die gleichen Sinuswerte haben, ist nach *a)* $e^{iz} = e^{iw}$ oder $e^{iz} = -e^{-iw}$. Im ersteren Fall unterscheiden sich iz und iw um ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$, d.h. z und w unterscheiden sich um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π. Da die Realteile zwischen $\pm\frac{\pi}{2}$ liegen, ist dies nur möglich, wenn $z = w$ ist.

Im zweiten Fall ist $e^{i(z+w)} = -1$, d.h. $z + w$ ist ein ungeradzahliges Vielfaches von π. Für $z, w \in W$ ist aber $-\pi < \mathfrak{Re}(z + w) < \pi$, so daß dieser Fall nicht auftreten kann.

c) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion des auf W eingeschränkten Sinus!

Lösung: Nach der Regel über die Ableitung der Umkehrfunktion ist für diese Funktion $z = \arcsin w$

$$\arcsin' w = \frac{1}{\sin' z} = \frac{1}{\cos z} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 z}} = \frac{1}{\sqrt{1 - w^2}}\,.$$