

Wolfgang K. Seiler

Höhere Mathematik I

Vorlesung an der Universität Mannheim
im Sommersemester 2004

Dieses Skriptum entsteht parallel zur Vorlesung und soll mit möglichst geringer Verzögerung erscheinen. Es ist daher in seiner Qualität auf keinen Fall mit einem Lehrbuch zu vergleichen; insbesondere sind Fehler bei dieser Entstehungsweise nicht nur möglich, sondern **sicher**. Dabei handelt es sich wohl leider nicht immer nur um harmlose Tippfehler, sondern auch um Fehler bei den mathematischen Aussagen.

Das Skriptum sollte daher mit Sorgfalt und einem gewissen Mißtrauen gegen seinen Inhalt gelesen werden; falls Sie Fehler finden, teilen Sie mir dies bitte persönlich oder per e-mail (seiler@math.uni-mannheim.de) mit, oder informieren Sie Ihren Übungsgruppenleiter. Auch wenn Sie Teile des Skriptums unverständlich finden, bin ich für entsprechende Hinweise dankbar.

Falls genügend viele Hinweise eingehen, werde ich von Zeit zu Zeit Listen mit Berichtigungen und Verbesserungen zusammenstellen.

Einleitung	1
Literaturhinweise	4
KAPITEL I: VEKTORRÄUME UND LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME	9
§1: Zahlen und Körper	10
a) Von den natürlichen zu den komplexen Zahlen	10
b) Der Begriff des Körpers	12
c) Mehr über komplexe Zahlen	16
d) Weitere Körper	18
e) Der Körper mit zwei Elementen	19
§2: Vektoren und Vektorräume	20
a) Vektoren in der Ebene und im Raum	21
b) Definition des Vektorraums	25
c) Erste Beispiele	27
d) Lineare Abbildungen	30
e) Untervektorräume	33
f) Lineare Abhängigkeit	36
g) Die Dimension eines Vektorraums	44
h) Basen	45
i) Dimensionen und lineare Abbildungen	54

§3: Vektorräume und endliche Körper	56
a) Bitfolgen als Vektoren	56
b) Körper von Primzahlordnung	61
c) Der Euklidische Algorithmus	63
d) Das RSA-Verfahren	66
1) Verschlüsselung	73
2) Identitätsnachweis	74
3) Elektronische Unterschriften	74
4) Blinde Unterschriften und elektronisches Bargeld	75
5) Größenordnung der Primzahlen	78
e) Das Verfahren von Diffie und Hellman	80
f) Körper von Zweipotenzordnung	84
g) Der Euklidische Algorithmus für Polynome	89
f) Der Körper mit 256 Elementen und CD-Fehlerkorrektur	94
g) Der Körper mit 256 Elementen in der Kryptographie	97
§4: Matrizen und lineare Gleichungssysteme	98
a) Abbildungsmatrizen	98
b) Rechenregeln für Matrizen	101
c) Matrixdarstellung der komplexen Zahlen	111
d) Das Gaußsche Eliminationsverfahren	114
e) Erste Beispiele	116

f) Die Struktur der Lösungsmenge	130
g) Affine Räume	136
h) Ausblick: Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme	148
i) Matrixgleichungen und die Berechnung der Inversen	155
j) Spezielle Matrizen	159
1) Diagonalmatrizen	159
2) Dreiecksmatrizen	162
3) Matrizen mit nur einem Eintrag	166
4) Permutationen und Permutationsmatrizen	167
k) Die LR-Zerlegung einer Matrix	172
l) Beispiel eines Basiswechsels	177
m) Basiswechsel im allgemeinen Fall	183
§5: EUKLIDISCHE UND HERMITISCHE VEKTORRÄUME	189
a) Längen und Winkel in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3	189
b) EUKLIDISCHE VEKTORRÄUME	194
c) HERMITISCHE VEKTORRÄUME	199
d) Die CAUCHY-SCHWARZSCHE UNGLEICHUNG	203
e) Orthonormalbasen	204
f) Die QR-Zerlegung einer Matrix	211
g) Orthogonale und unitäre Matrizen	217
h) Orthogonale Projektionen	221
i) Die Methode der kleinsten Quadrate	226
j) EUKLIDISCHE VEKTORRÄUME IN DER INFORMATIONSSUCHE	241

§6: Volumina und Determinanten	245
a) Das Vektorprodukt im \mathbb{R}^3	245
b) Das Spatprodukt	249
c) Forderungen an eine allgemeine Determinante	253
d) Gerade und ungerade Permutationen	256
e) Existenz von Determinanten	261
f) Die Determinante einer Matrix	266
g) Der Entwicklungssatz von LAPLACE	274
h) Die CRAMERSCHE REGEL	283
i) Eigenwerte und Eigenvektoren	284
j) Geschichte und Anwendungen von Determinanten	290
KAPITEL II: MEHRDIMENSIONALE ANALYSIS	292
§1: Funktionen und ihre Eigenschaften	292
a) Darstellungsmöglichkeiten für Funktionen	292
b) Normierte Vektorräume	295
c) Die Ableitung einer Funktion	305
d) TAYLOR-REIHEN	323
e) Der Satz über implizite Funktionen	326

§2: Vektorfelder	331
a) Der Begriff des Vektorfelds	334
b) Die JACOBI-Matrix	334
c) Die Divergenz eines Vektorfelds	336
d) Die Rotation eines dreidimensionalen Vektorfelds	338
e) Erste Beispiele	343
1) Das elektrische Feld einer Punktladung	343
2) Das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters	345
f) Allgemeine Rechenregeln	349
g) Nichtkartesische Koordinatensysteme	352
1) Polarkoordinaten in \mathbb{R}^2	352
2) Zylinderkoordinaten im \mathbb{R}^3	355
3) Kugelkoordinaten	356
§3: Integralrechnung	358
a) Heuristische Vorüberlegungen	358
1) Integration als Umkehrung der Differentiation	359
2) Integration als Flächenbestimmung	365
3) Integration als Durchschnitsbestimmung	366
b) Integration elementarer Funktionen	368
1) Die Funktion $f(x) = x^2$	367
2) Die Exponentialfunktion	369
3) Die DIRICHLETSche Sprungfunktion	370

c) Definition des Riemann-Integrals	372
1) Warum lohnt sich ein allgemeinerer Ansatz?	372
2) Wo sollte der bisherige Ansatz modifiziert werden?	373
3) Anwendung des Mittelwertsatzes	375
4) Gleichmäßige Stetigkeit	377
5) Definition einer Approximation für das Integral	379
6) Existenz des RIEMANN-Integrals für stetige Funktionen ...	383
7) Stückweise stetige Funktionen	388
8) Noch einmal die DIRICHLETSche Sprungfunktion	390
9) Ausblick: Das LEBESGUE-Integral	390
10) Anwendung auf Flächeninhalte	391
d) Erste Integrationsregeln	392
1) Monotonieregel	392
2) Linearität und Zusammensetzung	393
3) Der Mittelwertsatz der Integralrechnung	394
e) Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	396
f) Trigonometrische Funktionen, Hyperbelfunktionen und ihre Umkehrfunktionen	399
g) Partielle Integration	411
h) Substitutionsregel	412
1) Der Spezialfall logarithmischer Ableitungen	412
2) Substitutionen mit linearen Funktionen	413
3) Substitutionen mit trigonometrischen und Hyperbelfunktionen	415

4) Integrale der Form $\int h(e^{ax}) dx$	417
5) Integrale der Form $\int h(\sin x, \cos x) dx$	419
i) Integration rationaler Funktionen	420
j) Symmetrie	425
k) Einige nicht elementar integrierbare Funktionen	426
1) Der Integralsinus	427
2) Die Fehlerfunktion	427
3) Elliptische Integrale	428
4) Algebraische Integrale	429
l) Uneigentliche Integrale	429
§4: Kurvenintegrale im \mathbb{R}^n	440
a) Kurven und Tangentenvektoren	440
b) Die Bogenlänge einer Kurve	443
c) Integration eines Vektorfelds längs einer Kurve	448
d) Zirkulationsfreie und konservative Vektorfelder	453
§4: Mehrdimensionale Integrationstheorie	459
a) Flächeninhalte und Volumina	459
b) Integration über Normalbereiche	467
c) Die Transformationsformel	473
d) Der Satz von GREEN und der ebene Satz von GAUSS	484
e) Oberflächenintegrale	490
f) Die Sätze von STOKES und GAUSS	501