Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 A5, C201

4. Oktober 2004

Modulklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die Menge M aller Vektoren aus $\mathbb{F}_2^4$ mit einer geraden Anzahl von Einsen ist ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum.

Lösung: *Richtig:* Der Nullvektor hat eine gerade Anzahl von Einsen. Bei Linearkombinationen $\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}$ ist offensichtlich nur der Fall $\lambda=\mu=1$ interessant. Hat einer der beiden Vektoren vier oder null Einsen und der andere n, so hat die Summe n bzw. $4-n$ Einsen, liegt also in M. Haben beide Vektoren zwei Einsen, davon $k\in\{0,1,2\}$ an derselben Stelle, so hat die Summe $4-2k$ Einsen, was wieder gerade ist.

2) Richtig oder falsch: Die lineare Abbildung $\varphi\colon\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^5$ sei injektiv. Dann ist die Gleichung $\varphi(\vec{x})=\vec{v}$ für jeden Vektor $\vec{v}\in\mathbb{R}^5$ lösbar.

Lösung: *Richtig,* denn nach der Dimensionsformel ist dann $\dim\operatorname{Bild}\varphi=\dim\mathbb{R}^5-\dim\operatorname{Kern}\varphi=5-0=5$, die Abbildung ist also auch surjektiv.

3) In der 10×10-Matrix A sei $a_{ij}=\max(i+1-j,0)$. Was ist $\det A$?

Lösung: A ist eine untere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen $a_{ii}=i+1-i=1$. Also ist $\det A$ als Produkt der Diagonaleinträge gleich Eins.

4) Richtig oder falsch: Betrachtet man $\mathbb{F}_{256}$ als einen $\mathbb{F}_2$-Vektorraum, so ist die Abbildung $\mathbb{F}_{256}\to\mathbb{F}_{256};\ x\mapsto x^2$ linear.

Lösung: Richtig, denn $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=x^2+y^2$, und für jeden Skalar $\lambda\in\mathbb{F}_2$ ist $\lambda^2=\lambda$, da $\mathbb{F}_2=\{0,1\}$.

5) Finden Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}0\\1+i\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2=\begin{pmatrix}1-i\\1+i\\1-i\end{pmatrix}$ aufgespannten Unterraums von $\mathbb{C}^3$!

Lösung: $\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=(1+i)(1-i)=2$; daher bildet $\vec{v}_1$ zusammen mit $\vec{w}=\vec{v}_2-\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1-i\\0\\1-i\end{pmatrix}$ eine Orthogonalbasis. Da $\vec{w}\cdot\vec{w}=2(1-i)(1+i)=4$ ist, bilden $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{v}_1$ und $\dfrac{1}{2}\vec{w}$ eine Orthonormalbasis.

6) Richtig oder falsch: $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^{2004}}=-4006$

Lösung: *Falsch:* Da der Integrand an der Stelle $x=0$ nicht definiert ist, existiert das Integral nicht (auch kein Cauchyscher Hauptwert).

7) Was ist $\operatorname{div}\operatorname{rot}\begin{pmatrix}\sin xyz\\ \cos xyz\\ xyz\end{pmatrix}$?

Lösung: *Null,* denn die Rotation eines Vektorfelds ist stets quellenfrei.

8) Was ist $\iint_K x^2\,dx\,dy$ für $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|\le 1, |y|\le 1\}$?

Lösung: K ist das Quadrat mit Ecken $(\pm1,\pm1)$ und damit insbesondere ein Normalbereich; somit ist

$$\iint_K x^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} x^2\,dx\right)dy = \int_{-1}^{1}\frac{2}{3}\,dy = \frac{4}{3}\,.$$

Aufgabe 1: *(9 Punkte)*

M sei die Menge aller Funktionen der Form $P(x)\cos x$ oder $Q(x)\sin x$ mit reellen Polynomen P, Q vom Grad höchstens zwei, und V sei der von M erzeugte $\mathbb{R}$-Vektorraum.

a) Ist $V = M$, d.h. ist M bereits ein $\mathbb{R}$-Vektorraum?

Lösung: Nein; beispielsweise liegt $\sin x+\cos x$ nicht in M; obwohl beide Summanden dort liegen.

b) Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von V!

Lösung: Die Funktionen $\sin x, x\sin x$ und $x^2\sin x$ bilden offensichtlich eine Basis des Vektorraums aller Produkte aus einem höchstens quadratischen Polynom mit $\sin x$: Sie erzeugen diesen Raum, und wären sie linear abhängig, so müßten, da $\sin x$ nicht die Nullfunktion ist, auch $1, x, x^2$ linear abhängig sein.

Genauso folgt, daß die Funktionen $\cos x, x\cos x$ und $x^2\cos x$ eine Basis des Vektorraums aller Produkte aus einem höchstens quadratischen Polynom mit $\cos x$ bilden. Damit erzeugt

$$\mathcal{B} = (\sin x, x\sin x, x^2\sin x, \cos x, x\cos x, x^2\cos x)$$

den Vektorraum V. Wären die sechs Funktionen nicht linear unabhängig, ließe sich die Funktion $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ als Quotient zweier quadratischer Polynome schreiben, was offensichtlich nicht der Fall ist. Somit ist $\mathcal{B}$ eine Basis.

c) Zeigen Sie: $\varphi\colon \begin{cases} V\to V\\ f(x)\mapsto f'(x)+f(0)\sin x\end{cases}$ ist eine lineare Abbildung.

Lösung: Klar, denn sowohl Differenzieren als auch das Einsetzen von Werten in eine Funktion sind lineare Operationen, und auch die Multiplikation mit der festen Funktion $\sin x$ ändert nichts an der Linearität. Ausführlich und formal: Für $f, g\in V$ und $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f+\mu g) &= (\lambda f+\mu g)'(x) + (\lambda f+\mu g)(0)\sin x\\ &= \lambda f'(x)+\mu g'(x)+\lambda f(0)\sin x+\mu g(0)\sin x\\ &= \lambda f'(x)+\lambda f(0)\sin x+\mu g'(x)+\mu g(0)\sin x\\ &= \lambda\varphi(f)+\mu\varphi(g)\,.\end{aligned}$$

d) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern}\varphi$!

Lösung: Jedes Element von V läßt sich schreiben als $f(x) = P(x)\sin x + Q(x)\cos x$ mit Polynomen P, Q vom Grad höchstens zwei. φ bildet dieses Element ab auf

$$\begin{aligned} &P'(x)\sin x + P(x)\cos x + Q'(x)\cos x - Q(x)\sin x + Q(0)\sin x \\ =& \big(P'(x) - Q(x) + Q(0)\big)\sin x + \big(P(x) + Q'(x)\big)\cos x\,, \end{aligned}$$

was genau dann verschwindet, wenn

$$P'(x) - Q(x) + Q(0) \quad \text{und} \quad P(x) + Q'(x)$$

beide verschwinden. Da $P'(x)$ höchstens linear ist, kann dann auch $Q(x)$ höchstens linear sein, also muß $P(x) = Q'(x)$ konstant sein, d.h $P'(x) = Q(x) - Q(0)$ muß identisch verschwinden. Somit ist $Q(x)$ ein konstantes Polynom und $P(x) = Q'(x)$ verschwindet. Im Kern liegen daher genau die Vielfachen von $\cos x$; diese Funktion ist damit Basis des Kerns.

e) Welche Dimension haben Kern φ und Bild φ?

Lösung: Wie wir gerade gesehen haben, hat der Kern die Dimension eins; nach der Dimensionsformel ist daher $\dim \text{Bild}\,\varphi = \dim V - \dim \text{Kern}\,\varphi = 5 - 1 = 4$.

f) Welche Abbildungsmatrix hat φ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$?

Lösung: Da x, x^2 und $\sin x$ für $x = 0$ verschwinden und $\cos 0 = 1$ ist, sind die Bilder der Basisvektoren

$$\begin{array}{ll} \varphi(\sin x) = \cos x & \varphi(\cos x) = -\sin x + \sin x = 0 \\ \varphi(x\sin x) = \sin x + x\cos x & \varphi(x\cos x) = \cos x - x\sin x \\ \varphi(x^2\sin x) = 2x\sin x + x^2\cos x & \varphi(x^2\cos x) = 2x\cos x - x^2\sin x \end{array}$$

In den Spalten der Abbildungsmatrix stehen die Koeffizienten der Bilder der Basisvektoren; die Abbildungsmatrix ist somit gleich

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

g) Ist diese Abbildungsmatrix invertierbar?

Lösung: Nein, natürlich nicht: Da ihre vierte Spalte nur Nullen enthält, hat sie höchstens (und hier offensichtlich genau) Rang fünf.

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rl} x + 2y - 2az &= 3 \qquad (1) \\ 3x + 7y - 7az &= 8 \qquad (2) \\ x + y + a^2z &= a + 5 \qquad (3) \end{array}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$!

Lösung: Zur Elimination von x aus den Gleichungen (2) und (3) subtrahieren wir die erste Gleichung dreimal von der zweiten und einmal von der dritten:

$$\begin{aligned} y - \qquad az &= -1 && (4) \\ -y + (a^2 + 2a)z &= a + 2 && (5) \end{aligned}$$

Addition dieser beiden Gleichungen führt auf

$$(a^2 + a)z = a + 1 \quad \text{oder} \quad a(a+1)z = a + 1\,.$$

Für $a = 0$ steht hier $0 = 1$; in diesem Fall ist das Gleichungssystem somit unlösbar.

Für $a = -1$ erhalten wir die Gleichung $0z = 0$, die von jeder reellen Zahl $z = \lambda$ erfüllt wird.

Für $a \neq 0, -1$ schließlich können wir durch $a(a+1)$ dividieren und erhälten die einzige Lösung

$$z = \frac{1}{a}\,.$$

Nach Gleichung (4) ist dann

$$y = az - 1 = \begin{cases} 0 & \text{für } a \neq 0, -1 \\ -\lambda - 1 & \text{für } a = -1 \end{cases},$$

und nach Gleichung (1) ist

$$x = 3 - 2y + 2az = \begin{cases} 3 + 2 & \text{für } a \neq 0, -1 \\ 3 + 2\lambda + 2 - 2\lambda & \text{für } a = -1 \end{cases} = 5\,.$$

Somit ist $\mathcal{L}_a = \begin{cases} \left\{\left(5, 0, \frac{1}{a}\right)\right\} & \text{für } a \neq 0, -1 \\ \left\{(5, -1-\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} & \text{für } a = -1 \\ \emptyset & \text{für } a = 0 \end{cases}$.

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*
Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$!

Lösung: Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda\big((1-\lambda)(3-\lambda) - 8\big) = -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = -\lambda\big((\lambda-2)^2 - 9\big)\,, \end{aligned}$$

was für

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2 - \sqrt{9} = -1 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = 2 + \sqrt{9} = 5$$

verschwindet. Die Eigenwerte sind sind also 0, -1 und 5.

Auch ohne Rechnung ist klar, daß der Koordinateneinheitsvektor $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert Null ist. Weiter ist $A + E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, so daß $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ den Eigenraum für $\lambda_2 = -1$ aufspannt, und $A - 5E = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, so daß $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ den Eigenraum für $\lambda_3 = 5$ aufspannt.

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

Gegeben seien hundert Paare von Meßgrößen (t_i, x_i), zwischen denen ein Zusammenhang der Form $x_i = ae^{t_i} + be^{-t_i} + c$ vermutet wird. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf zur Berechnung jener Koeffizienten a, b, c, mit denen diese Beziehung im Sinne der kleinsten Quadrate am besten gilt!

Lösung: Falls der Zusammenhang perfekt wäre, würden die gesuchten Paramter a, b, c den hundert linearen Gleichungen

$$e^{t_i} \cdot a + e^{-t_i} \cdot b + c = x_i$$

genügen; in Matrixform ist dies das LGS

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{x} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} e^{t_1} & e^{-t_1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{t_{100}} & e^{-t_{100}} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{100} \end{pmatrix}.$$

Dieses LGS für a, b, c wird praktisch immer unlösbar sein; die im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate beste Schätzung erhält man, indem man mit der adjungierten, d.h. hier im Reellen einfach der transponierten Matrix von A multipliziert: $({}^tAA) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = {}^tA\vec{x}$.

Ausgeschrieben wird das, da $e^{t_i} \cdot e^{-t_i} = 1$ nicht von i abhängt, zu

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{100} e^{2t_i} & 100 & \sum_{i=1}^{100} e^{t_i} \\ 100 & \sum_{i=1}^{100} e^{-2t_i} & \sum_{i=1}^{100} e^{-t_i} \\ \sum_{i=1}^{100} e^{t_i} & \sum_{i=1}^{100} e^{-t_i} & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{100} e^{t_i} x_i \\ \sum_{i=1}^{100} e^{-t_i} x_i \\ \sum_{i=1}^{100} x_i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie Gradient und Hesse-Matrix der Abbildung

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto e^{xy} - x^2e^y + y^2e^x - xy \end{cases} !$$

Lösung: Da die Funktion beliebig oft stetig differenzierbar ist, also insbesondere zweimal, genügt es, die partiellen Ableitungen zu berechnen; außerdem können wir das Lemma von Schwarz anwenden, wonach $f_{xy} = f_{yx}$ ist. Wegen

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= ye^{xy} - 2xe^y + y^2e^x - y \\ f_y(x, y) &= xe^{xy} - x^2e^y + 2ye^x - x \\ f_{xx}(x, y) &= y^2e^{xy} - 2e^y + y^2e^x \\ f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) &= (1 + xy)e^{xy} - 2xe^y + 2ye^x - 1 \\ f_{yy}(x, y) &= x^2e^{xy} - x^2e^y + 2e^x \end{aligned}$$

ist somit $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} ye^{xy} - 2xe^y + y^2e^x - y \\ xe^{xy} - x^2e^y + 2ye^x - x \end{pmatrix}$ und

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} y^2e^{xy} - 2e^y + y^2e^x & (1 + xy)e^{xy} - 2xe^y + 2ye^x - 1 \\ (1 + xy)e^{xy} - 2xe^y + 2ye^x - 1 & x^2e^{xy} - x^2e^y + 2e^x \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die JACOBI-Matrix und die Divergenz des Vektorfelds

$$\vec{V}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} xy \sin xy \\ \cos^2 xy \end{pmatrix} \end{cases} \quad !$$

Lösung: Die erste Komponente $xy \sin xy$ von $\vec{V}$ hat die partiellen Ableitungen

$$y \sin xy + xy^2 \cos xy \quad \text{und} \quad x \sin xy + x^2 y \cos xy \,;$$

für die zweite Komponente $\cos^2 xy$ erhalten wir entsprechend

$$-2y \sin xy \cos xy \quad \text{und} \quad -2x \sin xy \cos xy \,.$$

Also ist

$$J_{\vec{V}}(x,y) = \begin{pmatrix} y \sin xy + xy^2 \cos xy & x \sin xy + x^2 y \cos xy \\ -2y \sin xy \cos xy & -2x \sin xy \cos xy \end{pmatrix} \,.$$

Die Divergenz von $\vec{V}$ ist die Summe der Diagonalelemente der JACOBI-Matrix, also

$$\operatorname{div} \vec{V}(x,y) = y \sin xy + xy^2 \cos xy - 2x \sin xy \cos xy \,.$$