

4. Oktober 2004

## Modulklausur Höhere Mathematik I

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •

**Fragen:** (je zwei Punkte)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Die Menge  $M$  aller Vektoren aus  $\mathbb{F}_2^4$  mit einer geraden Anzahl von Einsen ist ein  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraum.
- 2) *Richtig oder falsch:* Die lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$  sei injektiv. Dann ist die Gleichung  $\varphi(\vec{x}) = \vec{v}$  für jeden Vektor  $\vec{v} \in \mathbb{R}^5$  lösbar.
- 3) In der  $10 \times 10$ -Matrix  $A$  sei  $a_{ij} = \max(i + 1 - j, 0)$ . Was ist  $\det A$ ?
- 4) *Richtig oder falsch:* Betrachtet man  $\mathbb{F}_{256}$  als  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraum, so ist die lineare Abbildung  $\mathbb{F}_{256} \rightarrow \mathbb{F}_{256}; x \mapsto x^2$  linear.

- 5) Finden Sie eine Orthonormalbasis des von  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$  aufgespannten Unterraums von  $\mathbb{C}^3$ !

- 6) *Richtig oder falsch:*  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{2004}} = -4006$

- 7) Was ist  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \begin{pmatrix} \sin xyz \\ \cos xyz \\ xyz \end{pmatrix}$ ?

- 8) Was ist  $\iint_K x^2 dx dy$  für  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ ?

**Aufgabe 1:** (9 Punkte)

$M$  sei die Menge aller Funktionen der Form  $P(x) \cos x$  oder  $Q(x) \sin x$  mit reellen Polynomen  $P, Q$  vom Grad höchstens zwei, und  $V$  sei der von  $M$  erzeugte  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

- a) Ist  $V = M$ , d.h. ist  $M$  bereits ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum?
- b) Finden Sie eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$ !
- c) Zeigen Sie:  $\varphi: \begin{cases} V \rightarrow V \\ f(x) \mapsto f'(x) + f(0) \sin x \end{cases}$  ist eine lineare Abbildung.
- d) Bestimmen Sie eine Basis von Kern  $\varphi$ !
- e) Welche Dimension haben Kern  $\varphi$  und Bild  $\varphi$ ?
- f) Welche Abbildungsmatrix hat  $\varphi$  bezüglich der Basis  $\mathcal{B}$ ?
- g) Ist diese Abbildungsmatrix invertierbar?

• • • Bitte wenden! • • •

**Aufgabe 2: (8 Punkte)**Bestimmen Sie die Lösungsmenge  $\mathcal{L}_a$  des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + 2y - 2az &= 3 & (1) \\ 3x + 7y - 7az &= 8 & (2) \\ x + y + a^2z &= a + 5 & (3) \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von  $a \in \mathbb{R}$ !**Aufgabe 3: (6 Punkte)**Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ !**Aufgabe 4: (5 Punkte)**Gegeben seien hundert Paare von Meßgrößen  $(t_i, x_i)$ , zwischen denen ein Zusammenhang der Form  $x_i = ae^{t_i} + be^{-t_i} + c$  vermutet wird. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf zur Berechnung jener Koeffizienten  $a, b, c$ , mit denen diese Beziehung im Sinne der kleinsten Quadrate am besten gilt!**Aufgabe 5: (6 Punkte)**

a) Berechnen Sie Gradient und HESSE-Matrix der Abbildung

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto e^{xy} - x^2e^y + y^2e^x - xy \end{cases} !$$

b) Berechnen Sie die JACOBI-Matrix und die Divergenz des Vektorfelds

$$\vec{V}: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} xy \sin xy \\ \cos^2 xy \end{pmatrix} \end{cases} !$$

**H I L F S M I T T E L**Als Hilfsmittel sind nur Taschenrechner ohne Graphik  
und ohne höhere Programmiersprache oder CAS zugelassen.

Sobald ich alle Klausuren korrigiert habe, werde ich die Ergebnisse per E-Mail bekanntgeben.

Falls Sie nicht sicher sind, daß ich Ihre aktuelle E-Mail-Adresse habe,  
notieren Sie diese bitte in Ihrer Klausur.

Die Lösungen werden im Laufe des Tages im Netz erscheinen.

Abgabe bis zum Montag, dem 4. Oktober 2004, um 10<sup>15</sup> Uhr

• • •

**Steht Ihr Name auf jedem Blatt?**

• • •