Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

17. Juli 2004

Scheinklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Sind die Elemente $f_1, \dots, f_r$ des Vektorraums $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller stetig differenzierbarer Funktionen linear abhängig, so sind auch ihre Ableitungen $f_1', \dots, f_r'$ als Elemente des Vektorraums $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller stetiger Funktionen linear abhängig.

Lösung: *Richtig,* denn ist für r reelle Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, die nicht alle verschwinden, $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_r f_r = 0$, so verschwindet auch die Ableitung der linken Seite; wegen der Linearität der Differentiation ist also auch $(\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_r f_r)' = \lambda_1 f_1' + \cdots + \lambda_r f_r' = 0$.

2) Richtig oder falsch: Sind die Elemente $f_1, \dots, f_r$ des Vektorraums $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller stetig differenzierbarer Funktionen linear unabhängig, so sind auch ihre Ableitungen $f_1', \dots, f_r'$ als Elemente des Vektorraums $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller stetiger Funktionen linear unabhängig.

Lösung: *Falsch;* ist etwa f_1 eine konstante Funktion, so verschwindet deren Ableitung, so daß keine Menge, die f_1' enthält linear unabhängig sein kann. Ein anderes Gegenbeispiel liefern die beiden linear unabhängigen Funktionen $f_1 = \sin^2 x$ und $f_2 = \cos^2 x$, deren Ableitungen $f_1' = 2 \sin x \cos x$ und $f_2' = -2 \sin x \cos x$ linear abhängig sind.

3) Richtig oder falsch: $\varphi, \psi \colon V \to W$ seien zwei lineare Abbildung zwischen den $\mathbb{R}$-Vektorräumen V und W. Dann ist $U = \bigl\{\vec{v} \in V \bigm| \varphi(\vec{v}) = \psi(\vec{v})\bigr\}$ ein Untervektorraum von V.

Lösung: *Richtig,* denn wegen $\varphi(\vec{0}) = \psi(\vec{0}) = \vec{0}$ liegt der Nullvektor in U, und für $\vec{u}, \vec{v} \in U$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist nach Voraussetzung $\varphi(\vec{u}) = \psi(\vec{u})$ und $\varphi(\vec{v}) = \psi(\vec{v})$, also auch

$$\varphi(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda\varphi(\vec{u}) + \mu\varphi(\vec{v}) = \lambda\psi(\vec{u}) + \mu\psi(\vec{v}) = \psi(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}), \quad \text{d.h.} \quad \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in U.$$

4) Der Untervektorraum $U \le \mathbb{F}_2^3$ werde erzeugt von den Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Geben Sie alle Elemente von U explizit an!

Lösung: U besteht aus allen Vektoren der Form $\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. Somit enthält U außer $\vec{v}$ und $\vec{w}$ nur noch den Nullvektor sowie den Vektor $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5) Finden Sie *eine* ganzzahlige Lösung der Gleichung $17x + 7y = 2004$!

Lösung: Nach Euklid: Zunächst ist $17 : 7 = 2$ Rest 3, also $3 = 17 - 2 \cdot 7$, und $7 : 3 = 2$ Rest 1, d.h. $1 = 7 - 2 \cdot 3 = 7 - 2(17 - 2 \cdot 7) = 5 \cdot 7 - 2 \cdot 17$. Multiplikation mit 2004 führt auf die Lösung $x = -2 \cdot 2004 = -4008$ und $y = 5 \cdot 2004 = 10020$. (*Allgemeine Lösung:* $x = 3 + 7k, y = 279 - 17k, k \in \mathbb{Z}$)

6) Die Niveaulinien $N_a(f)$ der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seien die Parabeln $y = 2x^2 + a$. Was ist $f(x,y)$?

Lösung: $f(x,y) = a \iff y = 2x^2 + a$ führt sofort auf $f(x,y) = y - 2x^2$.

7) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ habe in jedem Punkt den Gradienten $\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, und im Nullpunkt sei $f(0,0,0) = 1$. Was ist $f(x,y,z)$?

Lösung: Da der Gradient konstant ist, verschwinden alle höheren Ableitungen, f ist also die lineare Funktion $f(x,y,z) = 1 + x + 2y + 3z$.

Aufgabe 1: *(11 Punkte)*

V sei der Vektorraum aller reeller Polynome in x vom Grad höchstens vier, und M sei die Teilmenge aller Polynome aus V, die für $x = 1$ verschwinden.

a) Ist M ein Untervektorraum von V?

Lösung: Ja, den das Nullpolynom verschwindet insbesondere auch für $x = 1$, liegt also in M, und für $f, g \in M, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $(\lambda f + \mu g)(1) = \lambda f(1) + \mu g(1) = 0$, d.h. auch jede Linearkombination $\lambda f + \mu g$ von Elementen aus M liegt in M.

b) Zeigen Sie: Die Abbildung $\varphi\colon V \to \mathbb{R};\ f \mapsto f(1)$ ist linear!

Lösung: Für $f, g \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(1) = \lambda f(1) + \mu g(1) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)\,.$$

c) Welche Dimensionen haben Kern und Bild von φ?

Lösung: φ ist offensichtlich surjektiv, denn für jedes $a \in \mathbb{R}$ bildet φ das konstante Polynom a auf a ab. Also ist die Dimension des Bilds gleich eins und, nach der Dimensionsformel, $\dim \operatorname{Kern} \varphi = \dim V - \dim \operatorname{Bild} \varphi = 5 - 1 = 4$.

d) Zeigen Sie: $\mathcal{B} = \left(x^4 - x^3, x^3 - x^2, x^2 - x, x - 1\right)$ ist eine Basis von $[M]$!

Lösung: Offensichtlich ist $M = \operatorname{Kern} \varphi$ (was noch einmal zeigt, daß $M = [M]$ ein Untervektorraum ist); da dessen Dimension nach *c)* gleich vier ist, reicht es zu zeigen, daß die vier angegebenen Elemente entweder linear unabhängig sind oder aber, daß sie M erzeugen. Beides ist einfach: Ist

$$\lambda(x^4-x^3)+\mu(x^3-x^2)+\nu(x^2-x)+\omega(x-1) = \lambda x^4+(\mu-\lambda)x^3+(\nu-\mu)x^2+(\omega-\nu)x-\omega = 0\,,$$

steht hier das Nullpolynom, also müssen alle Koeffizienten verschwinden, d.h.

$$\lambda = \mu - \lambda = \nu - \mu = \omega - \nu = \omega = 0 \quad \text{und damit auch} \quad \lambda = \mu = \nu = \omega = 0\,.$$

Also ist $\mathcal{B}$ eine Basis.

Will man stattdessen nachweisen, daß $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem von M ist, betrachtet man ein beliebiges Polynom

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad \text{mit} \quad f(1) = a + b + c + d + e = 0\,.$$

Offensichtlich ist dann

$$f(x) = a(x^4-x^3)+(a+b)(x^3-x^2)+(a+b+c)(x^2-x)+(a+b+c+d)(x-1)+(a+b+c+d+e)\cdot 1$$

eine Linearkombination der Elemente aus $\mathcal{B}$, da der letzte Summand in dieser Formel verschwindet.

e) Ergänzen Sie $\mathcal{B}$ zu einer Basis $\mathcal{C}$ von V!

Lösung: Nach der gerade hergeleiteten Formel reicht es offensichtlich, noch das konstante Polynom „1“ zu $\mathcal{B}$ hinzuzunehmen: $\mathcal{C} = \left(x^4 - x^3, x^3 - x^2, x^2 - x, x - 1, 1\right)$.

f) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $\psi\colon V \to V;\ f \mapsto f'$ sowohl bezüglich der Basis $\mathcal{D} = \left(x^4, x^3, x^2, x, 1\right)$ als auch bezüglich $\mathcal{C}$!

Lösung: Da x^n die Ableitung nx^{n-1} hat, ist die Abbildungsmatrix bezüglich $\mathcal{D}$ gleich

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Ableitungen der Elemente aus $\mathcal{C}$ sind

$$\begin{aligned} \psi(x^4 - x^3) &= 4x^3 - 3x^2 = 4(x^3 - x^2) + (x^2 - x) + (x - 1) + 1 \\ \psi(x^3 - x^2) &= 3x^2 - 2x \ = 3(x^2 - x) + (x - 1) + 1 \\ \psi(x^2 - x &= 2x - 1 = 2(x - 1) + 1 \\ \psi(x - 1) &= 1 \\ \psi(1) &= 0, \end{aligned}$$

hier ist die Abbildungsmatrix also $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcll} w - 2x + 3y - & 5z & = 10 & (1) \\ 2w - 3x + 5y - & 10z & = 15 & (2) \\ 3w - 4x + 2y + & 5z & = 25 & (3) \\ 4w - 3x + 2y + & 5(a^2 - a)z & = 5(a + 4) & (4) \end{array}$$

Hinweis **nur** *zur Kontrolle auf Rechenfehler:* Für viele Werte von a ist $z = \dfrac{1}{a - 1}$.

Lösung: Zur Elimination von w aus den letzen drei Gleichungen subtrahieren wir die erste Gleichung zweimal von der zweiten, dreimal von der dritten und viermal von der vierten:

$$\begin{array}{rcll} x - \quad y & & = -5 & (5) \\ 2x - \ 7y + & 20z & = -5 & (6) \\ 5x - 10y + & 5(a^2 - a + 4)z & = 5(a + 4) & (7) \end{array}$$

Letztere Gleichung dividieren wir natürlich gleich durch fünf:

$$\begin{array}{rcll} x - \ 2y + & (a^2 - a + 4)z & = (a - 4) & (7') \end{array}$$

Als nächstes soll x aus den Gleichungen (6) und (7’) eliminiert werden; dazu subtrahieren wir Gleichung (5) zweimal von (6) und einmal von (7’):

$$\begin{array}{rcll} -5y + & 20z & = 5 & (8) \\ -y + & (a^2 - a + 4)z & = a + 1 & (9) \end{array}$$

Auch (8) dividieren wir natürlich durch fünf:

$$\begin{array}{rcll} -y + & 4z & = 1 & (8') \end{array}$$

(9) minus (8′) ergibt

$$(a^2 - a)z = a \quad \text{oder} \quad a(a-1)z = a\,.$$

Für $a \neq 0$ können wir durch a dividieren und erhalten $(a-1)z = 1$, was für $a = 1$ unlösbar ist, und sonst auf

$$z = \frac{1}{a-1} \quad \text{für } a \neq 0, 1$$

führt. Für $a = 0$ erfüllt jedes z die dann resultierende Gleichung $0z = 0$, wir können also für z jede reelle Zahl λ einsetzen.

Nach (8') folgt $y = 4z - 1 = \begin{cases} \dfrac{4}{a-1} - 1 = \dfrac{5-a}{a-1} & \text{für } a \neq 0, 1 \\ 4\lambda - 1 & \text{für } a = 0 \end{cases}$.

Sodann zeigt Gleichung (5), daß $x = y - 5 = \begin{cases} \dfrac{10-6a}{a-1} & \text{für } a \neq 0, 1 \\ 4\lambda - 6 & \text{für } a = 0 \end{cases}$.

Entsprechend folgt aus Gleichung (1), daß

$$w = 10 + 2x - 3y + 5z = \begin{cases} \dfrac{10a - 10 + 20 - 12a + 3a - 15 + 5}{a-1} = \dfrac{a}{a-1} & \text{für } a \neq 0, 1 \\ 10 + 8\lambda - 12 - 12\lambda + 3 + 5\lambda = \lambda + 1 & \text{für } a = 0 \end{cases}$$

ist. Insgesamt ist also

$$\mathcal{L}_a = \left\{ \left(\frac{a}{a-1}, \frac{10-6a}{a-1}, \frac{5-a}{a-1}, \frac{1}{a-1} \right) \right\} \quad \text{für } a \neq 0, 1,$$
$$\mathcal{L}_0 = \left\{ (\lambda+1, 4\lambda-6, 4\lambda-1, \lambda) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}_1 = \emptyset\,.$$

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)
Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$!

Lösung: Wir bestimmen nach GRAM-SCHMIDT eine Orthogonal- und simultan auch eine Orthonormalbasis des von den Spaltenvektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ aufgespannten Vektorraums. Als ersten Vektor können wir $\vec{b}_1 = \vec{a}_1$ wählen; da $|\vec{a}_1| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$ ist, ist der zugehörige Vektor der Orthonormalbasis $\vec{q}_1 = \frac{1}{3}\vec{a}_1$ und die Darstellung von $\vec{a}_1$ in der Orthonomalbasis ist dementsprechend einfach $\vec{a}_1 = 3\vec{q}_1$.

Für den zweiten Vektor der Orthogonalbasis machen wir den Ansatz $\vec{b}_2 = \vec{a}_2 + \lambda\vec{b}_1$, wobei λ so gewählt werden muß, daß

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1 = \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_1 + \lambda\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 = 0$$

ist. Da

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 2 \cdot 2 + (-2) + 2 \cdot (-1) = 0$$

verschwindet, ist $\vec{b}_2 = \vec{a}_2$. Auch dieser Vektor hat die Länge drei, der zugehörige Vektor der Orthonormalbasis ist also $\vec{q}_2 = \frac{1}{3}\vec{a}_2$, und $\vec{a}_2$ hat die Basisdarstellung $\vec{a}_2 = 3\vec{q}_2$.

Für den noch fehlenden dritten Vektor der Orthogonalbasis ist der Ansatz entsprechend:

$$\vec{b}_3 = \vec{a}_3 + \lambda\vec{b}_1 + \lambda\vec{b}_2 \quad \text{mit} \quad \vec{b}_3 \cdot \vec{b}_1 = \vec{b}_3 \cdot \vec{b}_2 = 0\,.$$
$$\vec{b}_3 \cdot \vec{b}_1 = \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_1 + \lambda\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 = (3 + 12) + 9\lambda \Longrightarrow \lambda = -\frac{15}{9} = -\frac{5}{3}$$
$$\vec{b}_3 \cdot \vec{b}_2 = \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_2 + \mu\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2 = (-6 - 6) + 9\mu \Longrightarrow \mu = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$\vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \frac{5}{3}\vec{a}_1 + \frac{4}{3}\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor hat die Länge

$$\left|\vec{b}_3\right| = \frac{2}{3}\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = 2\,,$$

der zugehörige normierte Vektor ist also $\vec{q}_3 = \frac{1}{2}\vec{b}_3$ und

$$\vec{a}_3 = \vec{b}_3 + \frac{5}{3}\vec{b}_1 - \frac{4}{3}\vec{b}_2 = 5\vec{q}_1 - 4\vec{q}_2 + 2\vec{q}_3\,.$$

Da $\vec{q}_1, \vec{q}_2$ und $\vec{q}_3$ bereits eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden, geht es beim vierten Vektor nur noch um seine Darstellung

$$\vec{a}_4 = \lambda_1\vec{q}_1 + \lambda_2\vec{q}_2 + \lambda_3\vec{q}_3$$

als Linearkombination der Basisvektoren. Multiplikation dieser Gleichung mit $\vec{q}_i$ zeigt, daß $\lambda_i = \vec{a}_4 \cdot \vec{q}_i$ ist, also

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}(18+6+6) = 10, \quad \lambda_2 = \frac{1}{3}(18-12-3) = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = \frac{1}{3}(-9-12+6) = -5\,.$$

Somit ist $Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ und $R = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*
Zwischen zwei Größen x und t wird ein Zusammenhang der Form

$$x(t) = a\cos t + b\cos 2t + c\cos 3t$$

erwartet. Zur Bestimmung der Parameter a, b, c werden hundert Messungen durchgeführt, die zu Wertepaaren (t_n, x_n) führen. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, dem die nach der Methode der kleinsten Quadrate bestmöglichen Schätzwerte für a, b, c genügen!

Lösung: Falls der Zusammenhang perfekt wäre, würden die gesuchten Paramter a, b, c den hundert linearen Gleichungen

$$\cos(t_i)\cdot a + \cos(2t_i)\cdot b + \cos(3t_i)\cdot c = x_i$$

genügen; in Matrixform ist dies das LGS

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{x} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} \cos t_1 & \cos 2t_1 & \cos 3t_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos t_{100} & \cos 2t_{100} & \cos 3t_{100} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{100} \end{pmatrix}.$$

Dieses LGS für a, b, c wird praktisch immer unlösbar sein; die im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate beste Schätzung erhält man, indem man mit der adjungierten, d.h. hier im Reellen einfach der transponierten Matrix von A multipliziert: $({}^tAA)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = {}^tA\vec{x}$.

Ausgeschrieben wird das zu

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{100}\cos^2 t_i & \sum_{i=1}^{100}\cos t_i\cdot\cos 2t_i & \sum_{i=1}^{100}\cos t_i\cdot\cos 3t_i \\ \sum_{i=1}^{100}\cos t_i\cdot\cos 2t_i & \sum_{i=1}^{100}\cos^2 2t_i & \sum_{i=1}^{100}\cos 2t_i\cdot\cos 3t_i \\ \sum_{i=1}^{100}\cos t_i\cdot\cos 3t_i & \sum_{i=1}^{100}\cos 2t_i\cdot\cos 3t_i & \sum_{i=1}^{100}\cos^2 3t_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{100}\cos(t_i)x_i \\ \sum_{i=1}^{100}\cos(2t_i)x_i \\ \sum_{i=1}^{100}\cos(3t_i)x_i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

a) Eine Matrix heißt *symmetrisch*, falls ${}^t\!A = A$ ist, HERMITEsch, wenn ${}^t\!A = \overline{A}$ ist, *orthogonal,* wenn ${}^t\!AA = E$ ist und *unitär*, wenn ${}^t\!A\overline{A} = E$ ist. Welche dieser vier Eigenschaften hat die Matrix $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3i & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 3i \end{pmatrix}$?

Lösung: Offensichtlich ist ${}^t\!A = A$, die Matrix ist also symmetrisch, aber nicht HERMITEsch, denn die beiden rein imaginären Einträge in der Diagonalen ändern beim Transponieren natürlich nicht ihr Vorzeichen.

$$ {}^t\!AA = A^2 = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 7 & 0 & 24i \\ 0 & 25 & 0 \\ 24i & 0 & 7 \end{pmatrix} $$

ist offensichtlich nicht die Einheitsmatrix, so daß A nicht orthogonal ist, aber unitär, denn

$$ {}^t\!A\overline{A} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3i & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3i & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -3i \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} = E\,. $$

b) Was ist A^{-1}?

Lösung: Für eine unitäre Matrix ist $A^{-1} = \overline{{}^t\!A}$, hier also wegen der Symmetrie von A einfach

$$ A^{-1} = \overline{A} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3i & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -3i \end{pmatrix}\,. $$

c) Was ist $\det(A)$?

Lösung: Da A unitär ist, muß $|\det A| = 1$ sein; mehr können wir leider nicht sagen ohne zu rechnen. Der Vorfaktor $\frac{1}{5}$ muß in *jeder* der drei Spalten berücksichtigt werden, führt also bei der Determinante zu einem Faktor $\frac{1}{125}$. Da die Matrix nur in der Diagonale und der Gegendiagonale Einträge hat, führt SARRUS am schnellsten zum Ergebnis:

$$ \det A = \frac{1}{125}\begin{vmatrix} 3i & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 3i \end{vmatrix} = \frac{1}{125}\big(5\cdot(3i)^2 - 5\cdot 4^2\big) = \frac{5}{125}\big(-9-16\big) = \frac{1}{25}(-25) = -1\,. $$

Aufgabe 6: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$!

Lösung: Die Eigenwerte sind die Nullstellen von

$$ \begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 4 & -4 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(1+\lambda)\lambda^2 - 8 + 4 - 4\lambda + 4(1+\lambda) + 2\lambda \\ &= -\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = -\lambda(\lambda^2+\lambda-2) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda+2)\,. \end{aligned} $$

Somit hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -2$.

Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 0$ erfüllen des lineare Gleichungssystem $A\vec{v} = \vec{0}$ oder

$$-x + 2y - z = x - z = 4x - 4y = 0\,;$$

aus den letzten beiden Gleichungen folgt, daß $x = y$ und $x = z$ sein muß, d.h. $x = y = z$, und dann ist auch die erste Gleichung erfüllt. Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 0$ sind also gerade die vom Nullvektor verschiedenen Vielfachen von $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$ erfüllen des lineare Gleichungssystem $(A - E)\vec{v} = \vec{0}$ oder

$$-2x + 2y - z = x - y - z = 4x - 4y - z = 0\,.$$

Addiert man die mittlere Gleichung zweimal zur vorderen und subtrahiert sie viermal von der hinteren, fallen in beiden Gleichungen außer den x-Termen auch noch die y-Terme mit, so daß sie äquivalent werden zu $z = 0$. Setzt man dies in eine beliebige der drei Gleichungen ein, folgt, daß $x = y$ sein muß, die Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 1$ sind also gerade die vom Nullvektor verschiedenen Vielfachen von $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Für $\lambda_3 = -2$ schließlich müssen wir das Gleichungssystem $(A + 2E)\vec{v} = \vec{0}$ lösen; explizit ist dies

$$x + 2y - z = x + 2y - z = 4x - 4y + 2z = 0\,.$$

Die erste Gleichung ist also identisch mit der zweiten; addiert man sie zweimal zur dritten, ergibt sich $6x = 0$, d.h. x muß verschwinden. Dann wird das Gleichungssystem äquivalent zu $z = 2y$, ie Eigenvektoren zu $\lambda_3 = -2$ sind also gerade die vom Nullvektor verschiedenen Vielfachen von $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}^3$ eine Basis aus Eigenvektoren von A hat!

Lösung: Da wir den allgemeinen Satz noch nicht kennen, müssen wir zeigen, daß die drei gefundenen Eigenvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ linear unabhängig sind. Ist

$$\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 + \nu\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda + \mu + \nu \\ \lambda + 2\nu \end{pmatrix} = \vec{0}\,,$$

so muß ν als Differenz zwischen mittlerem und oberem Eintrag verschwinden, damit wegen des unteren Eintrags $\lambda + 2\nu$ auch λ, also wegen des oberen Eintrags auch μ. Somit sind die drei Vektoren linearen unabhängig, bilden also eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

c) Wie sieht die Matrix A bezüglich dieser Basis aus?

Lösung: Da jeder der Vektoren $\vec{v}_i$ einfach mit dem zugehörigen Eigenwert λ_i multipliziert wird, ist dies die Diagonalmatrix mit den λ_i als Einträgen, also

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7: *(4 Punkte)*
Berechnen Sie für die Funktion $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto e^{xy} + x^2\cos y + y^2 \sin x + x^2y^2 \end{cases}$ Gradient und HESSE-Matrix!

Lösung: Die Funktion ist offensichtlich mindestens zweimal stetig differennzierbar (sie ist sogar analytisch); es reicht also, die partiellen Ableitungen zu berechnen. Für den Gradienten bekommen wir

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= ye^{xy} + 2x\cos y + y^2\cos x + 2xy^2 \\ f_y(x,y) &= xe^{xy} - x^2\sin y + 2y\sin x + 2x^2y \\ \nabla f(x,y) &= \begin{pmatrix} ye^{xy} + 2x\cos y + y^2\cos x + 2xy^2 \\ xe^{xy} - x^2\sin y + 2y\sin x + 2x^2y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für die HESSE-Matrix können wir aus dem SCHWARZschen Lemma folgern, daß $f_{xy} = f_{yx}$ ist, wir müssen also nur eine der beiden gemischten Ableitungen berechnen.

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= y^2e^{xy} + 2\cos y - y^2\sin x + 2y^2 \\ f_{xy}(x,y) &= (1+xy)e^{xy} - 2x\sin y + 2y\cos x + 4xy \\ f_{yy}(x,y) &= x^2e^{xy} - x^2\cos y + 2\sin x + 2x^2 \end{aligned}$$

Damit ist $H_f(x,y)$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} y^2e^{xy} + 2\cos y - y^2\sin x + 2y^2 & (1+xy)e^{xy} - 2x\sin y + 2y\cos x + 4xy \\ (1+xy)e^{xy} - 2x\sin y + 2y\cos x + 4xy & x^2e^{xy} - x^2\cos y + 2\sin x + 2x^2 \end{pmatrix}.$$