

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 6./7. Juli 2004

- a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$!
- b) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$!
- c) Welche der folgenden Vorschriften definieren Normen auf \mathbb{C} ?

$$\|z\|_1 = |z|, \quad \|z\|_2 = \Re z + \Im z, \quad \|z\|_3 = \max(\Re z, \Im z),$$

$$\|z\|_4 = \max(|\Re z|, |\Im z|), \quad \|z\|_5 = (\Re z)(\Im z), \quad \|z\|_6 = (\Re z)^2 + (\Im z)^2$$

- d) Zeigen Sie mit irgendeiner der Vorschriften, die Normen definieren, daß die Abbildung $z \mapsto z^2$ bezüglich dieser Norm in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ stetig ist!
- e) M sei der Vektorraum aller reeller $n \times m$ -Matrizen. Welche der folgenden Vorschriften definieren Normen auf M ?

$$\|A\|_1 = \max_{(i,j)} |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|, \quad \|A\|_3 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2,$$

$$\|A\|_4 = \max_{i=1}^n \sqrt{\sum_{j=1}^m a_{ij}^2}, \quad \|A\|_5 = \sum_{j=1}^m \sqrt{\sum_{i=1}^n a_{ij}^2}$$

- f) Welche der folgenden Punktfolgen (x_n, y_n) aus \mathbb{R}^2 ist konvergent für $n \rightarrow \infty$, und wohin konvergiert sie?
- 1) $(x_n, y_n) = (\frac{1}{1+n^2}, \frac{1}{n^3})$, 2) $(x_n, y_n) = ((-1)^n, \frac{1}{n})$, 3) $(x_n, y_n) = (e^{-n}, \cos(e^{-n^2}))$
- g) Was können Sie über eine Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sagen, deren Niveaulinien konzentrische Kreise um den Nullpunkt sowie die nur aus dem Nullpunkt bestehende Menge sind?
- h) Beschreiben Sie den Graphen der Funktion $f(x, y) = 5 - \sqrt{x^2 + y^2}$ geometrisch!
- i) Wo ist die Funktion f aus der letzten Aufgabe stetig? Wo ist sie differenzierbar?
- j) Berechnen Sie für die folgenden Funktionen die partiellen Ableitungen nach x, y und z , und bestimmen Sie den Gradienten überall dort, wo er existiert!

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + y^2z + z^2x + xyz$$

$$g(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2} \cdot \cos(xy)$$

$$h(x, y, z) = \frac{x+y}{x-z}$$

$$k(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$l(x, y, z) = ax + by + cz + d$$

- k) *Richtig oder falsch:* Für die Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ verschwinde die JACOBI-Matrix überall. Dann gibt es einen Punkt $a \in \mathbb{R}^n$, so daß $f(x) = a$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
- l) Berechnen Sie die HESSE-Matrizen der folgenden Funktionen:

$$f_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (x, y, z) \mapsto x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$$

$$f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto \sin x \cos y$$

$$f_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto e^{x^2+y^2}$$

$$f_4: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto \arctan x + y$$