Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 29./30. Juni 2004

a) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten der hundert Datenpaare $(\sin^2 k, \cos^2 k)$ für $k = 1, \ldots, 100$!

Lösung: Da $\cos^2 k = 1 - \sin^2 k$ für alle k liegen die Datenpaare auf einer Geraden mit negativer Steigung; der Korrelationskoeffizient ist also -1.

b) Schreiben Sie $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ als Produkt von Transpositionen!

Lösung: Da $\pi(3) = 5$ ist, läßt $\pi \circ (3\ 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ die Zahl 5 fest. Diese Permutation wiederum bildet 3 auf 4 ab, also läßt

$$\pi \circ (3\,5) \circ (3\,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (2\,3)$$

zusätzlich auch noch vier fest. Damit ist

$$\pi \circ (3\,5) \circ (3\,4) = (2\,3) \quad \text{und} \quad \pi = (2\,3) \circ (3\,4) \circ (3\,5)\,.$$

c) Schreiben Sie π^{-1} als Produkt von Transpositionen!

Lösung: Da $\pi \circ \pi^{-1}$ die Identität sein soll, müssen wir die Transpositionen von $\pi = (2\,3) \circ (3\,4) \circ (3\,5)$ schrittweise rückgängig machen, d.h.

$$\pi^{-1} = (3\,5) \circ (3\,4) \circ (2\,3)\,.$$

(Wie schon beim vorigen Themenvorschlag ist das natürlich nicht die einzige Möglichkeit: Wie schon die Vielzahl verschiedener Sortieralgorithmen zeigt, gibt es in beiden Fällen viele Alternativen.)

d) Ist π gerade oder ungerade?

Lösung: π ist ungerade, da es als Produkt von drei Transpositionen geschrieben werden kann.

e) *Richtig oder falsch:* π^{-1} ist genau dann gerade, wenn π gerade ist.

Lösung: *Richtig,* denn ist $\pi = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_n$ eine Darstellung von π als Produkt von n Transpositionen, so ist (siehe vorletztes Thema) auch $\pi^{-1} = \tau_n \circ \cdots \circ \tau_1$ als Produkt von n Transpositionen darstellbar.

f) A_π sei die Permutationsmatrix zu $\pi \in \mathfrak{S}_n$, d.h. $a_{ij} = 1$, falls $j = \pi(i)$ und null sonst. Was ist $\det A_\pi$?

Lösung: Permutiert man die Zeilen von A gemäß der Permutation π, erhält man die Einheitsmatrix. Ist π ein Produkt von r Transpositionen, ist die Anwendung von π äquivalent zu r Zeilenvertauschungen, d.h. $\det A = (-1)^r \det E = (-1)^r$. Damit ist

$$\det A = \begin{cases} 1 & \text{falls } \pi \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } \pi \text{ ungerade} \end{cases}\,.$$

g) Zeigen Sie: Jede Permutation π der Form $i \to j \to k \to i$, die drei Zahlen zyklisch vertauscht, ist gerade.

Lösung: Wegen $\pi(j) = k$ läßt $\pi \circ (j\ k)$ die Zahl k fest. Sie bildet i auf j ab und j auf i, ist also gleich der Transposition $(i\ k)$, und damit ist $\pi = (i\ k) \circ (i\ j)$.

h) *Richtig oder falsch:* Für $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ ist $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

Lösung: $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \det(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$. Diese Determinante entsteht aus $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ durch zyklische Vertauschung der drei Spalten, also, wie wir gerade gesehen haben, durch eine *gerade* Permutation. Damit sind die beiden Determinanten gleich, die Behauptung also richtig.

i) Bestimmen Sie, ohne zu rechnen, den Betrag der Determinanten

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 & 5 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 6 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}!$$

Lösung: Anwendung der Permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 7 & 5 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ auf die Spalten der Matrix führt auf eine obere Dreiecksmatrix mit Einsen in der Hauptdiagonalen; diese hat Determinante eins. Damit ist $\det A = \pm 1$, der Betrag ist also eins.
(Schreibt man π wie oben als Produkt von Transpositionen, sieht man leicht, daß π eine gerade Permutation ist, d.h. $\det A = +1$.)

j) Berechnen Sie die Determinanten

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 10 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 15 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}!$$

Lösung: Da in der ersten Zeile der Matrix zu D_1 lauter Einsen stehen, bietet sich an, drei von diesen durch Spaltenoperationen zum Verschwinden zu bringen, beispielsweise durch Subtraktion der ersten Spalte von allen übrigen. Es gibt allerdings noch eine bessere Möglichkeit: Da die Zahlen in jeder der vier Zeilen eine aufsteigende Folge bilden, können wir auch von jeder Spalte (außer der ersten) die unmittelbar davor stehende Spalte subtrahieren: Dies hat für die erste Zeile denselben Effekt, führt aber in den anderen Zeilen zu kleineren Zahlen:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 10 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

ist. Diese Matrix läßt sich nach SARRUS berechnen oder durch nochmalige Anwendung desselben Tricks, dieses Mal aber in entgegengesetzter Richtung: Wir subtrahieren von jeder Spalte (außer der letzten) die rechts daneben stehende Spalte:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = 1\,.$$

Bei D_2 bietet sich Entwicklung nach der dritten Zeile an; noch einfacher wird es aber, wenn wir vorher die zweite Spalte von der dritten subtrahieren:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Subtrahieren wir nun noch die erste Zeile von der zweiten, bevor wir nach der zweiten Spalte entwickeln, folgt

$$D_2 = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 4\,.$$

Bei D_3 ist fast selbstverständlich, daß wir zunächst nach der dritten Zeile entwickeln:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Als nächstes bietet sich an, die zweite Spalte von der dritten zu subtrahieren und dann nach der dritten zu entwickeln:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4\,.$$

k) Welche Gleichung muß x erfüllen, damit die vier Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \\ x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 2 \\ x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ 3 \\ x \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind?

Lösung: Die Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn ihre Determinante verschwindet. Diese ist

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x & x & 4 \\ x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & x & x \\ x & x & 3 & x \end{vmatrix}\,.$$

Subtraktion der dritten Zeile von der ersten sowie der vierten von der zweiten und anschließende Enwicklung nach der ersten Zeile führt auf

$$D = \begin{vmatrix} 0 & x-2 & 0 & 4-x \\ 0 & 2-x & 0 & 4-x \\ 1 & 2 & x & x \\ x & x & 3 & x \end{vmatrix} = (2-x) \begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ 1 & x & x \\ x & 3 & x \end{vmatrix} - (4-x) \begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x \\ x & x & 3 \end{vmatrix}\,.$$

Addieren wir noch die zweite Zeile zur ersten, vereinfacht sich dies zu

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2(4-x) \\ 0 & 2-x & 0 & 4-x \\ 1 & 2 & x & x \\ x & x & 3 & x \end{vmatrix} = -2(4-x) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2-x & 0 \\ 1 & 2 & x \\ x & x & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4-x)(2-x) \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 3 \end{vmatrix} = 2(4-x)(2-x)(3-x^2) .$$

Die Vektoren sind also genau dann linear abhängig, wenn $x = 2$, $x = 4$ oder $x = \pm\sqrt{3}$ ist.

l) *Richtig oder falsch:* Falls die ganzzahlige Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Determinante ± 1 hat, sind a und b sowie c und d teilerfremd.

Lösung: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ ist durch jeden gemeinsamen Teiler der beiden Zahlen a und b und auch durch jeden gemeinsamen von c und b oder d teilbar; falls die Determinante gleich ± 1 ist, kann es daher keinen echten solchen Teiler geben. Somit ist die Behauptung richtig.

m) *Richtig oder falsch:* Falls die ganzzahlige Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine ganzzahlige Matrix als Inverse hat, ist ihre Determinante gleich ± 1.

Lösung: *Richtig,* denn $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$ ist, falls sowohl A als auch A^{-1} ganzzahlige Einträge haben, ein Produkt ganzer Zahlen. Dies ist nur möglich für

$$\det(A) = \det(A^{-1}) = \pm 1 .$$