Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 22./23. Juni 2004

a) Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$!

Lösung: Wir wenden das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren an auf die Spalten von A: Die erste Spalte ist das Dreifache des zweiten Koordinateneinheitsvektors, also ist die erste Spalte von Q gerade diser Vektor, und die erste Spalte von R enthält als ersten Eintrag eine Drei, sonst lauter Nullen:

$$\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Für einen dazu orthogonalen Vektor $\vec{c}_2$ machen wir mit dem zweiten Spaltenvektor $\vec{a}_2$ von A den Ansatz $\vec{q}_2 = \vec{a}_2 + \lambda\vec{q}_1$; die Bedingung $\vec{q}_2 \cdot \vec{q}_1 = 0$ führt dann auf

$$\lambda = -\frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{q}_1}{\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_1} = -2, \quad \text{d.h.} \quad \vec{c}_2 = \vec{a}_2 - 2\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Dieser Vektor hat die Länge $\sqrt{2}$, also setzen wir

$$\vec{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Dann ist

$$\vec{a}_2 = 2\vec{q}_1 + \vec{c}_2 = 2\vec{q}_1 + \sqrt{2}\vec{q}_2, \quad \text{d.h.} \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Nun suchen wir einen zu $\vec{q}_1$ und $\vec{q}_2$ orthogonalen Vektor der Form $\vec{c}_3 = \vec{a}_3 + \lambda\vec{q}_1 + \mu\vec{q}_2$; dabei ist

$$\lambda = -\frac{\vec{a}_3 \cdot \vec{q}_1}{\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_1} = -1 \quad \text{und} \quad \mu = -\frac{\vec{a}_3 \cdot \vec{q}_2}{\vec{q}_2 \cdot \vec{q}_2} = -2\sqrt{2}\,,$$

also

$$\vec{c}_3 = \vec{a}_3 - \vec{q}_1 - 2\sqrt{2}\vec{q}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{0}\,,$$

wir bekommen also keinen neuen Basisvektor, sondern nur die Darstellung

$$\vec{a}_3 = \vec{q}_1 + 2\sqrt{2}\vec{q}_2 .$$

Wir erhalten damit keine neue Spalte von Q, aber $\vec{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ als dritte Spalte von R.

Im nächsten Schritt suchen wir daher noch einmal nach einem Vektor $\vec{c}_3$, der auf $\vec{q}_1$ und $\vec{q}_2$ senkrecht steht, dieses Mal von der Form $\vec{c}_3 = \vec{a}_4 + \lambda\vec{q}_1 + \mu\vec{q}_2$. Hier ist

$$\lambda = -\frac{\vec{a}_4 \cdot \vec{q}_1}{\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_1} = 0 \quad \text{und} \quad \mu = -\frac{\vec{a}_4 \cdot \vec{q}_2}{\vec{q}_2 \cdot \vec{q}_2} = -3\sqrt{2}\,,$$

wir erhalten also wieder den Nullvektor. Als vierte und letzte Spalte von R bekommen wir

$$\vec{r}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Was noch fehlt ist die letzte Spalte von Q; da wir alle Spalten von A bereits aus den ersten beiden Spalten von A linear kombinieren können, müssen wir $\vec{q}_1, \vec{q}_2$ einfach auf irgendeine Weise zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ergänzen. Dazu könnten wir GRAM-SCHMIDT auf den ersten oder dritten Einheitsvektor anwenden; andererseits sieht man aber auch sofort, daß – genau wie $\binom{1}{1}$ und $\binom{1}{-1}$ orthogonal zueinander sind – der Vektor

$$\vec{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

die Orthonormalbasis vervollständigt. Somit ist

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Natürlich ist nicht nur $A = QR$, sondern, da wir die dritte Spalte von Q nicht brauchen, auch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

b) Richtig oder falsch: Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal, so ist $iA \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär.

Lösung: *Richtig,* denn $(iA)^* = \overline{{}^t(iA)} = \overline{i\,{}^tA} = -i\,\overline{{}^tA} = -i\,{}^tA$; für eine orthogonale Matrix A ist also $(iA)^*(iA) = (-i\,{}^tA)(iA) = (-i\cdot i)\,{}^tAA = {}^tAA = E$.

c) Richtig oder falsch: Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär, so auch iA.

Lösung: *Richtig,* denn $(iA)^* = \overline{{}^t(iA)} = \overline{i\,{}^tA} = -i\,\overline{{}^tA} = -iA^*$; für eine unitäre Matrix A ist also $(iA)^*(iA) = (-iA^*)(iA) = (-i\cdot i)A^*A = {}^tA^*A = E$.

d) Für welche Wahl der Vorzeichen sind die folgenden Matrizen orthogonal *bzw.* unitär?

$$A_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & \pm 4 \\ 4 & \pm 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & \pm i \\ 1 & \pm i \end{pmatrix}, \quad A_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & \pm 1 \\ 1 & \pm i \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \pm 1 & -1 & 1 \\ -1 & \pm 1 & 1 & 1 \\ 1 & \pm 1 & 1 & 1 \\ -1 & \pm 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Unabhängig von den Vorzeichen haben in allen Fällen alle Spaltenvektoren die Länge eins; es geht also nur darum, wann die Spaltenvektoren mit noch nicht festgelegten Vorzeichen auf den anderen senkrecht stehen. (Die drei festen Spaltenvektoren von A_5 sind offensichtlich paarweise orthogonal.)

Bei A_1 und A_2 müssen dazu offenbar die beiden Vorzeichen verschieden sein, bei A_3 dagegen gleich, denn $\binom{i}{1}\binom{1}{i} = i\cdot 1 + 1\cdot\bar{i} = 0$. Bei A_4 können die Vorzeichen offensichtlich beliebig gewählt werden; die Skalarprodukte verschiedener Spalten sind stets null.

Bei A_5 schließlich verschwindet das Skalarprodukt der ersten beiden Spalten genau dann, wenn in der zweiten Spalte sowohl die ersten beiden als auch die letzten beiden Einträge dasselbe Vorzeichen haben. Das Skalarprodukt der zweiten und der dritten Spalte verschwinden, wenn sowohl die erste und die vierte als auch die zweite und die dritte Komponente verschiedene Vorzeichen haben. Beides zusammen erzwingt die Vorzeichenverteilung $++--$ oder $--++$. In beiden Fällen ist offensichtlich auch das Produkt mit der vierten Spalte null.

Für die nächsten Themenvorschläge sei V ein EUKLIDischer oder HERMITEscher Vektorraum, $U \le V$ ein Untervektorraum und $\pi_U \colon V \to U$ die orthogonale Projektion auf U.

e) *Richtig oder falsch:* $\pi_U(\vec{v}) \cdot \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{v} \in U^\perp$

Lösung: *Richtig:* $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ sei die eindeutige Zerlegung von $\vec{v}$ in die beiden Komponente $\vec{u} \in U$ und $\vec{w} \in U^\perp$. Dann ist $\pi_U(\vec{v}) = \vec{u}$ und $\pi_U(\vec{v}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{u}$, da $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ ist. Wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts verschwindet daher $\pi_U(\vec{v}) \cdot \vec{v}$ genau dann, wenn $\vec{u}$ der Nullvektor ist, d.h. wenn $\vec{v} = \vec{w}$ in $U^\perp$ liegt.

f) *Richtig oder falsch:* $|\vec{v} \cdot \vec{u}| \le |\vec{v} \cdot \pi_U(\vec{v})| \quad$ für alle $\vec{u} \in U, \vec{v} \in V$

Lösung: *Falsch,* denn wir können den Vektor $\vec{u} \in U$ beliebig lang wählen. Falls $\vec{v} \cdot \pi_U(\vec{v})$ nicht verschwindet, ist die Ungleichung beispielsweise falsch für $\vec{u} = 2\pi_U(\vec{v})$.

g) *Richtig oder falsch:* $|\pi_U(\vec{v})| \le |\vec{v}| \quad$ für alle $\vec{v} \in V$

Lösung: Mit $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ wie beim vorletzten Problem ist $|\vec{v}|^2 = (\vec{u}+\vec{w})\cdot(\vec{u}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{w}\cdot\vec{w}$. Da $\vec{w} \cdot \vec{w} \ge 0$ ist, folgt $|\vec{u}| \le |\vec{v}|$, wie behauptet.

h) Was ist $\pi_U(\vec{v}) + \pi_{U^\perp}(\vec{v})$?

Lösung: Mit $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ wie eben ist $\pi_U(\vec{v}) = \vec{u}$ und $\pi_{U^\perp}(\vec{v}) = \vec{w}$, da $(U^\perp)^\perp = U$ ist. Die Summe ist daher $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v}$.

i) Berechnen Sie die orthogonale Projektion von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ auf $U = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$!

Lösung: Wir müssen eine Orthogonalbasis von $U = [\vec{b}_1, \vec{b}_2]$ finden. Dazu nehmen wir als ersten Vektor $\vec{c}_1 = \vec{b}_1$, für den zweiten machen wir nach GRAM-SCHMIDT den Ansatz

$$\vec{c}_2 = \vec{b}_2 + \lambda \vec{c}_1 \quad \text{mit} \quad \vec{c}_2 \cdot \vec{c}_1 = 0 .$$

Hier ist

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{c}_1 = \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1 = 1 + 2 + 6 = 9$$

und

$$\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1 = \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 = 1 + 1 + 4 = 6 ,$$

also ist $\lambda = -\frac{3}{2}$ und $\vec{c}_2 = \vec{b}_2 - \dfrac{3}{2}\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \dfrac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Also ist $\vec{c}_1, \vec{c}_2$ eine Orthogonalbasis; besser ist allerdings die Basis $\vec{c}_1, \vec{d}_2$ mit $\vec{d}_2 = 2\vec{c}_1$, weil wir dann mit ganzen Zahlen rechnen können.
Als nächstes können wir die Basis $\vec{c}_1, \vec{d}_2$ zu einer Basis $\vec{c}_1, \vec{d}_2, \vec{c}_3$ von $\mathbb{R}^3$ ergänzen; da wir den Vektor $\vec{c}_3$ im Augenblick für nichts explizit brauchen, gibt es aber keinen Grund, ihn auszurechnen.

Ist $\vec{v} = \lambda\vec{c}_1 + \mu\vec{d}_2 + \nu\vec{c}_3$, so ist $\pi_U(\vec{v}) = \lambda\vec{c}_1 + \mu\vec{d}_2$; wir müssen also diese beiden Koeffizienten berechnen. Da wir eine Orthogonalbasis haben, ist

$$\vec{v} \cdot \vec{c}_1 = \lambda\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1 \quad \text{und} \quad \vec{v} \cdot \vec{d}_1 = \mu\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_1 \, .$$

Wir kennen bereits $\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1 = 6$, die restlichen drei Produkte müssen wir ausrechnen:

$$\vec{v} \cdot \vec{c}_1 = 1 + 2 + 8 = 11, \quad \vec{v} \cdot \vec{d}_1 = -1 + 2 = 1 \quad \text{und} \quad \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_1 = 1 + 1 = 2 \, ,$$

$$\text{d.h.} \quad \lambda = \frac{11}{6}, \quad \mu = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \pi_U(\vec{v}) = \frac{11}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{8}{6}\\\frac{14}{6}\\\frac{11}{3}\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\7\\11\end{pmatrix} .$$

j) Zeigen Sie, daß das folgende lineare Gleichungssystem unlösbar ist:

$$x + y = 1, \quad x + 2y = 2 \quad \text{und} \quad 2x + 3y = 4 \qquad (*)$$

Lösung: *Klar,* denn die Summe der ersten beiden Gleichungen ist gleich der dritten mit durch drei ersetzter rechter Seite.

k) Finden Sie reelle Zahlen x, y, so daß $(*)$ mit diesen Zahlen im Sinne der kleinsten Quadrate möglichst wenig falsch ist!
Variante I: Verwenden Sie den vorletzten Themenvorschlag!

Lösung: Die gesuchten Zahlen lösen das lineare Gleichungssystem, wenn wir die rechte Seite ersetzen durch ihre Projektion auf den Untervektorraum, den die Spalten der Matrix erzeugen. Das ist genau der Vektor, den wir beim vorletzten Themenvorschlag berechnet haben, d.h. das zu lösende Gleichungssystem ist

$$x + y = \frac{4}{3}, \quad x + 2y = \frac{7}{3} \quad \text{und} \quad 2x + 3y = \frac{11}{3} \, .$$

Da wir wissen, daß dieses Gleichungssystem lösbar ist (falls wir uns bei der Berechnung der Projektion nicht verrechnet haben ...), genügt es, die ersten beiden Gleichungen zu betrachten. Ihre Differenz zeigt, daß $y = 1$ ist, also ist $x = \frac{1}{3}$. Zu unserer Beruhigung sollten wir noch nachrechnen, daß diese beiden Zahlen auch die dritte Gleichung erfüllen.

Variante II: Verwenden Sie die allgemeine Theorie aus der Vorlesung!

Lösung: Die Matrix des Gleichungssystems ist

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\\2 & 3\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A^* = {}^tA = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\end{pmatrix} .$$

Wir müssen das lineare Gleichungssystem $({}^tAA)\vec{x} = {}^tA\vec{b}$ lösen, wobei $\vec{b}$ die rechte Seite des gegebenen Gleichungssystems ist. Wegen

$${}^tAA = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\\2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 9\\9 & 14\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad {}^tA\vec{b} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\17\end{pmatrix}$$

ist dies das Gleichungssystem

$$6x + 9y = 11 \quad \text{und} \quad 9x + 14y = 17 \, .$$

Subtraktion von $1\frac{1}{2}$ mal der ersten Gleichung von der zweiten führt auf $\frac{1}{2}y = \frac{1}{2}$, also $y = 1$, und damit folgt aus jeder der beiden Gleichungen schnell, daß $x = \frac{1}{3}$ sein muß.

Betrachtet man den Gesamtaufwand für die Lösung, ist dieser Weg offensichtlich erheblich effizienter.

l) Gegeben seien hundert Meßwerte (x_i, t_i), wobei theoretisch ein Zusammenhang der Form

$$x_i = a \sin t_i + b \sin 2t_i + c \sin 3t_i + d \sin 4t_i$$

bestehen sollte. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, dessen Lösungen im Sinne der kleinsten Quadrate die beste Schätzung für a, b, c, d liefern!

Lösung: Die gesuchten Größen a, b, c, d sollten theoretisch das lineare Gleichungssystem aus den hundert Gleichungen

$$(\sin t_i) \cdot a + (\sin 2t_i) \cdot b + (\sin 3t_i) \cdot c + (\sin 4t_i) \cdot d = x_i$$

erfüllen. Dessen Matrix A hat vier Spalten, wobei die Einträge der j-ten Spalte gleich den Zahlen $\sin jt_i$ sind. Damit ist ${}^tAA$ eine 4×4-Matrix mit Einträgen

$$a_{k\ell} = \sum_{i=1}^{100} \sin kt_i \cdot \sin \ell t_i \,.$$

Als rechte Seite des Gleichungssystem haben wir den Vektor

$${}^tA\vec{x} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{100} x_i \sin t_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{100} x_i \sin 4t_i \end{pmatrix} ,$$

das Gleichungssystem besteht also aus den vier Gleichungen

$$\left(\sum_{i=1}^{100} \sin kt_i \cdot \sin t_i\right) a + \left(\sum_{i=1}^{100} \sin kt_i \cdot \sin 2t_i\right) b + \left(\sum_{i=1}^{100} \sin kt_i \cdot \sin 3t_i\right) c + \left(\sum_{i=1}^{100} \sin kt_i \cdot \sin 4t_i\right) d = \sum_{i=1}^{100} x_i \sin kt_i$$

für $k = 1, \ldots, 4$.

m) Wie können Sie vorgehen, wenn ein Zusammenhang der Form $x_i = A \cos(t_i + \varphi)$ zu erwarten ist?

Lösung: Das Problem hier ist, daß die Gleichungen nicht linear in φ sind. Nach der Additionsformel für den Kosinus ist aber

$$\cos(t_i + \varphi) = \cos t_i \cos \varphi - \sin t_i \sin \varphi \,,$$

d.h. $x_i = a \cos t_i + b \sin t_i$ mit $a = A \cos \varphi$ und $b = A \sin \varphi$.
Dieses Gleichungssystem ist linear in a und b, kann also nach der Methode aus der Vorlesung gelöst werden: Multiplikation mit der Transponierten der Matrix des Gleichungssystems führt auf

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \cos^2 t_i\right) a + \left(\sum_{i=1}^{N} \sin t_i \cos t_i\right) b = \sum_{i=1}^{N} x_i \cos t_i$$

und

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \sin t_i \cos t_i\right) a + \left(\sum_{i=1}^{N} \sin^2 t_i\right) b = \sum_{i=1}^{N} x_i \sin t_i \,.$$

Dieses Gleichungssystem liefert a und b; daraus läßt sich A berechnen als

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

und φ durch die beiden Bedingungen

$$\cos\varphi = \frac{a}{A} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \frac{b}{A} \, .$$

(Man benötigt beide Bedingungen um φ modulo 2π zu kennen; eine allein liefert nur φ modulo π.)