Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515
A5, Zimmer C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 1./2. Juni 2004

a) Lösen Sie für $a \in \{0,1\}$ das lineare Gleichungssystem $x+y=1$, $y+z=0$ und $x+z=a$ sowohl über $\mathbb{F}_2$ als auch über $\mathbb{R}$!

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} (a+1)x + 2y + 3az &= 6a && (1)\\ (2a+2)x - y - 4az &= -3a && (2)\\ (3a+3)x + 2y + 2az &= 9a && (3) \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$! *(aus der Modulklausur vom April 2004)*

c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems (aus der Scheinklausur 2002)

$$\begin{aligned} aw + x + 2y + z &= a+2 && (1)\\ -aw + x - 4y + z &= a-2 && (2)\\ -aw + 2x + (2a-1)y + 5z &= 2a+4 && (3)\\ -3aw - 5x + 2ay + az &= 4-3a && (4) \end{aligned}$$

d) *Richtig oder falsch:* Ist $n < m$ und hat $A \in k^{n\times m}$ den Rang n, so gibt es eine Matrix $B \in k^{m\times n}$ mit $AB = E$.

e) *Richtig oder falsch:* Ist $n < m$ und hat $A \in k^{n\times m}$ den Rang n, so gibt es eine Matrix $B \in k^{m\times n}$ mit $BA = E$.

f) Bestimmen Sie alle Matrizen X, für die gilt $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1 \end{pmatrix}$!

g) Berechnen Sie die inversen Matrizen zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 3 & \lambda & 2\\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$!

h) Für welche $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & a & b\\ 0 & c & d\\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ invertierbar?

i) Berechnen Sie in den invertierbaren Fällen die inverse Matrix A^{-1} !

j) *Richtig oder falsch:* Für alle $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a \end{pmatrix}$ invertierbar.

k) *Richtig oder falsch:* Für alle $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a \end{pmatrix}$ invertierbar.

l) *Zeigen Sie:* Falls für zwei invertierbare Matrizen $A, B \in k^{n\times n}$ gilt $AB + BA = 0$, so ist auch $A^{-1}B^{-1} + B^{-1}A^{-1} = 0$.