Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515
A5, Zimmer C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 25./26. Mai 2004

a) Der Untervektorraum U von $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ habe die Funktionen $\sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, \sin 3t$ und $\cos 3t$ als Basis. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $\varphi\colon U \to U;\ f \mapsto \frac{df}{dt}$!

b) V sei der Vektorraum aller reeller Polynome in x vom Grad höchstens vier. Bestimmen Sie bezüglich einer geeigneten Basis von V die Abbildungsmatrix von $\vartheta\colon \begin{cases} V \to V \\ f \mapsto x^2 f'' - 2f' - 3f \end{cases}$!

c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung $\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis aus den drei Einheitsvektoren!

d) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung

$$\omega\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \quad \text{bezüglich der Basis } \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ von } \mathbb{R}^2\ !$$

e) Berechnen Sie für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Produkte AB und BA!

f) Zeigen Sie: Für alle $a, b \in k$ ist $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

g) In der 10×10-Matrix A sei $a_{ij} = 1$ für $j = i - 1$ und Null sonst. Berechnen Sie A^{10} !

h) Was ist $e^{\pi i}$?

i) Was ist (näherungsweise) e^i ?

j) Finden Sie alle komplexen Zahlen z mit $z^3 = 1$!

k) Für alle $a \in k$ und $n \in \mathbb{Z}$ ist $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Für $n < 0$ soll dabei A^n die inverse Matrix von A^{-n} bezeichnen – falls diese existiert.

l) Zeigen Sie: Für jede natürliche Zahl n ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$.

m) Gilt diese Formel auch für $n = -1$?

n) Die $n \times n$-Matrix A habe nur Nullen und Einsen als Einträge. Finden Sie Schranken u_m und o_m, so daß für jeden Eintrag b der Matrix A^m gilt: $u_m \le b \le o_m$!

o) Welche der folgenden Matrizen sind invertierbar?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

p) Bestimmen Sie alle Lösungen des reellen linearen Gleichungssystems

$$x - y - z + u = 0, \quad x + y - z = 0, \quad 3x + 2y - z - u = 0 \quad \text{und} \quad 2x + 3y - 2u = 0\,!$$

Ist die Lösungsmenge ein Vektorraum?

q) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $2x - y + az = a,\quad 2ax + y - 2z = 0 \quad$ und $\quad 2x + ay - 2z = 0\,!$
Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Lösungsmenge ein Vektorraum?