Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 11./12. Mai 2004

a) Welche Dimension hat der Vektorraum aller reeller Polynome vom Grad höchstens n?

b) Welche Dimension hat der Untervektorraum $W = \{a\sin^2 t + b\cos^2 t + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

c) Ergänzen Sie die Menge $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^2$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^2$!

d) *Richtig oder falsch:* Sind U_1, U_2 Untervektorräume eines Vektorraums V, so gibt es Basen $\mathcal{B}_1$ von U_1 und $\mathcal{B}_2$ von U_2, so daß $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$ ist.

e) *Richtig oder falsch:* $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\7\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\11\\0\end{pmatrix}\right\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

f) *Richtig oder falsch:* Die Polynome $x^2, x^2 + x$ und $x^2 + x + 1$ bilden eine Basis des Vektorraums aller reeller Polynome vom Grad höchstens zwei.

g) Welche Dimension haben Kern und Bild der linearen Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2; \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x+y-z\\y+z-w\end{pmatrix}\ ?$$

h) Berechnen Sie die folgenden Summen in $\mathbb{F}_2^3$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{u}$$

i) Finden Sie einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{F}_2^3$ mit $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$!

j) Bestimmen Sie Kern und Bild der linearen Abbildung $\varphi\colon \left\{\begin{array}{c}\mathbb{F}_2^4 \to \mathbb{F}_2^2\\ \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}a+b\\c+d\end{pmatrix}\end{array}\right.$!

k) *Richtig oder falsch:* Die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ aus $\mathbb{F}_2^3$ sind linear unabhängig.

l) Stellen Sie den ggT von 2010 und 123 als Linearkombination dieser Zahlen dar!

m) Bestimmen Sie im Körper $\mathbb{F}_{1031}$ die multiplikativen Inversen von zwei, zehn und zwanzig!

n) Berechnen Sie den Bruch $\frac{3}{4}$ aus $\mathbb{F}_{17}$!

o) Finden Sie sämtliche ganzzahligen Lösungen der Gleichung $120x + 81y = 24$!

p) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß die lineare Gleichung $ax + by = c$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ganzzahlige Lösungen (x, y) hat!