WOLFGANG K. SEILER A5, ZIMMER C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 4./5. Mai 2004

$\varphi\colon V \to W$ sei eine lineare Abbildung und $\{\vec v_1, \dots, \vec v_n\}$ sei eine Teilmenge von V.

a) Richtig oder falsch: Ist $\{\vec v_1, \dots, \vec v_n\}$ linear unabhängig, so auch $\{\varphi(\vec v_1), \dots, \varphi(\vec v_n)\}$.

Lösung: *Falsch;* einfachstes Gegenbeispiel ist die Nullabbildung.

b) Richtig oder falsch: Ist $\{\varphi(\vec v_1), \dots, \varphi(\vec v_n)\}$ linear unabhängig, so auch $\{\vec v_1, \dots, \vec v_n\}$.

Lösung: *Richtig,* denn ist $\lambda_1\vec v_1 + \cdots + \lambda_n\vec v_n = \vec 0$, so ist wegen $\varphi(\vec 0) = \vec 0$ auch

$$\varphi(\lambda_1\vec v_1 + \cdots + \lambda_n\vec v_n) = \lambda_1\varphi(\vec v_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(\vec v_n) = \vec 0\,,$$

also müssen wegen der linearen Unabhängigkeit der Bildvektoren alle λ_i verschwinden.

c) Richtig oder falsch: Betrachtet man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum, ist die komplexe Konjugation eine lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Lösung: *Richtig,* denn für *reelle* Zahlen λ, μ und $z, w \in \mathbb{C}$ ist

$$\overline{\lambda z + \mu w} = \overline{\lambda z} + \overline{\mu w} = \overline{\lambda}\cdot\overline{z} + \overline{\mu}\cdot\overline{w} = \lambda\overline{z} + \mu\overline{w}\,.$$

d) Richtig oder falsch: Betrachtet man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum, ist die komplexe Konjugation eine lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Lösung: *Falsch;* beispielsweise ist für $\lambda = z = i$ zwar $\overline{\lambda z} = \overline{i^2} = -1$, aber $\overline{z} = i\cdot\overline{i} = +1$.

e) Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Bestimmen Sie ggf. Kern und Bild!

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\quad \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y\\ y+2z\\ z+2\end{pmatrix},\qquad \psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\quad \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y+3z\\ 2x+3y+4z\\ 3x+4y+5z\end{pmatrix},$$

$$\omega\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\quad \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y+z\\ xy+yz+xz\\ xyz\end{pmatrix}$$

Lösung: φ ist offensichtlich nicht linear, beispielsweise, weil der Nullvektor nicht auf den Nullvektor abgebildet wird, sondern auf einen Vektor mit dritter Komponente zwei.

ψ ist linear, denn für $\lambda, \mu \in k$ und $x, y, z, u, v, w \in \mathbb{R}$ ist

$$\psi\left(\lambda\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} u\\ v\\ w\end{pmatrix}\right) = \psi\left(\begin{pmatrix} \lambda x+\mu u\\ \lambda y+\mu v\\ \lambda z+\mu w\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (\lambda x+\mu u)+2(\lambda y+\mu v)+3(\lambda z+\mu w)\\ 2(\lambda x+\mu u)+3(\lambda y+\mu v)+4(\lambda z+\mu w)\\ 3(\lambda x+\mu u)+4(\lambda y+\mu v)+5(\lambda z+\mu w)\end{pmatrix},$$

und das ist dasselbe wie

$$\lambda\psi\left(\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\right) + \mu\psi\left(\begin{pmatrix} u\\ v\\ w\end{pmatrix}\right) = \lambda\begin{pmatrix} x+2y+3z\\ 2x+3y+4z\\ 3x+4y+5z\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} u+2v+3w\\ 2u+3v+4w\\ 3u+4v+5w\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda(x+2y+3z)+\mu(u+2v+3w)\\ \lambda(2x+3y+4z)+\mu(2u+3v+4w)\\ \lambda(3x+4y+5z)+\mu(3u+4v+5w)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda x+\mu u)+2(\lambda y+\mu v)+3(\lambda z+\mu w)\\ 2(\lambda x+\mu u)+3(\lambda y+\mu v)+4(\lambda z+\mu w)\\ 3(\lambda x+\mu u)+4(\lambda y+\mu v)+5(\lambda z+\mu w)\end{pmatrix}.$$

Der Vektor mit Komponenten x, y, z liegt genau dann im Kern, wenn seine Komponenten x, y, z die drei Gleichungen

$$x + 2y + 3z = 0, \quad 2x + 3y + 4z = 0 \quad \text{und} \quad 3x + 4y + 5z = 0$$

erfüllen. Wir werden bald allgemeine Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme kennenlernen; in diesem einfachen Fall führt aber jedes in der Schule behandelte elementare Verfahren leicht zu einer Lösung.

Beispielsweise sieht man sofort, daß die Differenz zwischen zweiter und erster wie auch dritter und zweiter Gleichung jeweils die Gleichung $x + y + z = 0$ ist; subtrahiert man diese von der ersten Gleichung, ergibt sich $y + 2z = 0$ oder $y = -2z$. Einsetzen in die Gleichung $x + y + z = 0$ zeigt dann, daß $x - 2z + z = 0$ oder $x = z$ sein muß. Für jede Lösung ist also $x = z$ und $y = -2z$; setzt man irgendein Tripel mit $x = z$ und $y = -2z$ in die drei ursprünglichen Gleichungen ein, sieht man, daß dieses auch umgekehrt stets eine Lösung ist. Also ist

$$\operatorname{Kern} \psi = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} .$$

Zur Bestimmung des Bilds kann man ebenfalls ausnutzen, daß die Differenz zwischen dritter und zweiter sowie zweiter und erster Komponente eines Vektors aus dem Bild gleich ist, d.h.

$$\operatorname{Bild} \psi \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \;\middle|\; w - v = v - u \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ 2v - u \end{pmatrix} \;\middle|\; u, v \in \mathbb{R} \right\} .$$

Um zu entscheiden, ob umgekehrt auch jeder Vektor aus der rechtsstehenden Menge im Bild liegt, können wir – da w dort nicht mehr vorkommt – beispielsweise nach einem Urbild mit dritter Komponente null suchen. Kurzes probieren zeigt, daß

$$\psi\left(\begin{pmatrix} 2v - 3u \\ 2u - v \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} (2v - 3u) + 2(2u - v) \\ 2(2v - 3u) + 3(2u - v) \\ 3(2v - 3u) + 4(2u - v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 2v - u \end{pmatrix}$$

ist, das Bild ist also *gleich* der oben rechts stehenden Menge. (Wir werden bald Verfahren kennenlernen, mit denen man solche Probleme systematischer lösen kann.)

ω ist nicht linear, denn beispielsweise ist

$$\omega\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \omega\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} ,$$

aber

$$\omega\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \omega\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

f) Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von $V = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

$U_1 = \{f \in V \mid f(t) = f(-t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}$, $U_2 = \{f \in V \mid f(t) \neq -f(-t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}$,
$U_3 = \{f \in V \mid f(t) \leq f(t^2) \text{ für alle } t \in \mathbb{Z}\}$, $U_4 = \{f \in V \mid f(t) = f(t+1) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}$

Lösung: Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und f, g Elemente einer der vier betrachteten Mengen U_i. Wir müssen jeweils prüfen, ob auch $\lambda f + \mu g$ in U_i liegt und ob U_i überhaupt Elemente enthält. Nach Definition der Vektorraumstruktion von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist

$$(\lambda f + \mu g)(t) = \lambda f(t) + \mu g(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} .$$

Somit ist für $f, g \in U_1$

$$(\lambda f + \mu g)(-t) = \lambda f(-t) + \mu g(-t) = \lambda f(t) + \mu g(t) = (\lambda f + \mu g)(t) ,$$

d.h. U_1 ist Untervektorraum.

U_2 ist offensichtlich keiner, da die Nullfunktion nicht in U_2 liegt.

U_3 enthält die Nullfunktion, ist aber trotzdem kein Vektorraum, denn beispielsweise liegt die Funktion f mit $f(t) = t$ in U_3, da für *ganzzahlige* t stets $t^2 \geq t$ ist. Die Funktion $-f$ mit $(-f)(t) = -t$ dagegen liegt nicht in U_3, denn $(-f)(2) = -2 > -4 = (-f)(2^2)$.

Für f, g in U_4 gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$(\lambda f + \mu g)(t+1) = \lambda f(t+1) + \mu g(t+1) = \lambda f(t) + \mu g(t) = (\lambda f + \mu g)(t)\,,$$

$\lambda f + \mu g$ liegt also wieder in U_4. Offensichtlich ist U_4 nicht leer: Es enthält beispielsweise die Nullfunktion oder auch die Funktion $\sin \pi t$. Somit ist U_4 ein Untervektorraum.

g) Zeigen Sie, daß $\varphi\colon \begin{cases} \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f \mapsto f' \end{cases}$ eine lineare Abbildung ist, und bestimmen Sie Kern und Bild!

Lösung: Da die Ableitung einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion insbesondere stetig ist, definiert φ zunächst einmal überhaupt eine Abbildung von $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nach $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Mit der Linearität gibt es keine Probleme, da Differentiation eine lineare Operation ist:

$$(\lambda f + \mu g)'(t) = \lambda f'(t) + \mu g'(t)\,.$$

Im Kern liegen alle mindestens zweimal stetig differenzierbaren Funktionen, deren Ableitung die Nullfunktion ist, also genau die konstanten Funktionen. Im Bild liegen die sämtlichen Ableitungen von mindestens zweimal stetig differenzierbaren Funktionen; diese sind immer noch mindestens einmal stetig differenzierbar, und da die Stammfunktion jeder mindestens einmal stetig differenzierbaren Funktion mindestens zweimal stetig differenzierbar ist, sind das auch die sämtlichen Bilder. Also ist $\operatorname{Bild} \varphi = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

h) Zeigen Sie: $W = \left\{ a \sin^2 t + b \cos^2 t + c \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$!

Lösung: Klar, denn alle betrachteten Funktionen sind stetig und jede Linearkombination solcher Funktionen ist wieder von derselben Bauart:

$$\begin{aligned} &\lambda\bigl(a \sin^2 t + b \cos^2 t + c\bigr) + \mu\bigl(a' \sin^2 t + b' \cos^2 t + c'\bigr) \\ &= (\lambda a + \mu a') \sin^2 t + (\lambda b + \mu b') \cos^2 t + (\lambda c + \mu c')\,. \end{aligned}$$

i) Bestimmen Sie für diesen Vektorraum W den Kern und das Bild der linearen Abbildung

$$\varphi\colon W \to \mathbb{R}^3; \quad f \mapsto \begin{pmatrix} f(0) \\ f(\frac{\pi}{2}) \\ f(\pi) \end{pmatrix}\;!$$

Lösung: $\varphi(a \sin^2 t + b \cos^2 t + c) = \begin{pmatrix} a \sin^2 0 + b \cos^2 0 + c \\ a \sin^2 \frac{\pi}{2} + b \cos^2 \frac{\pi}{2} + c \\ a \sin^2 \pi + b \cos^2 \pi + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + c \\ a + c \\ b + c \end{pmatrix}$,

also besteht der Kern aus allen Funktionen mit $a = b = -c$, d.h. den Funktionen der Form

$$a \sin^2 t + a \cos^2 t - a = a(\sin^2 t + \cos^2 t - 1) \equiv 0\,.$$

Im Kern liegt daher nur die Nullfunktion; die Abbildung φ ist also injektiv.

Für jeden Vektor im Bild stimmen nach obiger Rechnung die erste und die dritte Komponente überein; umgekehrt läßt sich auch zu jedem Vektor mit gleicher erster und dritter Komponente ein Urbild finden, denn

$$\varphi(y \sin^2 t + x \cos^2 t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}\,.$$

j) Bestimmen Sie Kern und Bild der Abtastungsabbildung

$$\varphi\colon \begin{cases} \left\{a\sin t + b\sin 2t + c\sin 4t \;\middle|\; a,b,c\in\mathbb{R}\right\} \to \mathbb{R}^5 \\ \hfill f \mapsto \left(\left(f(0), f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(\pi), f\left(\frac{3\pi}{2}\right), f(2\pi)\right)\right. \end{cases} \quad !$$

Lösung: $\varphi(a\sin t + b\sin 2t + c\sin 4t) = \begin{pmatrix} a\sin 0 + b\sin 0 + c\sin 0 \\ a\sin\pi/2 + b\sin\pi + c\sin 2\pi \\ a\sin\pi + b\sin 2\pi + c\sin 4\pi \\ a\sin\frac{3\pi}{2} + b\sin 3\pi + c\sin 6\pi \\ a\sin 2\pi + b\sin 4\pi + c\sin 8\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$.

Der Kern von φ besteht daher genau aus den Funktionen der Form $b\sin 2t + c\sin 4t$ mit $b,c\in\mathbb{R}$, und

$$\operatorname{Bild}\varphi = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; a\in\mathbb{R}\right\}.$$

k) Welche der folgenden Mengen sind linear unabhängig?

$$M_1 = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^3, \qquad M_2 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^3,$$

$$M_3 = \left\{\sin t, t, t^2\right\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \qquad M_4 = \left\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\right\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),$$

$$M_5 = \left\{e^t, e^{t+1}, e^{t+2}\right\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \qquad M_6 = \left\{e^t, \sinh t, \cosh t\right\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

Lösung: Im Falle von M_1 steigt der Eintrag bei jedem der drei Vektoren von Komponente zu Komponente jeweils um eins an, daher ist

$$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Das erste Gleichheitszeichen führt zur nichttrivialen Darstellung des Nullvektors

$$2\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} = \vec{0},$$

die drei Vektoren sind also linear abhängig.

Im Fall von M_2 führt die Gleichung

$$\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda+\mu+\nu\\2\mu+2\nu\\3\nu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

(rückwärts) auf das lineare Gleichungssystem

$$3\nu = 0, \quad 2\mu + 2\nu = 0, \quad \lambda + \mu + \nu = 0,$$

das offensichtlich nur die triviale Lösung $\lambda = \mu = \nu = 0$ hat; M_2 ist also linear unabhängig.

Da der Sinus kein Polynom ist, vermutet man, daß auch M_3 linear unabhängig ist, d.h. aus

$$\lambda\sin t + \mu t + \nu t^2 = 0 \quad \text{für alle } t\in\mathbb{R}$$

sollte folgen, daß $\lambda = \mu = \nu = 0$ ist. Einsetzen von $t = \pi$ zeigt, daß für so eine Darstellung $\mu\pi + \nu\pi^2 = 0$ sein müßte, also $\mu = -\pi\nu$. Für $t = -\pi$ dagegen folgt $-\mu\pi + \nu\pi^2 = 0$ also

$\mu = \nu\pi$, und das kann nur für $\mu = \nu = 0$ beides gelten. Da der Sinus nicht identisch verschwindet, muß dann auch $\lambda = 0$ sein, die drei Funktionen sind also linear unabhängig.

Falls für Elemente $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ und alle $t \in \mathbb{R}$

$$\lambda e^t + \mu e^{2t} + \nu e^{3t} \equiv 0$$

ist, hat das kubische Polynom $\lambda X + \mu X^2 + \nu X^3$ unendlich viele Nullstellen, muß also das Nullpolynom sein. Daher ist auch M_4 linear unabhängig.

Nach der Fundamentalgleichung der Exponentialgleichung ist $e^{x+1} = ee^x$; daher zeigt bereits die Gleichung

$$e^{x+1} - ee^x \equiv 0$$

die lineare Abhängigkeit von M_5.

Die Definitionen $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ und $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ zeigen, daß

$$\sinh t + \cosh t = e^t, \quad \text{d.h.} \quad \sinh t + \cosh t - e^t \equiv 0\,.$$

Somit ist auch M_6 linear abhängig.

l) *Richtig oder falsch:* Ist M ein Erzeugendensystem des Vektorraums V und $N \subset V$ eine Teilmenge, für die $M \subset [N]$ ist, so ist auch N ein Erzeugendensystem von V.

Lösung: *Richtig,* denn jedes Element $\vec{v} \in V$ läßt sich als Linearkombination endlich vieler Elemente von $\vec{m}_i \in M$ darstellen, etwa als

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{m}_1 + \cdots + \lambda_r \vec{m}_r\,.$$

Die $\vec{m}_i$ wiederum liegen in $[N]$, lassen sich also als Linearkombinationen von Vektoren $\vec{n}_j$ schreiben. Da wir nur endlich viele $\vec{m}_i$ betrachten, können wir selbst im Falle einer unendlichen Menge N endlich viele $\vec{n}_j$ finden, so daß $\vec{m}_1$ bis $\vec{m}_r$ Linearkombinationen dieser Vektoren sind, etwa

$$\vec{m}_i = \mu_{i1}\vec{n}_1 + \cdots + \mu_{is}\vec{n}_s \quad \text{für } i = 1, \ldots, r\,.$$

Dann ist

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \vec{m}_i = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{s} \mu_{ij}\vec{n}_j \right) = \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mu_{ij} \right) \vec{n}_j$$

eine Darstellung von $\vec{v}$ als Linearkombination von Elementen aus N. Da $\vec{v} \in V$ beliebig war, folgt $[N] = V$.

m) *Richtig oder falsch:* Ist M ein Erzeugendensystem von V und $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, so ist $\varphi(M) = \bigl\{\varphi(\vec{v}) \bigm| \vec{v} \in M\bigr\}$ ein Erzeugendensystem von Bild φ.

Lösung: *Richtig,* denn zu jedem Vektor $\vec{w} \in \operatorname{Bild}\varphi$ gibt es ein Urbild $\vec{v} \in V$, das sich nach Voraussetzung als Linearkombination

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \cdots + \lambda_r \vec{b}_r$$

von Elementen aus M schreiben läßt. Dann ist aber

$$\vec{w} = \varphi(\vec{v}) = \varphi\bigl(\lambda_1 \vec{b}_1 + \cdots + \lambda_r \vec{b}_r\bigr) = \lambda_1 \varphi(\vec{b}_1) + \cdots + \lambda_r \varphi(\vec{b}_r)$$

Linearkombination von Elementen aus $\varphi(M)$.