WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515 A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 4./5. Mai 2004

$\varphi\colon V \to W$ sei eine lineare Abbildung und $\{\vec v_1, \dots, \vec v_n\}$ sei eine Teilmenge von V.

a) Richtig oder falsch: Ist $\{\vec v_1, \dots, \vec v_n\}$ linear unabhängig, so auch $\{\varphi(\vec v_1), \dots, \varphi(\vec v_n)\}$.

b) Richtig oder falsch: Ist $\{\varphi(\vec v_1), \dots, \varphi(\vec v_n)\}$ linear unabhängig, so auch $\{\vec v_1, \dots, \vec v_n\}$.

c) Richtig oder falsch: Betrachtet man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum, ist die komplexe Konjugation eine lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

d) Richtig oder falsch: Betrachtet man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum, ist die komplexe Konjugation eine lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

e) Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Bestimmen Sie ggf. Kern und Bild!

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\quad \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y\\ y+2z\\ z+2\end{pmatrix},\qquad \psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\quad \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y+3z\\ 2x+3y+4z\\ 3x+4y+5z\end{pmatrix},$$

$$\omega\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\quad \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y+z\\ xy+yz+xz\\ xyz\end{pmatrix}$$

f) Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von $V = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

$U_1 = \{f \in V \mid f(t) = f(-t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}$, $U_2 = \{f \in V \mid f(t) \neq -f(-t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}$,
$U_3 = \{f \in V \mid f(t) \le f(t^2) \text{ für alle } t \in \mathbb{Z}\}$, $U_4 = \{f \in V \mid f(t) = f(t+1) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}$

g) Zeigen Sie, daß $\varphi\colon \begin{cases} \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f \mapsto f' \end{cases}$ eine lineare Abbildung ist, und bestimmen Sie Kern und Bild!

h) Zeigen Sie: $W = \{a\sin^2 t + b\cos^2 t + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$!

i) Bestimmen Sie für diesen Vektorraum W den Kern und das Bild der linearen Abbildung

$$\varphi\colon W \to \mathbb{R}^3;\quad f \mapsto \begin{pmatrix} f(0)\\ f(\frac{\pi}{2})\\ f(\pi)\end{pmatrix}\ !$$

j) Bestimmen Sie Kern und Bild der Abtastungsabbildung

$$\varphi\colon \begin{cases} \{a\sin t + b\sin 2t + c\sin 4t \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^5 \\ f \mapsto \left((f(0), f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(\pi), f\left(\frac{3\pi}{2}\right), f(2\pi)\right) \end{cases}\ !$$

k) Welche der folgenden Mengen sind linear unabhängig?

$$M_1 = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^3,\qquad M_2 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^3,$$

$$M_3 = \{\sin t, t, t^2\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\qquad M_4 = \{e^t, e^{2t}, e^{3t}\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

$$M_5 = \{e^t, e^{t+1}, e^{t+2}\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\qquad M_6 = \{e^t, \sinh t, \cosh t\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

l) Richtig oder falsch: Ist M ein Erzeugendensystem des Vektorraums V und $N \subset V$ eine Teilmenge, für die $M \subset [N]$ ist, so ist auch N ein Erzeugendensystem von V.

m) Richtig oder falsch: Ist M ein Erzeugendensystem von V und $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, so ist $\varphi(M) = \{\varphi(\vec v) \mid \vec v \in M\}$ ein Erzeugendensystem von Bild φ.