

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 27./28. April 2004

a) Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = i(1-i), \quad z_2 = (3+i)(3-i), \quad z_3 = (i+1)(i-1), \quad z_4 = i^{2004}, \quad z_5 = \frac{5+2i}{2+3i}, \quad z_6 = \frac{4+i}{2-i}$$

b) Berechnen Sie für $z = \sqrt{3} + i$ die Potenzen $z^2, z^3, z^4, z^{16}, z^{256}$ und z^{2004} sowie den Betrag!

c) Finden Sie eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $z^3 = -1$!

d) Finden Sie eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $z^3 = 1$!

e) Zeigen Sie: Für eine komplexe Zahl vom Betrag eins ist $\frac{1}{z} = \bar{z}$!

f) *Richtig oder falsch:* Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ ist $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$.

g) *Richtig oder falsch:* Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ ist $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.

h) Bestimmen Sie für $f(z) = \sum_{k=0}^n z^k$ Realteil und Imaginärteil von $f(ix)$ für $x \in \mathbb{R}$!

i) Welche der folgenden Mengen sind, mit der üblichen Addition und Multiplikation komplexer Zahlen bzw. reeller Funktionen, Körper?

$$k_1 = \mathbb{N}_0, \quad k_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad k_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, \quad k_4 = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \text{ für alle } x\},$$

$$k_5 = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, \quad k_6 = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, \quad k_7 = \{a + b\sqrt[3]{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

j) *Richtig oder falsch:* Ist k ein Körper, so wird auch $k \times k$ mit der Addition $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$ und der Multiplikation $(x, y)(u, v) = (xu, yv)$ zum Körper.

k) Bestimmen Sie den Wert des Polynoms $f(x) = x^{10} + x^5 + x^3 + 1$ für alle $x \in \mathbb{F}_2$!

l) Was ändert sich, wenn in der Definition von f eines der Pluszeichen durch ein Minuszeichen ersetzt wird?

m) Welche der folgenden Mengen sind \mathbb{R} -Vektorräume?

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}, \quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+1 \\ x+2 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\},$$

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}, \quad V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0 \right\},$$

$$V_5 = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'(2) = 0\}, \quad V_6 = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'(2) = 2\}$$

($\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist die Menge aller stetig differenzierbarer Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} .)

n) Bestimmen Sie alle Elemente der folgenden Mengen und geben Sie an, welche dieser Mengen ein \mathbb{F}_2 -Vektorraum ist!

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{F}_2 \right\}, \quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{F}_2, \quad x(y+z) = 0 \right\},$$

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ xy \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{F}_2 \right\}, \quad V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{F}_2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0 \right\}$$

o) *Richtig oder falsch:* Ist k ein Körper und V ein k -Vektorraum, so wird auch $V \times V$ zu einem k -Vektorraum mit Vektoraddition $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{w}, \vec{z}) = (\vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{z})$ und Skalarmultiplikation $\lambda(\vec{u}, \vec{v}) = (\lambda\vec{u}, \lambda\vec{v})$.