Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

16. Juli 2004

13. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Wie sieht die Funktion $f(x, y, z) = \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ in Kugelkoordinaten aus?
Lösung: Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\vartheta \\ y &= r\sin\varphi\sin\vartheta \\ z &= r\cos\vartheta \end{aligned}$$

folgt sofort

$$F(r,\varphi,\vartheta) = \frac{r\cos\varphi\sin\vartheta + r\sin\varphi\sin\vartheta}{r^2} = \frac{(\cos\varphi+\sin\varphi)\sin\vartheta}{r}\,.$$

2) Richtig oder falsch: Falls die stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ im abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ keine negativen Werte annimmt, ist $\int\limits_a^b f(x)\,dx \ge 0$.
Lösung: *Richtig,* denn da $f(x) \ge 0$ für alle x, ist nach der Monotonieregel

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \ge \int\limits_a^b 0\,dx = 0\,.$$

3) Richtig oder falsch: $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{2} - \frac{-1}{-1} = -\frac{3}{2}$.
Lösung: *Falsch,* z.B. aufgrund der vorigen Frage. *(Die übliche Formel mit der Stammfunktion ist nicht anwendbar, da sowohl der Integrand als auch die Stammfunktion im Nullpunkt, einem Punkt im Integrationsintervall, nicht definiert sind. Tatsächlich divergiert dieses Integral.)*

4) Richtig oder falsch: Die Funktionen $g(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi$ und $h(x) = \int_a^x f(\xi+1)\,d\xi$ unterscheiden sich nur durch eine Konstante.
Lösung: *Falsch,* schon für die einfache Funktion $f(x) = x$ unterscheiden sich $g(x) = \frac{1}{2}(x^2-a^2)$ und $h(x) = \frac{1}{2}(x^2-a^2) + (x-a)$ um eine nichtkonstante Funktion.

5) Richtig oder falsch: Für die stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ für alle $a > 0$. Dann ist f eine ungerade Funktion.
Lösung: *Richtig,* denn die Funktion

$$F(x) = \int\limits_0^x \big(f(\xi)+f(-\xi)\big)\,d\xi = \int\limits_0^x f(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^x f(-\xi)\,d\xi = \int\limits_0^x f(\xi)\,d\xi + \int\limits_{-x}^0 f(\xi)\,d\xi = \int\limits_{-x}^x f(\xi)\,d\xi$$

verschwindet identisch, also ist auch ihre Ableitung $F'(x) = f(x) + f(-x) = 0$.

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Extrema der Funktion $f(x,y) = xy$ auf der Kreisline $x^2+y^2 = 1$, indem Sie das Problem in Polarkoordinaten formulieren und dann die entstehende Extremwertaufgabe lösen.

Lösung: Mit $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ ist die Funktion $F(r,\varphi) = r^2\cos\varphi\sin\varphi$ unter der Nebenbedingung $r = 1$ zu optimieren. Gesucht sind also die Extrema von $g(\varphi) = \cos\varphi\sin\varphi$. Wegen $g'(\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 1-2\sin^2\varphi$ liegen diese bei jenen Winkeln φ, für die $\sin\varphi = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ ist, d.h. bei den ungeradzahligen Vielfachen von 45° im Winkelmaß oder $\frac{\pi}{4}$ im Bogenmaß. An diesen Stellen ist auch $\cos\varphi = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, so daß $g(\varphi) = \pm\frac{1}{2}$ ist, wobei das positive Vorzeichen im ersten und dritten Quadranten angenommen wird, also für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und $\varphi = \frac{5\pi}{4}$, und das negative für $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ und $\varphi = \frac{9\pi}{4}$.

Auf das ursprüngliche Problem bezogen, wird also das Maximum $\frac{1}{2}$ in den beiden Punkten $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ und $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ angenommen, das Minimum $-\frac{1}{2}$ in $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ und $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

b) In Polarkoordinaten ausgedrückt ist das Potential eines statischen Dipols, eingeschränkt auf eine Ebene, $U(r,\varphi) = \dfrac{p\cos\varphi}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Berechnen Sie die Divergenz von $E = -\operatorname{grad} U$!

Lösung: $\operatorname{div} E = -\operatorname{div}\operatorname{grad} U = -\Delta U$ läßt sich durch Anwendung des LAPLACE-Operators auf U berechnen; von letzterem wissen wir, daß er in Polarkoordinaten die Form

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = F_{rr} + \frac{F_r}{r} + \frac{F_{\varphi\varphi}}{r},$$

hat. Also ist $\Delta U = U_{rr} + \dfrac{U_r}{r} + \dfrac{U_{\varphi\varphi}}{r^2} = \dfrac{2p\cos\varphi}{4\pi\varepsilon_0 r^3} - \dfrac{p\cos\varphi}{4\pi\varepsilon_0 r^3} - \dfrac{p\cos\varphi}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = 0$ und damit auch $\operatorname{div} E = 0$. (Dipolfelder sind quellenfrei.)

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Eine Schablone zum Zeichnen der Parabel $y = x^2$ habe eine Länge (= maximaler y-Wert) von 12 cm. Welche Fläche hat sie?

Lösung: Die Fläche unter der Parabel $y = x^2$ zwischen $x = -\sqrt{12}$ und $x = \sqrt{12}$ ist

$$\int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-\sqrt{12}}^{-\sqrt{12}} = \sqrt{12}\left(\frac{12}{3} - \frac{-12}{3}\right) = 8\sqrt{12} = 16\sqrt{3}\,.$$

Zusammen mit der gesuchten Fläche der Schablone ist dies die Fläche des Rechtecks mit Ecken $(\pm\sqrt{12}, 0)$ und $(\pm\sqrt{12}, 12)$, das einen Inhalt von $2\cdot\sqrt{12}\cdot 12 = 48\sqrt{3}$ hat. Die Fläche der Schablone ist also $(48-16)\sqrt{3} = 32\sqrt{3}$.

b) Beweisen Sie die KEPLERsche Faßregel: Für $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ ist die Fläche zwischen der Kurve $y = f(x)$ und der x-Achse zwischen den Koordinatenwerten $x = a$ und $x = b$ gleich $\frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2)$ mit $y_0 = f(a)$, $y_1 = f(\frac{a+b}{2})$ und $y_2 = f(b)$.

Lösung: Da Integration eine lineare Operation ist, reicht es, dies für die vier Funktionen $1, x, x^2$ und x^3 nachzurechnen:

$$\int_a^b 1\,dx = b-a, \quad \frac{b-a}{6}\cdot(1+4+1) = b-a$$

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}, \quad \frac{b-a}{6}\cdot\left(a + \frac{4}{2}(a+b) + b\right) = \frac{(b-a)(3a+3b)}{6} = \frac{b^2-a^2}{2}$$

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3}, \quad \frac{b-a}{6}\cdot\left(a^2 + \frac{4}{4}(a+b)^2 + b^2\right) = \frac{(b-a)(2a^2+2ab+2b^2)}{6} = \frac{b^3-a^3}{3}$$

$$\int_a^b x^3\,dx = \frac{b^4-a^4}{4}, \quad \frac{b-a}{6}\cdot\left(a^3+\frac{4}{8}(a+b)^3+b^3\right) = \frac{(b-a)\cdot\frac{3}{2}(a^3+a^2b+ab^2+b^3)}{6} = \frac{b^4-a^4}{4}$$

In allen vier Fällen stimmen die Ergebnisse also überein, und damit gilt die Regel wegen der Linearität der Integration für jedes Polynom vom Grad höchstens drei.

c) Gelegentlich wird diese Regel auch für beliebige Funktionen zur näherungsweisen Berechnung des Integrals eingesetzt. Schätzen Sie nach dieser Formel die Fläche unter der Sinuslinie zwischen 0 und π, und vergleichen Sie mit dem korrekten Ergebnis!

Lösung: Da $\sin 0 = \sin\pi = 0$ und $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ ist, ergbit die KEPLERsche Faßregel den Schätzwert

$$\frac{\pi}{6}\cdot 4\sin\frac{\pi}{2} = \frac{2}{3}\pi \approx 2{,}094395103\,.$$

Der korrekte Wert ist $\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos\pi+\cos 0 = 2$, der Fehler liegt also bei unter fünf Prozent.

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2(x^2+1)(x-1)}$, und geben Sie eine Stammfunktion von f an!

Lösung: Nach der allgemeinen Theorie gibt es eine Darstellung der Form

$$f(x) = \frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{cx+d}{x^2+1}+\frac{e}{x-1}\,.$$

Bringt man dies auf den Hauptnenner, folgt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{ax(x^2+1)(x-1)+b(x^2+1)(x-1)+cx^3(x-1)+dx^2(x-1)+ex^2(x^2+1)}{x^2(x^2+1)(x-1)} \\ &= \frac{(a+c+e)x^4+(-a+b-c+d)x^3+(a-b-d+e)x^2+(-a+b)x-b}{x^2(x^2+1)(x-1)} \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a+c+e&=0\\ -a+b-c+d&=0\\ a-b-d+e&=0\\ -a+b&=1\\ -b&=1 \end{aligned}$$

Somit ist nach den letzten beiden Gleichungen $b=-1$ und $a=-2$. Dies in die zweite und dritte Gleichung eingesetzt führt auf

$$c-d=-d+e=1, \quad \text{d.h.} \quad c=e=1+d\,.$$

Dies in die erste Gleichung eingesetzt führt auf $c=e=1$ und damit $d=0$.

Die Lösung ist somit $a=-2$, $b=-1$, $c=e=1$ und $d=0$, d.h.

$$f(x) = -\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x-1}\,.$$

Der einzige Summand, bei dem die Stammfunktion nicht offensichtlich ist, ist der vorletzte; da hier aber der Zähler gerade die halbe Ableitung des Nenner ist, läßt sich auch diese Funktion als logarithmische Ableitung leicht integrieren. Also ist

$$\int f(x)\,dx = -2\ln|x|+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+\ln|x-1|+C\,.$$