

16. Juli 2004

13. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) Wie sieht die Funktion $f(x, y, z) = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ in Kugelkoordinaten aus?
- 2) *Richtig oder falsch:* Falls die stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ keine negativen Werte annimmt, ist $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.
- 3) *Richtig oder falsch:* $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{2} - \frac{-1}{-1} = -\frac{3}{2}$.
- 4) *Richtig oder falsch:* Die Funktionen $g(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi$ und $h(x) = \int_a^x f(\xi + 1) d\xi$ unterscheiden sich nur durch eine Konstante.
- 5) *Richtig oder falsch:* Für die stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ für alle $a > 0$. Dann ist f eine ungerade Funktion.

Aufgabe 1: (5 Punkte)

- a) Berechnen Sie die Extrema der Funktion $f(x, y) = xy$ auf der Kreislinie $x^2 + y^2 = 1$, indem Sie das Problem in Polarkoordinaten formulieren und dann die entstehende Extremwertaufgabe lösen.
- b) In Polarkoordinaten ausgedrückt ist das Potential eines statischen Dipols, eingeschränkt auf eine Ebene, $U(r, \varphi) = \frac{p \cos \varphi}{4\pi\epsilon_0 r}$. Berechnen Sie die Divergenz von $E = -\text{grad } U$!

Aufgabe 2: (5 Punkte)

- a) Eine Schablone zum Zeichnen der Parabel $y = x^2$ habe eine Länge (= maximaler y -Wert) von 12 cm. Welche Fläche hat sie?
- b) Beweisen Sie die KEPLERSche Faßregel: Für $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ ist die Fläche zwischen der Kurve $y = f(x)$ und der x -Achse zwischen den Koordinatenwerten $x = a$ und $x = b$ gleich $\frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2)$ mit $y_0 = f(a)$, $y_1 = f(\frac{a+b}{2})$ und $y_2 = f(b)$.
- c) Gelegentlich wird diese Regel auch für beliebige Funktionen zur näherungsweise Berechnung des Integrals eingesetzt. Schätzen Sie nach dieser Formel die Fläche unter der Sinuslinie zwischen 0 und π , und vergleichen Sie mit dem korrekten Ergebnis!

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von $f(x) = \frac{x + 1}{x^2(x^2 + 1)(x - 1)}$, und geben Sie eine Stammfunktion von f an!