WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

21. Mai 2003

5. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) $\mathbb{C}$ werde aufgefaßt als $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basisvektoren $1, i$. Welche Abbildungsmatrix hat die komplexe Konjugation $z \mapsto \overline{z}$?

2) Finden Sie eine komplexe Zahl z mit $z^3 = -1$!

3) *Richtig oder falsch:* Für $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

4) *Richtig oder falsch:* Für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei A^2 die Nullmatrix. Dann ist auch A gleich der Nullmatrix.

5) *Richtig oder falsch:* Für jede Matrix $A \in \mathbb{F}_2^{2\times 2}$ ist $A^2 = A$.

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B_n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2+n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

a) Für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ ist $B_n \cdot B_m = B_{n+m}$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $A^n = B_n$.

c) A ist invertierbar und $A^{-1} = B_{-1}$.

d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $A^{-n} \underset{\text{def}}{=} \left(A^{-1}\right)^n = B_{-n}$.

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

In einem Netzwerk aus n Rechnern gebe es zwischen gewissen Rechnern direkte (bidirektionale) Verbindungen; die Matrix A sei so definiert, daß $a_{ik} = a_{ki} = 1$ ist, wenn dies für die Rechner i und k der Fall ist, und $a_{ik} = a_{ki} = 0$ sonst. Die Diagonalelemente a_{ii} werden alle auf Eins gesetzt. Zeigen Sie:

a) Alle Einträge b_{ik} der Matrix $B = A^2$ sind ganze Zahlen mit $0 \le b_{ik} \le n$.

b) Für zwei nicht miteinander verbundene Rechner i und k gibt es b_{ik} Möglichkeiten, via nur einen Zwischenknoten zu kommunizieren.

c) Genau dann kann jeder Rechner mit jedem anderen kommunizieren, wenn die Matrix A^{n-1} keinen Eintrag Null enthält.

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

V sei der Untervektorraum von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit Basis $\{e^{-2t}, e^{-t}, 1, e^t, e^{2t}\}$.

a) Bestimmen Sie bezüglich dieser Basis die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung

$$\varphi: V \to V; \quad f \mapsto \frac{d^2 f}{dt^2}\,!$$

b) Bestimmen Sie Basen von Kern und Bild von φ!

c) Zeigen Sie: Jedes Element $f \in V$ läßt sich auf genau eine Weise schreiben als $f = g + h$ mit $g \in \operatorname{Kern}\varphi$ und $h \in \operatorname{Bild}\varphi$!

Abgabe bis zum Freitag, dem 28. Mai 2004, um 12.00 Uhr