WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

30. April 2004

2. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ \binom{x}{y} \mapsto \binom{x+y}{xy}$ ist linear.
2) *Richtig oder falsch:* Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ ;\ \binom{x}{y} \mapsto x+y+1$ ist linear.
3) *Richtig oder falsch:* Die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2^2;\ \binom{x}{y} \mapsto \binom{y}{x}$ ist linear.
4) *Richtig oder falsch:* Der Durchschnitt zweier Untervektorräume eines Vektorraums V ist wieder ein Untervektorraum.
5) *Richtig oder falsch:* Die Vereinigung zweier Untervektorräume eines Vektorraums V ist wieder ein Untervektorraum.

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Die Abbildung $\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x+2y-z \\ 2x+3y-z \end{pmatrix} \end{cases}$ ist linear.

b) Bestimmen Sie den Kern von φ!

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: $V = \{a\sin t + b\cos t \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

b) Die Abbildung $\varphi\colon \begin{cases} V \to V \\ f \mapsto \dfrac{df}{dt} \end{cases}$ ist linear.

c) Bestimmen Sie Kern und Bild der Abtastungsabbildung

$$\varphi\colon \begin{cases} V \to \mathbb{R}^6 \\ f \mapsto \big(f(0), f(\pi), f(2\pi), f(3\pi), f(4\pi), f(5\pi)\big) \end{cases} \quad !$$

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß die beiden Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind!

b) Finden Sie drei Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$, so daß $[\vec{u}, \vec{v}] = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, ax+by+cz = 0 \right\}$ für $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aus *a)*!

c) Zeigen Sie: Für jeden Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit $ap+bq+cr \neq 0$ ist $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \mathbb{R}^3$!

Abgabe bis zum Freitag, dem 7. Mai 2003, um 12.00 Uhr