Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 A5, C201

23. April 2004

1. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $|z| = |\overline{z}|$.

2) Richtig oder falsch: Für $x, y \in \mathbb{F}_2$ gilt die „binomische Formel“

$$(x+y)^2 = (x-y)^2 = (x+y)(x-y) = x+y\,.$$

3) Richtig oder falsch: Jeder Körper enthält mindestens zwei Elemente.

4) Richtig oder falsch: Jeder Vektorraum enthält mindestens zwei Elemente.

5) Richtig oder falsch: $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum bezüglich der üblichen reellen Addition und der Skalarmultiplikation $0 \cdot x = 0$ und $1 \cdot x = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 1: (*6 Punkte)*

a) Berechnen Sie $z_1 = (3+4i)(4+3i)$, $\quad z_2 = \dfrac{3+4i}{4+3i}$, $\quad z_3 = \dfrac{(1+i)^{2004}}{2^{1000}}$ und $z_4 = \sqrt{i}$!

b) Zeigen Sie: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $(a, b) \neq (0,0)$ ist $\left|\dfrac{a+ib}{a-ib}\right| = 1$!

Aufgabe 2: (*4 Punkte)*

Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ sei $E_n(z)$ das Taylor-Polynom vom Grad n der Exponentialfunktion, $C_n(z)$ das des Kosinus und $S_n(z)$ das des Sinus, d.h.

$$E_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}, \qquad C_n(z) = \sum_{\ell=0}^{[n/2]} (-1)^\ell \frac{z^{2\ell}}{(2\ell)!} \quad \text{und} \quad S_n(z) = \sum_{\ell=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^\ell \frac{z^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!}\,.$$

Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $E_n(ix) = C_n(x) + iS_n(x)$.

Aufgabe 3: (*5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Die reellen Polynome (in einer Veränderlichen) vom Grad höchstens vier bilden einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

b) Für welche $a_0 \in \mathbb{R}$ bilden auch die Polynome vom Grad höchstens vier mit konstantem Koeffizienten a_0 einen Vektorraum?

c) Ist auch die Menge aller reeller Polynome vom Grad genau vier ein $\mathbb{R}$-Vektorraum?

d) Ist auch die Menge *aller* reeller Polynome in einer Veränderlichen ein $\mathbb{R}$-Vektorraum?

Abgabe bis zum Freitag, dem 30. April 2004, um 12.00 Uhr