Wolfgang K. Seiler

Höhere Mathematik II

Vorlesung an der Universität Mannheim
im Wintersemester 2001/2002

Dieses Skriptum entsteht parallel zur Vorlesung und soll mit möglichst geringer Verzögerung verteilt werden. Es ist in seiner Qualität auf keinen Fall mit einem Lehrbuch zu vergleichen; insbesondere sind Fehler bei dieser Entstehensweise nicht nur möglich, sondern **sicher**. Dabei handelt es sich sicherlich nicht immer nur um harmlose Tippfehler, sondern auch um Fehler bei den mathematischen Aussagen.

Das Skriptum sollte daher mit Sorgfalt und einem gewissen Mißtrauen gegen seinen Inhalt gelesen werden; falls Sie Fehler finden, teilen Sie mir dies bitte persönlich oder per e-mail (seiler@math.uni-mannheim.de) mit, oder informieren Sie Ihren Tutor. Auch wenn Sie Teile des Skriptums unverständlich finden, bin ich für entsprechende Hinweise dankbar.

Falls genügend viele Hinweise eingehen, werde ich von Zeit zu Zeit Berichtigungen und Verbesserungen ausgeben.

KAPITEL III: HARMONISCHE ANALYSE UND INTEGRALTRANSFORMATIONEN 1

§1: Reelle FOURIER-Reihen 2

a) Die schwingende Saite 2

b) Die Differentialgleichung der schwingenden Saite 5

c) Ein Skalarprodukt für periodische Funktionen 9

d) Komplexe Darstellung trigonometrischer Funktionen 13

e) Die Orthogonalitätsrelationen für trigonometrische Funktionen 17

f) Harmonische Analyse trigonometrischer Polynome 20

g) Die reelle FOURIER-Reihe einer periodischen Funktion 22

§2: Erste Beispiele von FOURIER-Reihen 23

a) Rechenregeln 23

b) Periodische Rechteckimpulse 25

c) Sägezahnimpulse 28

d) Konvergenz der berechneten Reihen 29

e) Das GIBBS-Phänomen 36

§3: Komplexe FOURIER-Reihen und Hermitesche Vektorräume 41

a) Komplexe Form der FOURIER-Reihen 42

b) Die Stammfunktion der komplexen Exponentialfunktion 44

c) Ein erstes Beispiel 46

d) HERMITEsche Vektorräume 51

e) Die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung 55

f) Orthonormalbasen HERMITEscher Vektorräume 56

g) Komplexe trigonometrische Polynome 61

h) Das HERMITEsche Produkt auf $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und die BESSELsche Ungleichung 64

i) Harmonische Analyse als lineare Abbildung 67

§4: Konvergenz von FOURIER-Reihen 69

a) Faltungen 69

b) Die FOURIER-Reihe einer Faltung 71

c) Faltung mit einem Sägezahn 74

d) FOURIER-Reihen stetiger stückweise differenzierbarer Funktionen 76

e) Der Eindeutigkeitssatz 77

f) Der Satz von PARSEVAL 87

g) HILBERT-Räume 91

h) Die POISSON-Formel 96

§5: Die FOURIER-Transformation 98

a) FOURIER-Reihen und FOURIER-Integrale 98

b) Der Satz von FUBINI 104

c) FOURIER-Integrale und Ableitungen 107

d) Die Umkehrung der FOURIER-Transformation 112

e) Die FOURIER-Transformation eines Rechteckimpulses 117

§6: FOURIER-Transformationen von Distributionen 123
a) Distributionen auf dem SCHWARTZ-Raum 123
b) Die FOURIER-Transformierte einer Distribution 132
c) Funktionen und ihre Distributionen 136
d) Ableitungen von Distributionen 139
e) Weitere Eigenschaften der FOURIER-Transformation 143
f) Die PLANCHEREL-Formel 147
g) Mehrdimensionale Faltungen und FOURIER-Integrale 160
h) FRAUNHOFER-Beugung 163
h) Der Abtastsatz von NYQUIST 173
§7: Die LAPLACE-Transformation 177
a) Definition und erste Eigenschaften 178
b) Rechenregeln und Beispiele zur LAPLACE-Transformation 180
KAPITEL IV: DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 184
§1: Anfangswertprobleme und ihre Lösung via LAPLACE-Transformation 184
a) Ein einfaches Beispiel 184
b) Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme ... 187
c) Anwendung der LAPLACE-Transformation 189
d) Systeme linearer Differentialgleichungen 201
e) Die Matrixexponentialfunktion 207
f) Berechnung der Matrixexponentialfunktion 214
§2: Eigenwerte, Eigenvektoren und Hauptvektoren 215
a) Eigenwerte und Eigenvektoren 215
b) Ein erstes Beispiel 218
c) Das charakteristische Polynom und seine Nullstellen 224
d) Vielfachheiten von Eigenwerten 232
e) Eigenwerte symmetrischer und HERMITEscher Matrizen 237
f) Hauptvektoren und und die JORDAN-Zerlegung 243
g) Ein Beispiel 255
h) Ergänzung: Die JORDAN-Normalform 258
§3: Anwendung auf lineare Differentialgleichungen 265
a) Systeme homogener linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten 265
b) Langzeitverhalten der Lösung 266
c) Lineare homogene Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten 271
d) Inhomogene Differentialgleichungen 280
e) Symmetriebetrachtungen 283
§4: Nichtlineare Differentialgleichungen 294
a) Eindeutigkeitsfragen 295
b) Der Satz von PICARD und LINDELÖF 298
c) Eindeutigkeitsprobleme für Systeme 308

d) Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen 310

e) Exakte Differentialgleichungen und integrierende Faktoren ... 318

f) Qualitative Theorie 327

g) Stabilitätsfragen 337

KAPITEL V: OPTIMIERUNG, FEHLERRECHNUNG UND STATISTIK 351

§1: Extrema von Funktionen mehrerer Veränderlicher 351

a) Der eindimensionale Fall 351

b) Verallgemeinerung aufs Mehrdimensionale 352

§2: Maxima und Minima unter Nebenbedingungen 356

§3: Numerische Verfahren 369

a) Die Gradientenmethode 369

b) Der METROPOLIS-Algorithmus 374

c) Zusammenfassung 379

§4: Grundzüge der Fehler- und Ausgleichsrechnung 380

a) Das LAPLACEsche Fehlermodell 380

b) Statistische Kenngrößen 386

c) Das Fehlerfortpflanzungsgesetz 388

d) Die Standardabweichung des Mittelwerts und Schätzung der Varianz 390

e) Die Methode der kleinsten Quadrate 392

§5: Die GAUSSsche Normalverteilung und die Maximum Likelihood Methode 404

a) Der Grenzfall des LAPLACEschen Fehlermodells 404

b) Die EULERsche Summenformel 407

c) Die STIRLINGsche Formel und die Normalverteilung 410

d) Eigenschaften der Normalverteilung 413

e) Die Maximum Likelihood Methode 418

§6: Kompression von Bild- und Audiodaten 421

a) Datenkompression 421

b) Kovarianzen und Korrelationen bei der Europawahl 1999 424

c) Zufallsvariablen und ihre statistischen Kenngrößen 427

d) Beispiele aus der Bildverarbeitung 429

e) Kovarianz und Korrelation von Zufallsvariablen 430

f) Modellierung von Bild- und Audiodaten durch Zufallsvariable 435

g) Komprimierung durch Dekorrelation 437

h) Die diskrete Cosinus-Transformation 440

Kapitel 3
Harmonische Analyse und Integraltransformationen

Niemand kann den Klang einer Geige mit dem einer Flöte verwechseln, auch wenn beide Instrumente dieselbe Melodie spielen. Zumindest ein wesentlicher Grund dafür dürfte wohl allen bekannt sein: Verschiedene Musikinstrumente produzieren zum selben Grundton verschiedene Obertöne. Anhand der Verhältnisse zwischen den Stärken dieser Obertöne (und auch deren zeitlicher Variation) identifiziert unser Ohr die uns vertrauten Instrumente – auch wenn uns diese Verhältnisse quantitativ nicht bewußt sind.

Um einen Ton zu synthetisieren, muß man also die Amplitudenverteilung seiner Oberschwingungen in ihrem zeitlichen Verlauf kennen; erst dann kann man ihn als Überlagerung (elektrisch leicht erzeugbarer) reiner Schwingungen realisieren.

Da Musik in einem Studiengang *Technische Informatik* keine sonderlich zentrale Rolle spielt, werden wir uns hier nur mit einer vereinfachten Version des Problems beschäftigen: Wir ignorieren die Zeitabhängigkeit der Amplitude, betrachten also nur Töne, bei denen die Amplituden der Grundschwingung und der sämtlichen Oberschwingungen zeitlich konstant sind.

In der Musik läßt sich mit so erzeugten Tönen nur wenig anfangen: Selbst wenn man exakt die Amplitudenverhältnisse eines Musikinstruments kopiert, klingt das Ergebnis ziemlich „elektronisch“. Will man aber mehrere Nachrichten gleichzeitig über dieselbe Leitung übertragen, so können reine Schwingungen einer festen Amplitude sehr nützlich

sein als Trägerfrequenzen – sofern der Empfänger in der Lage ist, das empfangene Signal wieder seine Einzelfrequenzen zu zerlegen. Damit steht er vor genau demselben Problem, das auch bei der Zerlegung eines Klangs in Grund- und Oberschwingungen auftritt.

Schließlich hängt auch das Verhalten fast aller Schaltkreise sowie die Leitung eines Signals durch ein Kupfer- oder Glasfaserkabel stark von der Frequenz ab; will man für ein gegebenes Signal ausrechnen, wie es sich verhält, wird es in den meisten Fällen notwendig sein, es zunächst in reine Schwingungen zu zerlegen.

In diesem Kapitel geht es um die Mathematik hinter solchen Zerlegungen; wie sich zeigen wird, beschränkt deren Nützlichkeit sich aber bei weitem nicht auf die bislang angesprochenen Probleme.

§ 1: Reelle Fourier-Reihen

Wir beginnen mit einem einfachen und anschaulichen Beispiel für den Aufbau einer komplizierten Funktion aus reinen Schwingungen; Ziel des Paragraphen wird dann sein, eine *beliebige* periodische Funktion möglichst exakt als Überlagerung solcher Schwingungen darzustellen.

a) Die schwingende Saite

Ein Ton werde erzeugt durch eine schwingende Saite. Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, daß diese ausschließlich senkrecht zu ihrer Ruhelage schwingt und daß ihre Schwingung auf eine feste Ebene begrenzt ist; die Physiker bezeichnen dies als transversale linear polarisierte Schwingung. Zumindest in erster Näherung kann man einige Musikinstrumente so beschreiben.

Der Zustand der Saite zu einem *festen Zeitpunkt* wird beschrieben durch eine Funktion der Längenkoordinate, die wir wie üblich mit x bezeichnen wollen. Der Wert dieser Funktion an jeder Stelle x ist aber, da die Saite schwingt, auch eine Funktion der Zeit. Wir haben also insgesamt eine Funktion $f(x, t)$ sowohl der Längenkoordinate als auch der Zeit, die angibt, wie weit der Punkt mit Längenkoordinate x zum Zeitpunkt t von seiner Ruhelage entfernt ist. Falls wir annehmen, daß die Schwingung in

der (x, y)-Ebene stattfindet, ist $f(x, t)$ also die y-Koordinate des Punktes mit Längenkoordinate x zum Zeitpunkt t. Da wir nur transversale linear polarisierte Schwingungen betrachten, hat dieser Punkt die Koordinaten

$$\big(x, f(x, t)\big) \ ;$$

falls wir auch longitudinale Schwingungen zugelassen hätten, würde auch die x-Koordinate von der Zeit abhängen, und falls wir uns nicht auf linear polarisierte Schwingungen festgelegt hätten, gäbe es noch eine z-Koordinate.

Die Saite ist an beiden Enden fest eingespannt; wir wählen die Koordinaten auf der x-Achse so, daß diese Enden den Werten $x = 0$ und $x = L$ entsprechen, wobei $L \in \mathbb{R}$ die Länge der Saite bezeichnet. Da die Enden nicht schwingen können, muß notwendigerweise

$$f(0, t) = 0 \quad \text{und} \quad f(L, t) = 0$$

sein; nur für $0 < x < L$ kann $f(x, t)$ wirklich von t abhängen.

Wie könnte f aussehen? In ihrer Ruhelage ist die Saite eine Strecke; die einfachste Form einer Schwingung könnte darin bestehen, daß diese Strecke durch einen Teil einer Sinuslinie ersetzt wird. Da die Funktion an den Stellen 0 und L verschwinden muß und der Sinus bei allen ganzzahligen Vielfachen von π verschwindet, kommen daher Funktionen der Art

$$f(x, t) = A(t) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}\, x\right)$$

in Frage, wobei $A(t)$ irgendeine Funktion der Zeit ist und k eine natürliche Zahl. Abbildung eins zeigt die entsprechenden Funktionen für $k = 1$ bis 4 und $A(t) \equiv 1$.

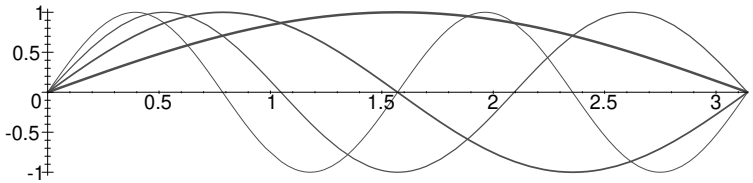


Abb. 1: Eine Schwingung mit Oberschwingungen

Bei einem realen Musikinstrument werden diese Oberschwingungen nicht alle dieselbe Amplitude haben; aus Kapitel I, §1*f)* etwa ist das Beispiel der g-Saite einer Geige bekannt, das hier noch einmal in Abbildung zwei dargestellt ist: Die gestrichelte Kurve ist die Grundschwingung mit Amplitude eins, die fett eingezeichnete Kurve die Gesamtschwingung, und die sonstigen Kurven sind die reinen Teilschwingungen mit ihren jeweiligen Amplituden. (Wer selbst solche Kurven zeichnen und auch die dazugehörigen Töne hören möchte, findet ein Java-Applet unter `http://www.gac.edu/~huber/fourier/`)

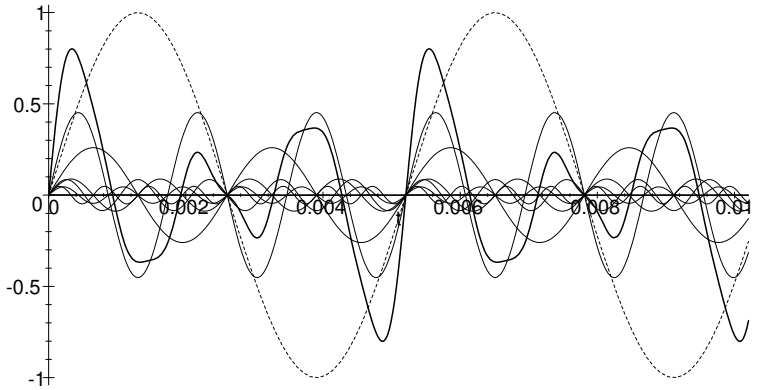


Abb. 2: Ton der g-Saite einer Geige und seine Komponenten

Offensichtlich spielt die Grundschwingung kaum eine Rolle: Wie man sowohl hier als auch genauer an der Darstellung der Größenverhältnisse der Koeffizienten in Abbildung drei sieht, sind die Schwingungen mit doppelter und dreifacher Grundfrequenz am stärksten ausgeprägt, d.h. also die Oktave und vor allem die darüberliegende Quinte.

Über die zeitabhängige Auslenkungsfunktion $A(t)$ wurde bislang noch nichts gesagt; da wir periodische Schwingungen erwarten, liegt es nahe, auch hier einen Ansatz mit trigonometrischen Funktionen zu machen. Wenn wir die Zeitachse so festlegen, daß sich die Saite zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhelage befindet, ist der Sinus die geeignete Funktion; wir

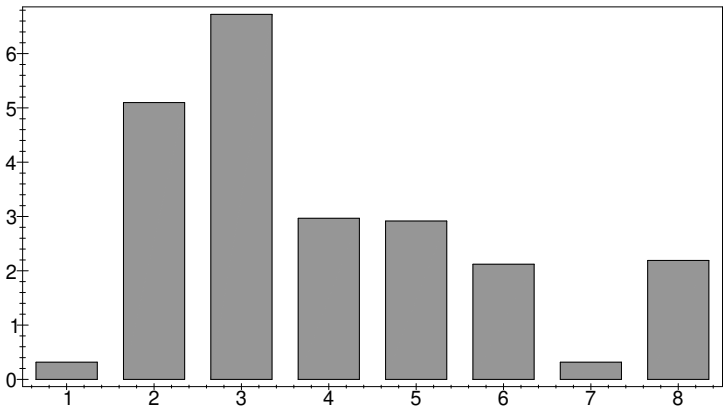


Abb. 3: Koeffizienten von Grund- und Oberschwingungen

versuchen es daher für eine reine Schwingung mit einem Ansatz der Form

$$A(t) = a \cdot \sin \omega t \,,$$

wobei a und ω reelle Konstanten sind, von denen wir zumindest ω als positiv voraussetzen können. Insgesamt erwarten wir somit im einfachsten Fall Funktionen der Form

$$f(x,t) = a \cdot \sin \omega t \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}\, x\right) \,.$$

ω und k hängen natürlich voneinander ab: Wie jedermann aus Physik- und Musikunterricht weiß, führt ein doppelt so großer Wert von k zu einer doppelt so hohen Kreisfrequenz ω.

b) Die Differentialgleichung der schwingenden Saite

Wer sich allerdings kurz überlegt, *warum* dem so ist, wird wohl in den meisten Fällen nur auf den „Grund“ kommen, daß dies eben allgemein bekannt sei. Tatsächlich stecken dahinter einige nicht ganz triviale Überlegungen, die man für die Zwecke dieser Vorlesung zwar nicht unbedingt kennen muß, die aber für etwaige Interessenten trotzdem im Kleindruck beigefügt sind:

Da wir alles so einfach wie möglich halten wollen, gehen wir aus von einer Saite mit konstantem Querschnitt und konstanter Massendichte; letztere können wir dann beschreiben durch die Masse pro Längeneinheit, die für konkrete Saiten gemessen wird in Gramm pro Zentimeter oder Milligramm pro Zentimeter. Wir bezeichnen diese (lineare) Massendichte mit σ.

Die zweite wesentliche physikalische Größe für eine schwingende Saite ist deren *Spannung*. Auch hier beschränken wir uns wieder auf das einfachste physikalische Modell, in dem das HOOKEsche Gesetz gilt: Wir betrachten die Saite als eine elastische Feder, die eine natürliche Länge L_0 hat. Da sie aber in ein Musikinstrument eingespannt ist, wurde sie auf eine Länge $L > L_0$ gedehnt; nach dem HOOKEschen Gesetz wirkt somit eine Rückstellkraft $\lambda L/L_0$, die proportional ist zur Überdehnung L/L_0 mit der Federkonstanten λ als Proportionalitätsfaktor.

In der Ruhelage ist diese Rückstellkraft bedeutungslos: Da die Saite an beiden Enden fest eingespannt ist, kann sie ihre Länge nicht verringern. Anders wird es, wenn die Saite aus der Ruhelage entfernt wird: Dann hat die Federkraft in allen Punkten, an denen die (Tangente der) Saite nicht parallel zur x-Achse ist, auch eine Kraftkomponente in y-Richtung.

Die Lage der ausgelenkten Saite zu einem festen Zeitpunkt t wird beschrieben durch die Funktion

$$g(x) = f(x,t) \,,$$

die die y-Koordinate des Punkts x angibt.

Betrachten wir das Saitenstück zwischen $x = x_1$ und $x = x_2$. Im Punkt x_1 habe die Tangente den Winkel α gegenüber der Horizontalen, im Punkt x_2 sei dieser Winkel β. Falls x_1 und x_2 einigermaßen nahe beieinander liegen, können wir die Saite zwischen x_1 und x_2 in erster Näherung als eine Gerade betrachten. Diese Gerade sei um den Winkel γ gegenüber der Horizontalen geneigt; dann hat das Stück zwischen $x = x_1$ und $x = x_2$ die Länge

$$\frac{x_2 - x_1}{\cos\gamma} \,,$$

denn der Cosinus eines Winkels im rechtwinkligen Dreieck ist gleich Ankathete durch Hypothenuse. Gegenüber ihrer Ruhelage ist die ausgelenkte Saite daher noch um einen weiteren (lokalen) Faktor $1/\cos\gamma$ gestreckt.

Die Rückstellkraft *in Richtung der ausgelenkten Saite* ist daher gleich

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos\gamma} \,,$$

und die Komponente in y-Richtung ist im Punkt x_1 gleich

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos\gamma} \cdot \sin\alpha$$

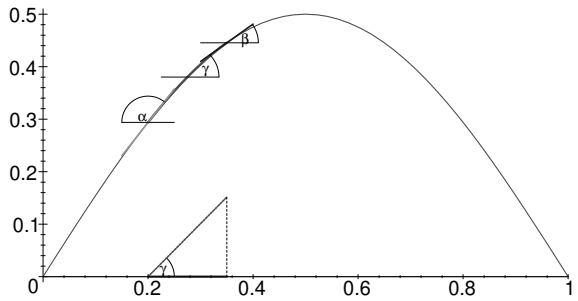


Abb. 4: Eine ausgelenkte Saite

und im Punkt x_2 entsprechend gleich

$$-\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos\gamma} \cdot \sin\beta \,.$$

Da α und β bei gängigen Musikinstrumenten ziemlich klein sind, machen wir kein großen Fehler, wenn wir die Näherungsformeln

$$\sin x \approx x \approx \tan x$$

für im Bogenmaß gemessene Winkel x benutzen; demnach können wir also den Sinus in obigen Formeln ohne großen Genauigkeitsverlust durch einen Tangens ersetzen.

Der Tangens des Steigungswinkels der Tangenten des Graphs einer Funktion $y = g(x)$ gegenüber der Horizontalen ist gleich der Ableitung $g'(x)$, die Rückstellkräfte im Anfangs- und im Endpunkt des betrachteten Kurvenstücks sind also näherungsweise gleich

$$-\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos\gamma} \cdot g'(x_1) \quad \text{und} \quad \lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos\gamma} \cdot g'(x_2) \,.$$

Bei einem hinreichen kleinen Saitenstück ist die resultierende Rückstellkraft gleich der Summe dieser beiden Komponenten, also

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos\gamma} \cdot g'(x_2) - \lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos\gamma} \cdot g'(x_1) = \lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos\gamma} \cdot \Big(g'(x_2) - g'(x_1)\Big) \,.$$

Da wir von sehr kleinen Winkeln γ ausgehen, liegt $\cos\gamma$ sehr nahe bei eins und kann, da wir hier ohnehin nur näherungsweise argumentieren, gleich eins gesetzt werden; die Rückstellkraft ist also näherungsweise gleich

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \Big(g'(x_2) - g'(x_1)\Big) \,.$$

Diese Kraft bedingt nach dem zweiten NEWTONschen Gesetz eine Bewegung der Massenpunkte auf der Saite. Ein solcher Massenpunkt mit x-Koordinate x_0 hat eine zeitabhängige Auslenkung

$$h(t) = f(x_0, t) \,,$$

und für die Kraft, die dies bewirkt, gilt nach dem zweiten NEWTONschen Gesetz

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung} \,.$$

Bei einem hinreichend kleinen Saitenstück können wir die Masse näherungsweise gleich der Masse,

$$m = \sigma \cdot (x_2 - x_1)$$

des gesamten Stück setzen. Die Beschleunigung ist gleich der zweiten Ableitung $\ddot{h}(t)$ der Auslenkung, also gilt insgesamt

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \Big(g'(x_2) - g'(x_1)\Big) = \sigma \cdot (x_2 - x_1) \cdot \ddot{h}(t)$$

oder

$$\frac{g'(x_2) - g'(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\sigma L_0}{\lambda L} \ddot{h}(t) \,.$$

Lassen wir nun x_2 und x_1 simultan gegen einen dazwischenliegenden Punkt x gehen, konvergiert die linke Seite gegen $g''(x)$, wir bekommen also die Gleichung

$$g''(x) = \frac{\sigma L_0}{\lambda L} \ddot{h}(t) \,.$$

Damit sind wir fast fertig; wir müssen uns nur noch klarmachen, daß die beiden Funktionen $g(x)$ und $h(t)$ spezielle Werte der Funktion $f(x,t)$ berechnen: Für einen oben festgehaltenen (aber nicht weiter spezifizierten) Zeitpunkt t ist $g(x) = f(x,t)$, und für einen ebenfalls festgehaltenen (aber nicht weiter spezifizierten) Punkt x auf der Saite ist $h(t) = f(x,t)$. Daher ist

$$g''(x) = f_{xx}(x,t) \quad \text{und} \quad \ddot{h}(t) = f_{tt}(x,t) \,,$$

und die Differentialgleichung der schwingenden Saite wird zu

$$f_{xx}(x,t) = \frac{\sigma L_0}{\lambda L} f_{tt}(x,t)$$

oder, wie man meist schreibt,

$$f_{tt}(x,t) = \frac{\lambda L}{\sigma L_0} f_{xx}(x,t) \,.$$

Da es uns auf exakte Zahlenwerte nicht ankommt, wählen wir noch eine Abkürzung für den Bruch; da er positiv ist, können wir ihn als Quadrat schreiben und definieren

$$c^2 \underset{\text{def}}{=} \frac{\lambda L}{\sigma L_0} \,.$$

Mit dieser neuen Bezeichnung wird die Differentialgleichung der schwingenden Saite zu

$$f_{tt}(x,t) = c^2 f_{xx}(x,t) \,.$$

Sie allein legt $f(x,t)$ bei weitem noch nicht eindeutig fest: Sind φ und ψ *irgendwelche* zweifach stetig differenzierbare Funktionen einer Veränderlichen, so überzeugt man sich leicht (Kettenregel), daß

$$f(x,t) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct)$$

eine Lösung dieser Gleichung ist, die sogenannte D'ALEMBERTsche Lösung. Sie zeigt, daß man die Konstante c interpretieren kann als Schallgeschwindigkeit *innerhalb der Saite;* die beiden Terme beschreiben Erregungen, die sich gegenläufig auf der Saite fortbewegen.

Wir waren oben ausgegangen von speziellen sinusförmigen Lösungen der Form

$$f(x,t) = A(t) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}\,x\right) = a \cdot \sin\omega t \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}\,x\right)$$

und müssen nun sehen, für welche Parameterwerte dies Lösungen sind.

Die partiellen Ableitungen von f sind

$$f_t(x,t) = a\omega \cdot \cos\omega t \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}\,x\right)$$

$$f_{tt}(x,t) = -a\omega^2 \cdot \sin\omega t \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}\,x\right) = -\omega^2 f(x,t)$$

$$f_x(x,t) = a \cdot \sin\omega t \cdot \left(\frac{k\pi}{L}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{L}\right)$$

$$f_{xx}(x,t) = -a \cdot \sin\omega t \cdot \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{k\pi}{L}\,x\right) = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 f(x,t)\,,$$

also ist

$$f_{tt}(x,t) = \left(\frac{k\pi}{\omega L}\right)^2 f_{xx}(x,t)\,.$$

Die Differentialgleichung ist somit genau dann erfüllt, wenn

$$c = \frac{k\pi}{\omega L} \quad \text{oder} \quad \omega = k \cdot \frac{\pi}{cL}\,.$$

Wie diese Rechnung zeigt, wächst zumindest für die hier betrachteten einfachen Schwingungen die Frequenz in der Tat linear mit k, die Frequenzen der Obertöne sind also ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz.

c) Ein Skalarprodukt für periodische Funktionen

Bevor wir eine beliebige periodische Funktion als Überlagerung reiner Schwingungen darstellen, wollen wir uns zunächst daran erinnern, wie wir im letzten Semester einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ als Linearkombination von n vorgegebenen Basisvektoren $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ dargestellt haben: Im allgemeinen mußten wir dazu ein lineares Gleichungssystem aus n Gleichungen in n Unbekannten lösen.

Falls $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ allerdings eine Orthogonalbasis ist, geht es auch einfacher: Wenn es dann eine Darstellung der Form

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{b}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{b}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\vec{b}_i$$

gibt (und da wir von einer Basis ausgegangen sind, wissen wir, daß es sie gibt), ist

$$\vec{v} \cdot \vec{b}_j = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\vec{b}_i\right) \cdot \vec{b}_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = \lambda_j\vec{b}_j \cdot \vec{b}_j\,,$$

denn bei einer Orthogonalbasis ist

$$\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = 0 \quad \text{falls } i \neq j\,.$$

Also ist hier einfach

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\vec{b}_i \quad \text{mit} \quad \lambda_i = \frac{\vec{v} \cdot \vec{b}_i}{\vec{b}_i \cdot \vec{b}_i}\,,$$

was insbesondere für große n erheblich schneller und angenehmer zu berechnen ist als die Lösung eines linearen Gleichungssystems.

Beispielsweise stehen die drei Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

aufeinander senkrecht; wenn wir den Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

daraus linear kombinieren möchten, berechnen wir

$$\lambda_1 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}, \qquad \lambda_2 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} = \frac{10}{5} = 2$$

und

$$\lambda_3 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_3}{\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_3} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}\,.$$

Also ist

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

Wir wollen versuchen, auf dem Vektorraum aller (in einem noch zu präzisierenden Sinne) nicht zu schlimmen periodischen Funktionen ein Skalarprodukt einzuführen. Wie so ein Skalarprodukt von Funktionen grundsätzlich aussehen könnte, wissen wir bereits aus dem letzten Semester: Dort hatten wir beispielsweise auf dem Vektorraum der stetigen Funktionen auf einem Intervall $[a, b]$ ein Skalarprodukt definiert durch

$$(f, g) = \int_a^b f(t) \cdot g(t)\, dt .$$

Unsere Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, allerdings hätte ein Integral über ganz $\mathbb{R}$ Konvergenzprobleme; wir beschränken uns daher auf die Integration über ein Periodenintervall.

Zunächst ist eine Klärung der Begriffe angebracht:

Definition: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt periodisch mit einer Periode $T > 0$, falls

$$f(t + T) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} .$$

Ist f periodisch mit Periode T, so ist f natürlich auch periodisch mit Periode $2T$, $3T$ *usw.;* falls es eine kleinste Periode $T > 0$ gibt, bezeichnen wir diese als *die* Periode von f.

Eine konstante Funktion ist offensichtlich periodisch zu jeder Periode $T > 0$; hier ist es nicht möglich von *der* Periode zu reden.

Als nächstes wollen wir einen Vektorraum periodischer Funktionen zur Periode T definieren. Natürlich betrachten wir nicht *alle* Funktionen mit Periode T, denn beliebige Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind vielzu allgemein um damit vernünftig rechnen zu können.

Eine in der Analysis weithin übliche Lösung dieses Problems besteht darin, daß man sich auf *stetige* Funktionen beschränkt. Das wiederum

ist allerdings für uns zu speziell: In der Informationstechnik sind periodische Rechteckimpulse von entscheidender Bedeutung, periodische Funktionen also, die zwischen zwei Werten wie null und eins oder plus und minus eins hin- und herspringen.

Diese Funktionen sind in ihren Sprungstellen offensichtlich unstetig, allerdings gibt es nur endlich viele Unstetigkeitsstellen pro Periode, und damit können wir leben. Wir definieren daher

Definition: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *stückweise stetig,* wenn es nur isolierte Punkte gibt, in denen f nicht stetig ist und wenn auch für diese Punkte die links- und rechtsseitigen Limites von $f(t)$ existieren.

Isoliert bedeutet dabei, daß diese Unstetigkeitsstellen keinen Häufungspunkt haben dürfen; bei einer periodischen Funktion heißt das konkret, daß es im Intervall $[0, T]$ höchstens endlich viele Punkte

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{r-1} < t_r = T$$

gibt, so daß f in jedem der offenen Intervalle (t_j, t_{j+1}) stetig ist; an den Punkten t_j *kann* f eine Sprungstelle haben, für die allerdings der links- und der rechtsseitige Grenzwert existieren müssen.

Wir betrachten nun den Vektorraum

$$\mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \underset{\text{def}}{=} \left\{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ ist stückweise stetig und} \\ f(t + T) = f(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

und definieren dort ein Produkt durch die Vorschrift

$$(f, g) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) g(t)\, dt .$$

Es erfüllt fast alle Forderungen an ein Skalarprodukt; lediglich mit der positiven Definitheit gibt es Probleme: Zwar ist (f, f) stets nichtnegativ, da wir über eine nichtnegative Funktion integrieren, aber aus dem Verschwinden von (f, f) läßt sich bei einer nur stückweise stetigen Funktion nicht auf das Verschwinden von f schließen: Auch für eine Funktion f, die fast überall verschwindet, in einem einzigen Punkt pro Periode aber von null verschieden ist, verschwindet offensichtlich das Integral (f, f), obwohl f nicht die Nullfunktion ist.

Dieses Problem wird sich im folgenden als nicht sonderlich gravierend erweisen, und für den Augenblick zumindest ist es viel wichtiger, daß wir mit diesem Skalarprodukt rechnen können, daß wir also beispielsweise für $T = 2\pi$ das Produkt

$$(\sin 17t,\ \sin 43t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin 17t\ \sin 43t\, dt$$

wirklich ausrechnen können.

d) Komplexe Darstellung trigonometrischer Funktionen

Die erste Schwierigkeit bei der Berechnung eines solchen Integrals besteht darin, daß wir mit dem Integranden in dieser Form nur wenig anfangen können: Wir kennen zwar

$$\int_0^{2\pi} \sin 17t\, dt \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \sin 43t\, dt\,,$$

denn da das Integral einer reinen Schwingung über eine ganzzahlige Anzahl von Perioden stets verschwindet, ist beides gleich null. Wir wissen aber nicht, ob und gegebenenfalls wie wir ein Produkt zweier Schwingungen auf eine Summe reiner Schwingungen zurückführen können.

Wer eine Formelsammlung aufschlägt, findet dort eine Fülle von Formeln für trigonometrische Funktionen von Summen, mehrfachen Argumenten und so weiter, die sich leider größtenteils nur schwer merken lassen: Schon die Formel

$$\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$$

ist deutlich schwieriger als etwa die Formel

$$e^{3t} = \left(e^t\right)^3\,,$$

wobei letztere auch dann noch einfach bleibt, wenn die Drei beispielsweise durch eine Zehn ersetzt wird – sehr im Gegensatz zu

$$\cos 10t = 512\cos^{10} t - 1280\cos^8 t + 1120\cos^6 t - 400\cos^4 t + 50\cos^2 - 1\,.$$

Wir wollen in diesem Abschnitt sehen, wie man so komplizierte Formeln wie diese aus so einfachen Formeln wie $e^{10t} = \left(e^t\right)^{10}$ herleiten kann, falls man einen kleinen Umweg über die komplexen Zahlen geht.

Erinnern wir uns zunächst an die Multiplikation komplexer Zahlen: In kartesischen Koordinaten ist

$$(x+iy)(u+iv) = (xu - yv) + i(xv + yu)\,,$$

aber wir bekommen eine besser verständliche Formel, wenn wir in *Polarkoordinaten* rechnen: Diese legen einen Punkt z fest durch seinen Abstand r vom Nullpunkt und den Winkel φ, den der Strahl von Null nach z mit der reellen Achse bildet. Wir messen diesen Winkel im *Bogenmaß,* seine Größe ist also gleich der Länge des Kreisbogens auf dem Kreis mit Radius eins, den der Winkel ausschneidet. Das Vorzeichen wird so gewählt, daß die Richtung von der positiven reellen zur positiven imaginären Achse positiv, die Gegenrichtung negativ angegeben wird.

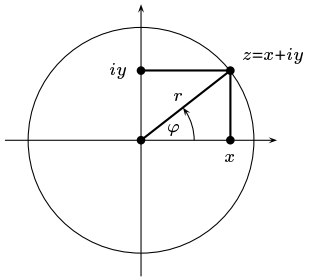


Abb. 5: Polarkoordinaten in der GAUSSschen Zahlenebene

In einem rechtwinkligen Dreieck ist der Sinus eines der beiden spitzen Winkel gleich dem Verhältnis der Gegenkathete zur Hypothenuse und der Cosinus das der Ankathete zur Hypothenuse. Somit ist hier für $r \neq 0$, d.h. für $z \neq 0$,

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}$$

oder

$$x = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r\sin\varphi\,,$$

und nach PYTHAGORAS ist $x^2 + y^2 = r^2$.

Damit ist r gleich dem *Betrag* der komplexen Zahl z; den Winkel φ bezeichnen wir als Argument. Er ist für $z = 0$ nicht definiert und für alle anderen komplexen Zahlen modulo 2π eindeutig bestimmt.

Berechnen wir nun das Produkt zweier komplexer Zahlen z und w mit Polarkoordinatendarstellung (r, φ) und (s, ψ)! In kartesischer Darstellung ist

$$z = r\cos\varphi + i\,r\sin\varphi \quad \text{und} \quad w = s\cos\psi + i\,s\sin\psi\,,$$

also ist nach obiger Formel

$$\begin{aligned} z \cdot w = {} & \big(r\cos\varphi \cdot s\cos\psi - r\sin\varphi \cdot s\sin\psi\big) \\ & + i\big(r\cos\varphi \cdot s\sin\psi \;+\; r\sin\varphi \cdot s\cos\psi\big) \\ = {} & rs \cdot \Big(\big(\cos\varphi\cdot\cos\psi - \sin\varphi\cdot\sin\psi\big) \\ & \qquad + i\big(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\big)\Big) \\ = {} & rs \cdot \Big(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\Big)\,. \end{aligned}$$

Bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen multiplizieren sich also die Beträge, während sich die Argumente addieren.

Damit verhalten sich komplexe Zahlen vom Betrag eins wie Potenzen: Definieren wir für jeden Winkel φ eine komplexe Zahl

$$e_\varphi \underset{\text{def}}{=} \cos\varphi + i\sin\varphi\,,$$

so ist für zwei Winkel φ und ψ

$$e_{\varphi+\psi} = e_\varphi \cdot e_\psi\,.$$

Dies entspricht der Rechenregel

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

für den Umgang mit Potenzen. Daher *definieren* wir dies formal als eine komplexe Potenz

$$e^{i\varphi} \underset{\text{def}}{=} \cos\varphi + i\sin\varphi$$

und merken uns die fundamentale Rechenregel

$$e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}\,.$$

Die Schreibweise $e^{i\varphi}$ erinnert an die wohlbekannte Exponentialfunktion, und in der Tat läßt sich diese auch analytisch so für komplexe Zahlen definieren, daß für rein imaginäre Exponenten die obige Formel gilt: Wir *definieren* e^z für beliebige komplexe Zahlen z durch die TAYLOR-Reihe

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}\,.$$

Da diese Reihe im Reellen absolut konvergent ist, gibt es auch für komplexe Argumente keine Konvergenzprobleme, und speziell für $x = i\varphi$ mit einer reellen Zahl φ erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k\varphi^k}{k!} = {} & \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{i^k\varphi^k}{k!} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{i^k\varphi^k}{k!} \\ = {} & \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{i^{2\ell}}{(2\ell)!} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{i^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} + i\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} \\ = {} & \cos\varphi + i\sin\varphi\,. \end{aligned}$$

Auch über die TAYLOR-Reihe der Exponentialfunktion kommen wir also zum gleichen Ausdruck für $e^{i\varphi}$.

Die Formel

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

heißt EULERsche Formel nach dem Schweizer Mathematiker LEONHARD EULER, der sie als erster aufgestellt hat. Ersetzt man φ durch $-\varphi$, wird sie zu

$$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi\,,$$

und addiert *bzw.* subtrahiert man dies von der ursprünglichen Formel, so ergeben sich die beiden Beziehungen

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\,,$$

die ebenfalls auf EULER zurückgehen.

LEONHARD EULER (1707–1783) wurde in Basel geboren und ging auch dort zur Schule und, im Alter von 14 Jahren, zur Universität. Dort legte er zwei Jahre später die Magisterprüfung in Philosophie ab und begann mit dem Studium der Theologie; daneben hatte er sich seit Beginn seines Studium unter Anleitung von JOHANN BERNOULLI mit Mathematik beschäftigt. 1726 beendete er sein Studium in Basel und bekam eine Stelle an der Petersburger Akademie der Wissenschaften, die er 1727 antrat. Auf Einladung FRIEDRICHS DES GROSSEN wechselte er 1741 an die preußische Akademie der Wissenschaften; nachdem sich das Verhältnis zwischen den beiden dramatisch verschlechtert hatte, kehrte er 1766 nach St. Petersburg zurück. Im gleichen Jahr erblindete er vollständig; trotzdem schrieb er rund die Hälfte seiner zahlreichen Arbeiten (73 Bände) danach. Sie enthalten bedeutende Beiträge zu vielen Gebieten der Mathematik, Physik, Astronomie und Kartographie.

Mit den EULERschen Formeln lassen sich viele Identitäten für trigonometrische Funktionen leicht ausrechnen, z.B.

$$\sin^2\varphi = \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2i\varphi} - 2 + e^{-2i\varphi}}{-4} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\varphi}{2}$$

oder

$$\cos^3\varphi = \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}\right)^3 = \frac{e^{3i\varphi} + 3e^{i\varphi} + 3e^{-i\varphi} + e^{-3i\varphi}}{8}$$
$$= \frac{\cos 3\varphi + 3\cos\varphi}{4}\,.$$

e) Die Orthogonalitätsrelationen für trigonometrische Funktionen

Wir interessieren uns für Skalarprodukte trigonometrischer Funktionen, also für Integrale über Produkte aus zwei trigonometrischen Funktionen. Diese könnten wir (umständlich) mittels partieller Integration berechnen, mit den EULERschen Formeln aber können wir den Integranden so umformen, daß die gesamte Integration trivial wird:

Für zwei ganze Zahlen k und ℓ ist

$$\cos k\varphi \cdot \cos \ell\varphi = \left(\frac{e^{ik\varphi} + e^{-ik\varphi}}{2}\right)\left(\frac{e^{i\ell\varphi} + e^{-i\ell\varphi}}{2}\right)$$
$$= \frac{e^{i(k+\ell)\varphi} + e^{i(k-\ell)\varphi} + e^{i(-k+\ell)\varphi} + e^{-i(k+\ell)\varphi}}{4}$$
$$= \frac{e^{i(k+\ell)\varphi} + e^{-i(k+\ell)\varphi}}{4} + \frac{e^{i(k-\ell)\varphi} + e^{-i(k-\ell)\varphi}}{4}$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\cos(k+\ell)\varphi + \cos(k-\ell)\varphi\Big)\,,$$

$$\sin k\varphi \cdot \sin \ell\varphi = \left(\frac{e^{ik\varphi} - e^{-ik\varphi}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i\ell\varphi} - e^{-i\ell\varphi}}{2i}\right)$$
$$= \frac{e^{i(k+\ell)\varphi} - e^{i(k-\ell)\varphi} - e^{i(-k+\ell)\varphi} + e^{-i(k+\ell)\varphi}}{-4}$$
$$= -\frac{e^{i(k+\ell)\varphi} + e^{-i(k+\ell)\varphi}}{4} + \frac{e^{i(k-\ell)\varphi} + e^{-i(k-\ell)\varphi}}{4}$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\cos(k-\ell)\varphi - \cos(k+\ell)\varphi\Big) \qquad \text{und}$$

$$\cos k\varphi \cdot \sin \ell\varphi = \left(\frac{e^{ik\varphi} + e^{-ik\varphi}}{2}\right)\left(\frac{e^{i\ell\varphi} - e^{-i\ell\varphi}}{2i}\right)$$
$$= \frac{e^{i(k+\ell)\varphi} - e^{i(k-\ell)\varphi} + e^{i(-k+\ell)\varphi} - e^{-i(k+\ell)\varphi}}{4i}$$
$$= \frac{e^{i(k+\ell)\varphi} - e^{-i(k+\ell)\varphi}}{4i} - \frac{e^{i(k-\ell)\varphi} + e^{-i(k-\ell)\varphi}}{4i}$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\sin(k+\ell)\varphi + \sin(k-\ell)\varphi\Big)\,.$$

Setzen wir jetzt noch

$$\varphi = \omega t \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

für eine vorgegebene Periode $T > 0$, so erhalten wir die leicht allgemeineren Formeln

$$\cos k\varphi \cdot \cos \ell\omega t = \frac{1}{2}\Big(\cos(k+\ell)\omega t + \cos(k-\ell)\omega t\Big)\,,$$
$$\sin k\omega t \cdot \sin \ell\omega t = \frac{1}{2}\Big(\cos(k-\ell)\omega t - \cos(k+\ell)\omega t\Big) \qquad \text{und}$$
$$\cos k\omega t \cdot \sin \ell\omega t = \frac{1}{2}\Big(\sin(k+\ell)\omega t + \sin(k-\ell)\omega t\Big)\,.$$

Jetzt, nachdem diese Formeln dastehen, lassen sie sich auch leicht rein reell beweisen durch Anwendung der Additionsformeln auf die rechte Seite, und das ist ein typisches Phänomen bei trigonometrischen Funktionen: Über die komplexe Darstellung erhält man keine neuen Ergebnisse, aber man erhält die Ergebnisse oft einfacher als mit rein reeller Rechnung – insbesondere, wenn man noch keine Vermutungen über die Gestalt des Ergebnisses hat. Mit hinreichend viel Erfahrung im Umgang mit trigonometrischen Funktionen hätte man den obigen Produkten freilich sofort angesehen, daß sie etwas mit $\sin(k\pm\ell)\omega t$ und $\cos(k\pm\ell)\omega t$ zu tun haben müssen und hätte sich die Formeln auch ohne den Umweg über das Komplexe herleiten können.

Mit diesen Formeln haben die Integrale über Produkte trigonometrischer Funktionen ihren Schrecken verloren: Da wir über ganze Perioden integrieren, müssen wir eigentlich nicht einmal die Stammfunktionen von Sinus und Cosinus kennen, sondern nur wissen, daß das Integral über eine ganzzahlige Anzahl von Perioden für eine Sinus- oder Cosinusschwingung verschwindet – mit der einen Ausnahme der Cosinus„schwingung“ mit Frequenz null, d.h. also der Konstanten eins: Für ganze Zahlen k, ℓ ist

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos k\omega t\,dt = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq 0 \\ 1 & \text{für } k = 0 \end{cases}$$

und

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sin \ell\omega t\,dt = 0\,.$$

Zusammen mit den obigen Formeln ergeben sich daraus sofort die Orthogonalitätsrelationen für trigonometrische Funktionen:

$$(\cos k\omega t, \cos \ell\omega t) = \frac{1}{T}\int_0^T \cos k\omega t \cos \ell\omega t\,dt = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \pm\ell \\ 1/2 & \text{für } k = \pm\ell \neq 0 \\ 1 & \text{für } k = \ell = 0\,, \end{cases}$$

$$(\sin k\omega t, \sin \ell\omega t) = \frac{1}{T}\int_0^T \sin k\omega t \sin \ell\omega t\,dt = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \pm\ell \\ 1/2 & \text{für } k = \pm\ell \neq 0 \\ 0 & \text{für } k = \ell = 0 \end{cases}$$

und

$$(\cos k\omega t, \sin \ell\omega t) = \frac{1}{T}\int_0^T \cos k\omega t \sin \ell\omega t\,dt = 0\,.$$

f) Harmonische Analyse trigonometrischer Polynome

In Abschnitt *c)* haben wir gesehen, wie man einen Vektor im $\mathbb{R}^n$ durch Skalarprodukte leicht als Linearkombination einer vorgegebenen Orthogonalbasis darstellen kann. Diese Vorgehensweise wollen wir nun imitieren für den Vektorraum aller Funktionen, die als Linearkombinationen reiner Schwingungen zu einer Grundfrequenz und deren Oberfrequenzen dargestellt werden können.

Da Linearkombinationen nach Definition immer endlich sind, sind diese Funktionen genau die sogenannten trigonometrischen Polynome:

Definition: Ein (reelles) trigonometrisches Polynom zur Periode $T > 0$ ist eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die sich mit geeigneten Zahlen $N, M \in \mathbb{N}$ als

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{M} b_\ell \sin \ell\omega t \\ &= \sum_{k=0}^{N} a_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{M} b_\ell \sin \ell\omega t \end{aligned}$$

schreiben läßt mit

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\,.$$

Die Rechnungen im letzten Abschnitt zeigen, daß die Funktionen

$$1, \quad \cos k\omega t, \quad \sin \ell\omega t \qquad \text{für } k, l \in \mathbb{N}$$

eine Orthogonalbasis dieses Vektorraums bilden mit

$$(1,\ 1) = 1 \quad \text{und} \quad (\cos k\omega t,\ \cos k\omega t) = (\sin \ell\omega t,\ \sin \ell\omega t) = \frac{1}{2}$$

für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$. Somit ist

$$(f, 1) = a_0\,(1, 1) + \sum_{k=1}^{N} a_k\,(\cos k\omega t, 1) + \sum_{\ell=1}^{M} b_\ell\,(\sin \ell\omega t, 1) = a_0\,,$$

d.h.

$$a_0 = \frac{(f, 1)}{(1, 1)} = (f, 1) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt\,.$$

Für $k > 0$ ist entsprechend

$$\begin{aligned}(f, \cos k\omega t) &= a_0\,(1, \cos k\omega t) + \sum_{m=1}^{N} a_m\,(\cos m\omega t, \cos k\omega t) \\ &\qquad + \sum_{\ell=1}^{M} b_\ell\,(\sin \ell\omega t, \cos k\omega t) \\ &= a_k\,(\cos k\omega t, \cos k\omega t) = \frac{a_k}{2}\,,\end{aligned}$$

d.h.

$$a_k = 2\,(f, \cos k\omega t) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t\,dt\,,$$

und für $\ell > 0$

$$\begin{aligned}(f, \sin \ell\omega t) &= a_0\,(1, \sin \ell\omega t) + \sum_{k=1}^{N} a_k\,(\cos k\omega t, \sin \ell\omega t) \\ &\qquad + \sum_{n=1}^{M} b_\ell\,(\sin n\omega t, \sin \ell\omega t) \\ &= b_\ell\,(\sin \ell\omega t, \sin \ell\omega t) = \frac{b_\ell}{2}\,,\end{aligned}$$

d.h.

$$b_\ell = 2\,(f, \sin \ell\omega t) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin \ell\omega t\,dt\,.$$

g) Die reelle Fourier-Reihe einer periodischen Funktion

Schon bei der g-Saite einer Geige gibt es keinen vernünftigen Grund, warum die Reihe der Obertöne nach endlich vielen Schritten abbrechen sollte: Die Amplituden müssen zwar für die höheren Oberschwingungen schließlich gegen null gehen, da die Summe aller Schwingungen gegen die Schwingung der Geigensaite konvergiert, aber das heißt nur, daß letztere immer besser durch ein trigonometrisches Polynom angenähert werden kann, nicht daß sie eines ist.

Es liegt daher nahe, für beliebige Funktionen aus dem Vektorraum $\mathrm{L}_T(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ aller stückweise stetiger Funktionen mit Periode T einfach in obiger Darstellung N und M gegen unendlich gehen zu lassen:

Definition: Die (reelle) FOURIER-Reihe der Funktion $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ ist die unendliche Reihe

$$S_f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \sin \ell\omega t$$

mit

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt, \quad a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t\,dt$$

und

$$b_\ell = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin \ell\omega t\,dt\,.$$

JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768–1830) begann zunächst mit einer Ausbildung zum Priester, beendete diese jedoch nicht, sondern wurde stattdessen Mathematiklehrer. 1793 trat er dem lokalen Revolutionskomittee bei, 1798 begleitete er NAPOLEON auf dessen Ägyptenfeldzug. Nach dem Rückzug aus Ägypten ernannte ihn Napoleon zum Präfekten von Isére; dort in Grenoble begann er mit seinen Arbeiten über Wärmeleitung, aus denen die FOURIER-Reihen hervorgingen. Nach Napoleons endgültiger Vertreibung wurde FOURIER 1817 in die Akademie der Wissenschaften gewählt; 1822 wurde er Sekretär der mathematischen Sektion.

Für trigonometrische Polynome ist nach den Ergebnissen des letzten Abschnitt stets $f(t) = S_f(t)$. Für beliebige periodische Funktionen wissen wir aber nicht einmal, ob die Reihe $S_f(t)$ überhaupt konvergiert, von der Konvergenz gegen $f(t)$ ganz zu schweigen; hier gibt es also noch einiges zu tun.

§2: Erste Beispiele von Fourier-Reihen

Bevor wir uns solchen allgemeinen Fragen zuwenden, wollen wir zunächst anhand einiger Beispiele sehen, was wir realistischerweise erwarten können.

a) Rechenregeln

Als erstes wollen wir uns überlegen, wie wir bei der Berechnung von FOURIER-Koeffizienten überflüssigen Rechenaufwand vermeiden können.

Das größte Potential für Vereinfachungen bieten *Symmetrien* der Funktion. Die beiden wichtigsten Symmetrien sind die Eigenschaften, *gerade* oder *ungerade* zu sein: Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gerade, wenn $f(-t) = f(t)$ ist für *alle* $t \in \mathbb{R}$; sie ist ungerade, wenn $f(-t) = -f(t)$ ist für *alle* $t \in \mathbb{R}$. Auch Symmetrien bezüglich anderer Punkte als $t = 0$ lassen sich gelegentlich erfolgreich ausnützen.

A priori läßt sich keine Symmetrie bezüglich $t = 0$ für die Berechnung der hier interessierenden bestimmten Integrale mit Grenzen 0 und T

ausnutzen; da wir es hier aber mit periodischen Funktionen zu tun haben, sind wir nicht an diese Integrationsgrenzen gebunden:

Lemma: Ist die Funktion g periodisch mit Periode T, so ist für jedes $\tau \in \mathbb{R}$

$$\int_0^T g(t)\,dt = \int_\tau^{\tau+T} g(t)\,dt\,.$$

Beweis: Wir können τ schreiben als

$$\tau = kT + \tau_0 \quad \text{mit} \quad 0 \le \tau_0 < T \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Wegen der Periodizität von f ist

$$\int_\tau^{\tau+T} g(t)\,dt = \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} g(t)\,dt\,;$$

es reicht also, den Fall $0 \le \tau < T$ zu betrachten. Hierfür ist

$$\int_\tau^{\tau+T} g(t)\,dt = \int_\tau^T g(t)\,dt + \int_T^{\tau+T} g(t)\,dt = \int_\tau^T g(t)\,dt + \int_0^\tau g(t)\,dt$$
$$= \int_0^\tau g(t)\,dt + \int_\tau^T g(t)\,dt = \int_0^T g(t)\,dt\,.$$

■

Speziell für $\tau = -T/2$ ist also auch

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt \quad \text{und} \quad a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos k\omega t\,dt$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, und

$$b_\ell = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin \ell\omega t\,dt \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}\,.$$

Ist nun f eine ungerade Funktion, so sind auch alle Funktionen $f(t)\cos k\omega t$ ungerade, d.h.

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = 0 \quad \text{und} \quad a_k = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos k\omega t\,dt = 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f(t)\sin \ell\omega t$ ist Produkt zweier ungerader Funktionen und somit gerade; dies liefert die Beziehung

$$b_\ell = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin k\omega t\,dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\sin k\omega t\,dt\,,$$

die je nach der speziellen Form von f entweder nützlich ist oder auch nicht. Auf jeden Fall gibt es aber bei einer ungeraden Funktion in der FOURIER-Reihe keine Cosinusterme (einschließlich des konstanten Terms zu $\cos 0 = 1$); nur Sinusterme können von Null verschiedene Koeffizienten haben.

Für eine gerade Funktion f ist $f(t)\cdot\sin \ell\omega t$ als Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ungerade, d.h.

$$b_\ell = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin \ell\omega t\,dt = 0$$

für alle ℓ. Somit sind keine Sinusterme möglich; nur Cosinusterme (einschließlich des konstanten Terms) können auftreten. Weiter ist

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos k\omega t\,dt = 2\int_{0}^{T/2} f(t)\cos k\omega t\,dt\,,$$

was wiederum in Abhängigkeit von der speziellen Gestalt von f entweder nützlich ist oder auch nicht.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun endgültig zu konkreten Beispielen; das erste davon ist gerade in der Digitaltechnik von großer Bedeutung:

b) Periodische Rechteckimpulse

Hier betrachten wir die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} h & \text{für } 0 \le t < \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} \le t < T \end{cases} \quad \text{mit} \quad f(t{+}T) = f(t) \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}\,;$$

offensichtlich ist $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Außerdem ist f eine ungerade Funktion, d.h. es gibt nur Sinusterme. Für diese ist

$$\begin{aligned} b_\ell &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin \ell\omega t\,dt = \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} h\sin \ell\omega t\,dt - \int_{T/2}^{T} h\sin \ell\omega t\,dt\right) \\ &= \frac{2h}{T}\left(-\frac{\cos \ell\omega\frac{T}{2} - 1}{\ell\omega} + \frac{\cos \ell\omega T - \cos \ell\omega\frac{T}{2}}{\ell\omega}\right) \\ &= \frac{2h}{T}\left(\frac{(-1)^{\ell+1} + 1 + 1 + (-1)^{\ell+1}}{\ell\omega}\right)\,, \end{aligned}$$

denn da $\omega T = 2\pi$, ist $\omega T/2 = \pi$ und $\cos \ell\pi = (-1)^\ell$. Somit ist

$$b_\ell = \begin{cases} 0 & \text{für gerade } \ell \\ \dfrac{2h}{T}\cdot\dfrac{4}{\ell\omega} = \dfrac{4h}{\pi\ell} & \text{für ungerade } \ell \end{cases}$$

und

$$S_f(t) = \frac{4h}{\pi}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\sin(2\ell-1)\omega t}{(2\ell-1)}\,.$$

Wir sollten nicht zu optimistisch sein und erwarten, daß diese FOURIER-Reihe in jedem Punkt t gegen $f(t)$ konvergiert: Wir hätten einen Rechteckimpuls mit Periode T im Intervall $[0,T)$ beispielsweise auch durch

$$g(t) = \begin{cases} h & \text{für } 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

definieren können. $f(t)$ und $g(t)$ unterscheiden sich im Intervall $[0,T]$ nur an der Stelle $t = \frac{T}{2}$ unterscheiden, was bei der Berechnung der

Integrale für die FOURIER-Koeffizienten keine Rolle spielt. Die beiden Funktionen haben daher dieselbe FOURIER-Reihe, und diese kann, selbst wenn sie konvergiert, an der Stelle $t = \frac{T}{2}$ nicht sowohl gegen $f(\frac{T}{2}) = -h$ und $g(\frac{T}{2}) = h$ konvergieren. (Tatsächlich konvergiert sie, da $\omega\frac{T}{2} = \pi$ ist und der Sinus bei allen Vielfachen von π verschwindet, gegen den Mittelwert null der beiden Funktionswerte.)

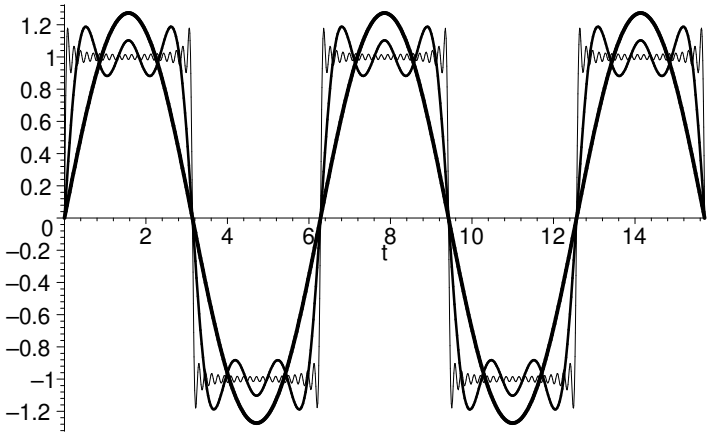


Abb. 6: FOURIERpolynome für Rechteckimpulse

Experimentell konvergiert die berechnete Reihe abgesehen von den Sprungstellen anscheinend recht gut: Abbildung sechs zeigt die Teilsummen mit oberen Grenzen 1, 3 und 20 Summanden, die die Funktion f offensichtlich immer besser annähern. Gerade für die größeren Werte ist dieses Bild natürlich etwas gestört durch numerische Fehler und *alias*-Effekte der Rastergraphik; keine solche Störung sind allerdings die Überschwingungen an den Unstetigkeitsstellen von f: Dieses sogenannte GIBBS-Phänomen ist eine mathematisch unvermeidbare Eigenschaft von FOURIER-Reihen stückweise stetiger Funktionen, mit der wir uns in Kürze näher beschäftigen werden.

Im Augenblick sei nur kurz auf eine Anwendung dieser Überschwingungen hingewiesen: Die Pixel auf einem Computerbildschirm werden

durch Rechteckimpulse geschaltet, wobei aus physikalischen Gründen Oberschwingungen hoher Frequenz bei der Übertragung so stark gedämpft werden, daß für alle praktischen Zwecke nur so etwas wie eine endliche Teilsumme der FOURIER-Reihe übertragen wird. Die in Abbildung eins zu sehenden höherfrequenten Anteile lassen sich mit einem Funkempfänger auffangen und können dann zur Rekonstruktion des Bildschirminhalts verwendet werden; zumindest bei sensitiven Anwendungen muß ein Computer daher so abgeschirmt sein, daß er keine solchen Strahlungen aussendet.

c) Sägezahnimpulse

Hier betrachten wir die Funktion

$$f(t) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} \quad \text{für} \quad 0 < t < T \quad \text{und} \quad f(0) = 0\,,$$

periodisch fortgesetzt mit Periode T auf ganz $\mathbb{R}$.

Dies ist eine ungerade Funktion, denn für $0 < t < T$ ist

$$f(-t) = f(-t+T) = \frac{T}{4} - \frac{(-t+T)}{2} = \frac{t}{2} - \frac{T}{4} = -f(t)\,,$$

und $f(0) = 0$, wie es sich für eine ungerade Funktion gehört. Die FOURIER-Reihe von f enthält daher nur Sinusterme.

Zu deren Berechnung setzen wir wie üblich

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

und erhalten den Koeffizienten von $\sin \ell\omega t$ als

$$\begin{aligned} b_\ell &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin \ell\omega t\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T \left(\frac{T}{4} - \frac{t}{2}\right)\sin \ell\omega t\,dt \\ &= \frac{2}{T}\cdot\frac{T}{4}\int_0^T \sin \ell\omega t\,dt - \frac{2}{T}\cdot\frac{1}{2}\int_0^T t\sin \ell\omega t\,dt \\ &= -\frac{1}{T}\int_0^T t\sin \ell\omega t\,dt\,, \end{aligned}$$

da das Integral einer Sinusfunktion über eine oder mehrere volle Perioden verschwindet. Zur weiteren Rechnung wenden wir die Methode der partiellen Integration an:

$$\int u(t)\cdot\dot v(t)\,dt = u(t)\cdot v(t) - \int \dot u(t)\cdot v(t)\,dt$$

ergibt für $u(t) = t$ und $\dot v(t) = \sin \ell\omega t$ mit $v = -\frac{1}{\ell\omega}\cos \ell\omega t$ die Beziehung

$$\begin{aligned}\int t\sin \ell\omega t\,dt &= -t\frac{\cos \ell\omega t}{\ell\omega} + \frac{1}{\ell\omega}\int \cos \ell\omega t\,dt\\ &= -t\frac{\cos \ell\omega t}{\ell\omega} + \frac{1}{\ell^2\omega^2}\sin \ell\omega t + C\,.\end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}b_\ell &= -\frac{1}{T}\left(\frac{-T\cdot\cos \ell\omega T - 0\cdot\cos 0}{\ell\omega} + \frac{\sin \ell\omega T - \sin 0}{\ell^2\omega^2}\right)\\ &= \frac{1}{\ell\omega}\cos(\ell\cdot 2\pi) = \frac{1}{\ell\omega}\end{aligned}$$

und

$$S_f(t) = \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega}\,.$$

Wieder haben wir keine Ahnung, ob und gegebenenfalls wohin diese Reihe konvergiert – außer bei den ganzzahligen Vielfachen von $T/2$, denn dort verschwinden alle Sinusfunktionen in den Zählern, so daß die Summe gleich null ist.

Abbildung 7 zeigt die Teilsummen mit 1, 3 und 20 Summanden für $T = 4$; anscheinend nähern diese die Funktion recht gut an, allerdings gibt es wieder Überschwingungen an den Sprungstellen, denn für $T = 4$ haben wir einen Sägezahn, der zwischen +1 und -1 hin- und herpendelt.

d) Konvergenz der berechneten Reihen

Als nächstes wollen, zunächst für Sägezahnschwingungen, die Konvergenz der FOURIER-Reihe untersuchen. Für $t = 0$ und damit auch für alle Vielfachen von T sind alle Summanden null, die Reihe konvergiert also gegen null.

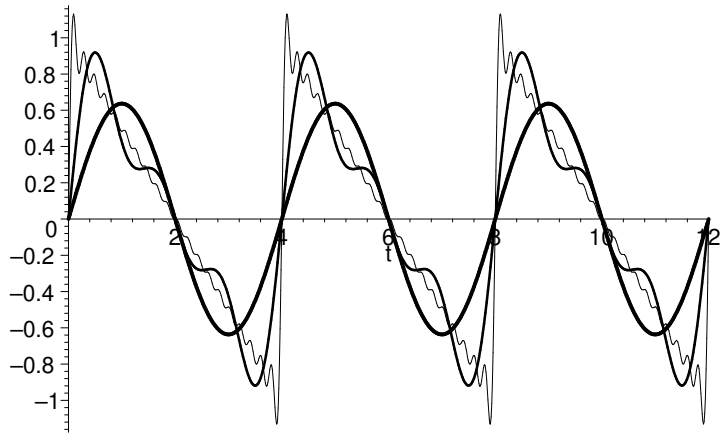


Abb. 7: FOURIERpolynome für die Sägezahnschwingung

Für t aus dem offenen Intervall $(0,\,T)$ können wir folgendermaßen vorgehen: Die Summanden $\frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega}$ sind Stammfunktionen der Funktionen $\cos \ell\omega t$; also ist

$$\sum_{\ell=1}^{N}\frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} \quad \text{Stammfunktion von} \quad \sum_{\ell=1}^{N}\cos \ell\omega t\,.$$

Auch die Funktion f läßt sich im Intervall $(0,\,T)$ als Stammfunktion schreiben: Dort ist

$$f(t) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} = \int_{T/2}^{t}\left(\frac{-1}{2}\right)\,d\tau\,,$$

und da auch

$$\int_{T/2}^{t}\cos \ell\omega\tau\,d\tau = \frac{\sin \ell\omega t - \sin \ell\omega T/2}{\ell\omega} = \frac{\sin \ell\omega t - \sin \ell\pi}{\ell\omega} = \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega}$$

ist, erhalten wir die Differenz zwischen der N-ten Teilsumme und $f(t)$

als Integral:

$$\sum_{\ell=1}^{N} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} - f(t) = \int_{T/2}^{t} \left(\sum_{\ell=1}^{N} \cos \ell\omega\tau - \left(\frac{-1}{2} \right) \right) d\tau$$

$$= \int_{T/2}^{t} \left(\frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^{N} \cos \ell\omega\tau \right) d\tau \,.$$

Diesen Integranden können wir über die komplexe Darstellung des Cosinus ausrechnen:

$$\frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^{N} \cos \ell\omega\tau = \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^{N} \frac{e^{\ell\cdot i\omega\tau} + e^{-\ell\cdot i\omega\tau}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{\ell=-N}^{N} e^{\ell\cdot i\omega\tau}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-N\cdot i\omega\tau} \sum_{\ell=0}^{2N} e^{\ell\cdot i\omega\tau}$$

ist im wesentlichen eine geometrische Reihe, und die läßt sich bekanntlich leicht ausrechnen: Da

$$(1-q) \sum_{j=0}^{r} q^j = \sum_{j=0}^{r} q^j - \sum_{j=1}^{r+1} q^j = 1 - q^{r+1}$$

ist, folgt für $q \neq 1$ die Formel

$$\sum_{j=0}^{r} q^j = \frac{1 - q^{r+1}}{1-q} \,.$$

In unserem Fall ist $q = e^{i\omega\tau}$ und somit

$$\sum_{\ell=0}^{2N} e^{\ell\cdot i\omega\tau} = \frac{1 - e^{(2N+1)\cdot i\omega\tau}}{1 - e^{i\omega\tau}} \,.$$

Also ist

$$\frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^{N} \cos \ell\omega\tau = \frac{1}{2} e^{-N\cdot i\omega\tau} \frac{1 - e^{(2N+1)\cdot i\omega\tau}}{1 - e^{i\omega\tau}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{e^{-N\cdot i\omega\tau} - e^{(N+1)\cdot i\omega\tau}}{1 - e^{i\omega\tau}} \,.$$

Erweiterung des Bruchs mit $e^{\frac{1}{2}\cdot i\omega\tau}$ führt auf die symmetrischere Form

$$\frac{1}{2} \frac{e^{-(N+\frac{1}{2})\cdot i\omega\tau} - e^{(N+\frac{1}{2})\cdot i\omega\tau}}{e^{-\frac{1}{2}\cdot i\omega\tau} - e^{\frac{1}{2}\cdot i\omega\tau}} = \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\tau}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}} \,.$$

Damit ist

$$\sum_{\ell=1}^{N} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} - f(t) = \int_{T/2}^{t} \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\tau}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}} \, d\tau \,.$$

Die FOURIER-Reihe konvergiert genau dann im Punkt t gegen $f(t)$, wenn dieses Integral für $N \to \infty$ gegen null geht.

Die Suche nach einer Stammfunktion sieht ziemlich hoffnungslos aus; trotzdem hilft partielle Integration zu einem besseren Verständnis des Integrals. Wir wenden die Regel an mit

$$u(\tau) = \frac{1}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}} \quad \text{und} \quad \dot{v}(\tau) = \sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\tau \,,$$

d.h.

$$v(\tau) = -\frac{\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\tau}{\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega} \,;$$

das Integral wird zu

$$-\frac{\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega t}{(2N+1)\omega\sin\frac{\omega t}{2}} + \int_{T/2}^{t} \frac{\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\tau}{\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega} \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}}\right) d\tau \,,$$

denn an der unteren Grenze ist

$$\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\frac{T}{2} = \cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi = 0 \,.$$

Auf das noch verbleibende Integral wenden wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung in seiner allgemeinen Form an:

Für eine im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion v und eine in $[a, b]$ integrierbare Funktion w gibt es einen Wert $\zeta \in [a, b]$, so daß gilt

$$\int_a^b v(\tau)w(\tau)\,d\tau = v(\zeta)\int_a^b w(\tau)\,d\tau \,.$$

Für alle, die den Satz nicht in dieser Form kennen, sei der *Beweis* kurz nachgetragen: Als stetige Funktion nimmt v im Intervall $[a,\, b]$ sowohl seinen Maximalwert $v_{\max}$ als auch seinen Minimalwert $v_{\min}$ an. Der Wert des linksstehenden Integrals liegt dann zwischen

$$v_{\min} \int_a^b w(\tau)\, d\tau \quad \text{und} \quad v_{\max} \int_a^b w(\tau)\, d\tau\,,$$

es gibt also einen Wert $v_0 \in [v_{\min},\, v_{\max}]$, so daß

$$\int_a^b v(\tau) w(\tau)\, d\tau = v_0 \int_a^b w(\tau)\, d\tau$$

ist. Nach dem Zwischenwertsatz nimmt v als stetige Funktion diesen Wert v_0 irgendwo an, es gibt also ein $\zeta \in [a,\, b]$, so daß $v(\zeta) = v_0$ ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Hier setzen wir

$$v(\tau) = \frac{\cos\left(N+\frac12\right)\omega\tau}{\left(N+\frac12\right)\omega} \quad \text{und} \quad w(\tau) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}}\right)\,;$$

wir erhalten

$$\int_{T/2}^{t} \frac{\cos\left(N+\frac12\right)\omega\tau}{\left(N+\frac12\right)\omega} \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}}\right)\, d\tau$$

$$= \frac{\cos\left(N+\frac12\right)\omega\zeta}{(2N+1)\omega} \int_{T/2}^{t} \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\sin\frac{\omega\tau}{2}}\right)\, d\tau$$

$$= \frac{\cos\left(N+\frac12\right)\omega\zeta}{(2N+1)\omega}\left(\frac{1}{\sin\frac{\omega t}{2}} - 1\right)\,,$$

denn $\sin\frac{\omega T}{4} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Also ist

$$\sum_{\ell=1}^{N} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} - f(t)$$

$$= -\frac{\cos\left(N+\frac12\right)\omega t}{(2N+1)\omega\sin\frac{\omega t}{2}} + \frac{\cos\left(N+\frac12\right)\omega\zeta}{(2N+1)\omega}\left(\frac{1}{\sin\frac{\omega t}{2}} - 1\right)\,.$$

Für $0 < t < T$ ist $1/\sin\frac{\omega t}{2} \geq 1$, also

$$0 \leq \frac{1}{\sin\frac{\omega t}{2}} - 1 < \frac{1}{\sin\frac{\omega t}{2}}\,,$$

und da der Cosinus nur Werte zwischen -1 und $+1$ annimmt, folgt, daß

$$\left|\sum_{\ell=1}^{N} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} - f(t)\right| \leq \frac{2}{(2N+1)\omega\sin\frac{\omega t}{2}}$$

für alle t mit $0 < t < T$.

Für $N \to \infty$ geht die rechte Seite gegen null, also ist

$$S_f(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{\ell=1}^{N} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} = f(t)$$

für alle t mit $0 < t < T$. Für $t = 0$ stehen links und rechts Nullen, so daß die Gleichung auch dort gilt, und da beide Seiten periodisch sind mit Periode T, gilt sie tatsächlich für alle $t \in \mathbb{R}$.

Auf abgeschlossenen Teilintervallen von $(0,\, T)$ ist die Konvergenz sogar gleichmäßig, denn im Intervall $[\varepsilon, T-\varepsilon]$ ist $\sin\frac{\omega t}{2} \geq \sin\frac{\omega\varepsilon}{2}$, d.h.

$$\left|\sum_{\ell=1}^{N} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} - f(t)\right| \leq \frac{2}{(2N+1)\omega\sin\frac{\omega\varepsilon}{2}}$$

für alle $t \in [\varepsilon, T-\varepsilon]$.

Mit diesem Resultat können wir nun auch die Konvergenz der FOURIER-Reihe für Rechteckimpulse genauer untersuchen:

Für $0 < t < \frac{T}{2}$ liegt auch $\frac{T}{2} - t$ im Intervall $(0,\, T)$, d.h. mit der gerade betrachteten Funktion f für Sägezahnimpulse ist

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} + \frac{T}{4} - \frac{T}{4} + \frac{t}{2} = \frac{T}{4}\,.$$

Für $\frac{T}{2} < t < T$ liegt $\frac{T}{2} - t$ im Intervall $(-T,\, 0)$, d.h. $\frac{3T}{2} - t$ liegt in $(0,\, T)$ und

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = f(t) + f\left(\frac{3T}{2} - t\right) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} + \frac{T}{4} - \frac{3T}{4} + \frac{t}{2} = -\frac{T}{4}\,.$$

Für $t = 0$ sowie auch für $t = \frac{T}{2}$ ist $f(t) + f(\frac{T}{2} - t) = 0$, insgesamt ist also

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \begin{cases} \frac{T}{4} & \text{für } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -\frac{T}{4} & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0, \frac{T}{2} \end{cases},$$

periodisch fortgesetzt mit Periode T. Somit beschreibt $f(t) + f(\frac{T}{2} - t)$ einen Rechteckimpuls.

Da $S_f(t) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = S_f(t) + S_f\left(\frac{T}{2} - t\right)$$

und

$$S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell\omega \left(\frac{T}{2} - t\right)}{\ell\omega} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\ell\omega T}{2} - \ell\omega t\right)}{\ell\omega}$$
$$= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(\ell\pi - \ell\omega t)}{\ell\omega}.$$

Für gerades ℓ ist

$$\sin(\ell\pi - x) = \sin(-x) = -\sin x$$

und für ungerades ℓ ist

$$\sin(\ell\pi - x) = \sin(\pi - x) = -\sin(x - \pi) = \sin x,$$

denn bei Verschiebung um π wird der $\sin x$ zu $-\sin x$. Damit folgt

$$S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega}$$

und

$$S_f(t) + S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} + \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega}.$$

Für endliche Teilsummen heben sich bei dieser Addition einfach die Terme mit geraden Indizes weg, während die mit ungeradem Index

verdoppelt werden, d.h.

$$\sum_{\ell=1}^{N} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} + \sum_{\ell=1}^{N} (-1)^{\ell+1} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} = 2 \sum_{\ell=1}^{N} \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)\omega}.$$

Durch Grenzübergang $N \to \infty$ folgt

$$S_f(t) + S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) = 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)\omega},$$

d.h.

$$2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)\omega} = \begin{cases} \frac{T}{4} & \text{für } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -\frac{T}{4} & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0, \frac{T}{2} \end{cases}.$$

Multiplikation beider Seiten mit $4h/T$ führt wegen

$$\frac{8h}{T\omega} = \frac{8h}{2\pi} = \frac{4h}{\pi}$$

zur Formel

$$\frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)} = \begin{cases} h & \text{für } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0, \frac{T}{2} \end{cases}.$$

Damit ist also auch die Konvergenz der FOURIER-Reihe der Rechteckschwingung geklärt. Als kleine Anwendung können wir den Wert $t = \frac{T}{4}$ einsetzen; für diesen ist

$$\sin(2\ell - 1)\omega \frac{T}{4} = \sin(2\ell - 1)\frac{\pi}{2} = (-1)^{\ell+1},$$

d.h.

$$\frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(2\ell - 1)} = h$$

und somit

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(2\ell - 1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

e) Das Gibbs-Phänomen

Wie in den Abbildungen sechs und sieben zu sehen ist, zeigen zumindest die dort dargestellten FOURIER-Polynome Überschwingungen an den Sprungstellen. Wir wollen uns davon überzeugen, daß diese auch bei FOURIER-Polynome mit beliebig vielen Summanden nicht verschwinden.

Beginnen wir mit den Rechteckschwingungen! Wir versuchen zunächst, die Summe

$$S_N(t) = \frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^{N} \frac{\sin(2\ell-1)\omega t}{(2\ell-1)}$$

in etwas kompakterer Form darzustellen. Wegen

$$\frac{\sin(2\ell-1)\omega t}{(2\ell-1)\omega} = \int_0^t \cos(2\ell-1)\omega\tau \, d\tau$$

ist

$$\frac{S_N(t)}{\omega} = \frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^{N} \int_0^t \cos(2\ell-1)\omega\tau \, d\tau = \frac{4h}{\pi} \int_0^t \sum_{\ell=1}^{N} \cos(2\ell-1)\omega\tau \, d\tau \,,$$

und diesen letzten Integranden können wir über seine komplexe Darstellung ausrechnen. Um den Nenner zwei zu eliminieren, berechnen wir den zweifachen Wert

$$2\sum_{\ell=1}^{N} \cos(2\ell-1)\omega\tau = \sum_{\ell=1}^{N} (e^{(2\ell-1)\cdot i\omega\tau} + e^{-(2\ell-1)\cdot i\omega\tau})$$

$$= \sum_{\ell=-(N-1)}^{N} e^{(2\ell-1)\cdot i\omega\tau} = e^{(-2N+1)\cdot i\omega\tau} \sum_{\ell=0}^{2N-1} e^{2\ell\cdot i\omega\tau} \,.$$

Letztere Summe ist eine geometrische Reihe mit Quotient $e^{2i\omega\tau}$; nach der Summenformel hat sie den Wert

$$\frac{1-e^{4N\cdot i\omega\tau}}{1-e^{2i\omega\tau}} \,.$$

Die gesuchte Summe ist also

$$e^{-2N\cdot i\omega\tau} \frac{1-e^{4N\cdot i\omega\tau}}{1-e^{2i\omega\tau}} = \frac{e^{-2N\cdot i\omega\tau}}{e^{-i\omega\tau}} \frac{1-e^{4N\cdot i\omega\tau}}{1-e^{2i\omega\tau}}$$

$$= \frac{e^{-2N\cdot i\omega\tau} - e^{2N\cdot i\omega\tau}}{e^{-i\omega\tau} - e^{i\omega\tau}} = \frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin\omega\tau}$$

und

$$S_N = \frac{2h\omega}{\pi} \int_0^t \frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin\omega\tau} d\tau \,.$$

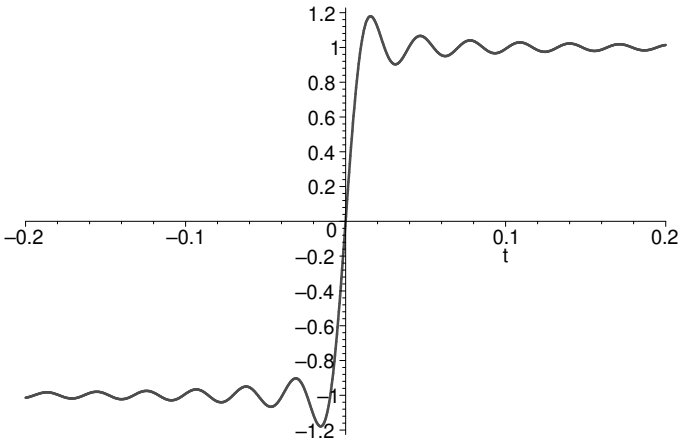


Abb. 8: Das GIBBSphänomen in Großaufnahme

Als nächstes suchen wir nach dem Betrag der Überschwingung. Abbildung acht zeigt diese in Großaufnahme für $S_{100}(t)$; wir wollen das Maximum unmittelbar nach der Sprungstelle bestimmen und das Integral dort auswerten.

Im Maximum verschwindet die Ableitung des Integrals, also der Integrand

$$\frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin\omega\tau} \,.$$

Bei der ersten positiven Nullstelle t_N ist $2N\omega t_N = \pi$ die erste positive Nullstelle des Sinus, d.h.

$$t_N = \frac{\pi}{2N\omega} .$$

Insbesondere rückt t_0 mit wachsendem N immer näher zur Null; je größer N wird, desto enger lokalisiert wird die Überschwingung.

Mit der Substitution $u = 2N\omega\tau$ wird

$$S_N(t_N) = \frac{2h\omega}{\pi} \int_0^{t_N} \frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin \omega\tau}\, d\tau = \frac{2h}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{2N \sin \frac{u}{2N}}\, du .$$

Für große Werte von N ist das Argument des Sinus im Nenner des Integranden sehr klein; wir machen also keinen großen Fehler, wenn wir den Sinus durch sein Argument annähern, und für $N \to \infty$ geht der Fehler gegen Null. Somit ist

$$\lim_{N\to\infty} S_N(t_N) = \lim_{N\to\infty} \frac{2h}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{2N \cdot \frac{u}{2N}}\, du = \frac{2h}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\, du .$$

Die Stammfunktion von $\frac{\sin u}{u}$ ist nicht in geschlossener Form durch trigonometrische Funktionen, Logarithmen, Exponentialfunktionen und ähnliches ausdrückbar, sie ist aber sehr wichtig und hat daher einen eigenen Namen:

Definition: Die Funktion

$$\mathrm{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u}\, du$$

heißt *Integralsinus* oder *sinus integralis.*

Der Integralsinus existiert für beliebige reelle Argumente t, denn die Nullstelle des Integranden bei $u = 0$ ist harmlos, da

$$\lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

ist. Wie Abbildung neun zeigt, konvergiert er für $t \to \pm\infty$ relativ schnell gegen einen konstanten Wert, von dem eine genauere Untersuchung zeigt, daß es sich um $\pm\pi/2$ handelt.

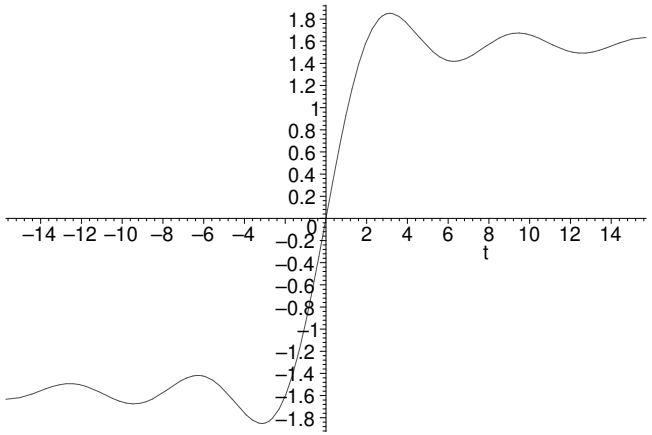


Abb. 9: Der Integralsinus

Der uns interessierende Wert an der Stelle pi läßt sich nicht in einfacher Weise durch andere Konstanten ausdrücken und muß daher numerisch berechnet werden; man erhält

$$\mathrm{Si}(\pi) \approx 1{,}8519305198 \quad \text{und} \quad \frac{2h}{\pi}\,\mathrm{Si}(\pi) \approx 1{,}1789797445 \cdot h .$$

Die FOURIER-Polynome überschwingen also auch für $N \to \infty$ den Funktionswert noch um knapp 18%.

Auch beim Sägezahn können wir die Überschwingung explizit berechnen: Aus Abschnitt *c3)* wissen wir bereits, daß hier

$$\sum_{\ell=1}^{N} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} - f(t) = \int_{T/2}^{t} \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\tau}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}}\, d\tau$$

ist. Auch die Ableitung dieser Funktion ist wieder der Integrand; für ihre erste positive Nullstelle t_N ist

$$\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega t_N = \pi , \text{ d.h.} \quad t_N = \frac{\pi}{\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega} = \frac{T}{2N+1} .$$

Mit der Substitution $u = \left(N + \frac{1}{2}\right)\omega\tau$ wird

$$\int_{T/2}^{t_N} \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\tau}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}}\,d\tau = \int_{\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi}^{\pi} \frac{\sin u}{(2N+1)\omega\sin\frac{u}{2N+1}}\,du\,.$$

Wieder können wir den Sinus im Nenner für große N durch sein Argument ersetzen und erhalten somit als Limes für $N \to \infty$

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi}^{\pi} \frac{\sin u}{\omega u}\,du = \frac{1}{\omega}\left(\mathrm{Si}(\pi) - \lim_{t\to\infty}\mathrm{Si}(t)\right) = \frac{\mathrm{Si}(\pi)-\frac{\pi}{2}}{\omega}$$

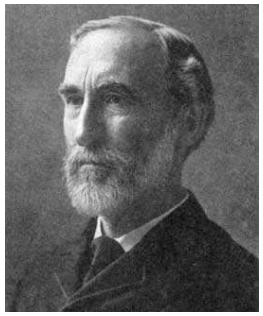
$$= \frac{T}{2\pi}\,\mathrm{Si}(\pi) - \frac{T}{4}\,.$$

Dabei ist $T/4$ der Wert, der überschwungen wird, der Maximalwert des FOURIER-Polynoms geht also für $N \to \infty$ gegen $\frac{T}{2\pi}\,\mathrm{Si}(\pi)$. Dividiert man dies durch $\frac{T}{4}$, ergibt sich wieder der Quotient

$$\frac{T}{2\pi}\,\mathrm{Si}(\pi)\cdot\frac{4}{T} = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Si}(\pi)\,,$$

auch hier gibt es also wieder eine Überschwingung um knapp 18%.

Dies ist kein Zufall: Wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, tritt an *jeder* Unstetigkeitsstelle einer Funktion das GIBBS-Phänomen ein, wonach die FOURIER-Polynome den Sprung um diesen Faktor überschwingen.



JOSIAH WILLARD GIBBS (1839–1903) promovierte 1863 an der amerikanischen Yale-Universität mit einer Arbeit über Zahnradgetriebe; die erste amerikanische Dissertation auf dem Gebiet des Ingenieurwesens. Danach unterrichtete er in Yale Latein und Naturphilosophie, bis er 1866 nach Europa fuhr, wo er 1868/1869 in Heidelberg bei KIRCHHOFF und HELMHOLTZ studierte. 1871 wurde er in Yale Professor für mathematische Physik, 1873 publizierte er seine erste Arbeit, die sich, wie viele spätere, mit Thermodynamik befaßte. Sehr einflußreich waren auch seine Arbeiten zur elektromagnetischen Theorie des Lichts und zur Vektoranalysis.

§3: Komplexe Fourier-Reihen und Hermitesche Vektorräume

a) Komplexe Form der Fourier-Reihen

Wir können die EULERschen Formeln in die Definition einer reellen FOURIER-Reihe einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned}
S_f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \sin \ell\omega t \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{e^{i\cdot k\omega t}+e^{-i\cdot k\omega t}}{2} + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \frac{e^{i\cdot\ell\omega t}-e^{-i\cdot\ell\omega t}}{2i} \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2}e^{i}\cdot k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2}e^{-i\cdot k\omega t} \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{b_\ell}{2i}e^{i\cdot\ell\omega t} - \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{b_\ell}{2i}e^{-i\cdot\ell\omega t} \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2}e^{i}\cdot k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2}e^{-i\cdot k\omega t} \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{-ib_\ell}{2}e^{i\cdot\ell\omega t} + \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{ib_\ell}{2}e^{-i\cdot\ell\omega t} \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k-ib_k}{2}e^{i}\cdot k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k+ib_k}{2}e^{-i\cdot k\omega t} \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{i\cdot k\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-i\cdot k\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\cdot k\omega t}
\end{aligned}$$

mit

$$c_k = \begin{cases} a_0 & \text{für } k = 0 \\ \frac{a_k - ib_k}{2} & \text{für } k > 0 \\ \frac{a_k + ib_k}{2} & \text{für } k < 0 \end{cases},$$

falls alle diese Umordnungen in unendlichen Summen zulässig sind.

Diese Umordnungen sind bekanntlich dann problemlos, wenn die betrachteten Summen absolut konvergieren; da wir bislang noch nicht einmal wissen, welche FOURIER-Reihen überhaupt konvergieren, läßt sich im Augenblick dazu noch nichts sagen.

Explizit ist für $k > 0$

$$c_k = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t\,dt - i\cdot\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\omega t\,dt\right)$$
$$= \frac{1}{T}\left(\int_0^T f(t)\cos k\omega t\,dt - i\int_0^T f(t)\sin k\omega t\,dt\right).$$

Für zwei reelle Funktionen $g(t), h(t)$ und reelle Zahlen λ, μ ist

$$\int_0^T \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,dt = \lambda\int_0^T g(t)\,dt + \mu\int_0^T h(t)\,dt,$$

und das wollen wir verallgemeinern auf den Fall $\lambda = 1$ und $\mu = i$, um so Integrale über komplexwertige Funktionen zu *definieren:*

Definition: Für die komplexwertige Funktion $f(t) = g(t) + ih(t)$ ist

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt + i\int_a^b h(t)\,dt$$

und entsprechend für unbestimmte Integrale

$$\int f(t)\,dt = \int g(t)\,dt + i\int h(t)\,dt.$$

Mit dieser Definition ist für $k > 0$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\big(\cos k\omega t - i\sin k\omega t\big)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\cdot k\omega t}\,dt,$$

und diese Formel gilt so offensichtlich auch für $k < 0$. Sie gilt sogar für $k = 0$, denn dann ist $e^{i\cdot 0\cdot\omega t} = e^0 = 1$.

Nachdem wir diese einfache Darstellung der komplexen FOURIER-Koeffizienten haben, wollen wir damit in Analogie zu den reellen FOURIER-Reihen komplexe FOURIER-Reihen direkt definieren:

Definition: *a)* Eine Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ heißt *stückweise stetig,* wenn sowohl ihr Realteil als auch ihr Imaginärteil stückweise stetig sind.

b) $\mathrm{L}_T(\mathbb{R},\mathbb{C}) \underset{\text{def}}{=} \left\{ f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ ist stückweise stetig und} \\ f(t+T) = f(t) \text{ für alle } t\in\mathbb{R} \end{array} \right\}$.

c) Für $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$ heißt

$$S_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\cdot k\omega t} \quad\text{mit}\quad c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\cdot k\omega t}$$

komplexe FOURIER-Reihe von f.

Wie man sieht, läßt sich diese komplexe FOURIER-Reihe erheblich kompakter hinschreiben als die reelle, und wie sich gleich zeigen wird, läßt sie sich oft auch sehr schnell ausrechnen.

b) Die Stammfunktion der komplexen Exponentialfunktion

Zunächst müssen wir aber den Umgang mit Integralen über komplexwertige Funktionen etwas üben, und dazu wollen wir uns überlegen, daß sich die Exponentialfunktion im Komplexen genauso integrieren läßt wie im Reellen:

Lemma: Für $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ist

$$\int e^{\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda t}.$$

Beweis: Sei $\lambda = a+ib$. Da der Fall $b = 0$ der reellen Exponentialfunktion wohlbekannt ist, können wir voraussetzen, daß b nicht verschwindet. Dann ist

$$\int e^{\lambda t}\,dt = \int e^{(a+ib)t}\,dt = \int e^{at}(\cos bt + i\sin bt)\,dt$$
$$= \int e^{at}\cos bt\,dt + i\int e^{at}\sin bt\,dt.$$

Realteil und Imaginärteil lassen sich durch partielle Integration bestimmen:

$$\int e^{at}\cos bt\,dt = e^{at}\,\frac{\sin bt}{b} - \frac{a}{b}\int e^{at}\sin bt\,dt$$

und

$$\int e^{at}\sin bt\,dt = -e^{at}\,\frac{\cos bt}{b} + \frac{a}{b}\int e^{at}\cos bt\,dt\,,$$

d.h.

$$\int e^{at}\cos bt\,dt = e^{at}\frac{\sin bt}{b} + \frac{a}{b}e^{at}\frac{\cos bt}{b} - \frac{a^2}{b^2}\int e^{at}\cos bt\,dt\,.$$

Somit ist

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{at}\cos bt\,dt = e^{at}\left(\frac{\sin bt}{b} + \frac{a\cos bt}{b^2}\right)$$
$$= \frac{1}{b^2}e^{at}(b\sin bt + a\cos bt)\,.$$

Multiplikation mit b^2 macht daraus

$$(a^2+b^2)\int e^{at}\cos bt\,dt = b\sin bt + a\cos bt$$

oder

$$\int e^{at}\cos bt\,dt = e^{at}\left(\frac{a}{a^2+b^2}\cos bt + \frac{b}{a^2+b^2}\sin bt\right)\,.$$

Also ist

$$\begin{aligned}\int e^{at}\sin bt\,dt &= -e^{at}\,\frac{\cos bt}{b} + \frac{a}{b}\int e^{at}\cos bt\,dt\\ &= e^{at}\left(-\frac{\cos bt}{b} + \frac{a^2}{b(a^2+b^2)}\cos bt + \frac{a}{a^2+b^2}\sin bt\right)\\ &= e^{at}\left(\frac{-(a^2+b^2)+a^2}{b(a^2+b^2)}\cos bt + \frac{a}{a^2+b^2}\sin bt\right)\\ &= e^{at}\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\cos bt + \frac{a}{a^2+b^2}\sin bt\right)\,.\end{aligned}$$

Insgesamt ist also

$$\begin{aligned}\int e^{\lambda t}\,dt &= \int e^{at}\cos bt\,dt + i\int e^{at}\sin bt\,dt\\ &= e^{at}\left(\frac{a-ib}{a^2+b^2}\cos bt + \frac{b+ia}{a^2+b^2}\sin bt\right)\\ &= e^{at}\left(\frac{\cos bt}{a+ib} + \frac{\sin bt}{b-ia}\right)\\ &= e^{at}\left(\frac{\cos bt}{a+ib} + i\frac{\sin bt}{a+ib}\right) = e^{at}\,\frac{e^{ib}}{a+ib} = \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\,,\end{aligned}$$

wie behauptet. ∎

Dieses Lemma wird uns bei künftigen konkreten Berechnungen von FOURIER-Reihen sehr viel Arbeit ersparen, da es oft gestattet, Integrale über Produkte auf Integrale über (komplexe) Exponentialfunktionen zurückzuführen.

c) Ein erstes Beispiel

Als Beispiel berechnen wir die FOURIER-Reihe von

$f(t) = \sinh t$ für $-\pi < t \le \pi$, periodisch fortgesetzt mit Periode 2π.

Die Koeffizienten der komplexen FOURIER-Reihe sind

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-k\cdot i\omega t}\,dt\,.$$

Man darf nun aber keineswegs den Fehler machen, daraus zu folgern, daß

$$\text{???}\qquad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sinh t\,e^{-k\cdot i\omega t}\,dt\qquad\text{???}$$

sei, denn $f(t)$ stimmt *nur* im Intervall $(-\pi,\,\pi]$ mit $\sinh t$ überein; für $\pi < t \le 2\pi$ ist $f(t) = \sinh(t-2\pi)$. Falls wir die mit Fragezeichen

versehene Formel benutzen, berechnen wir tatsächlich die FOURIER-Reihe von

$$g(t) = \sinh t \quad \text{für } 0 < t \leq 2\pi, \text{ periodisch fortgesetzt mit Periode } 2\pi\,,$$

und das ist, wie die Abbildungen zehn und elf zeigen, eine völlig andere Funktion: f ist eine ungerade Funktion mit einem Wertebereich, der durch die beiden Extrema $\pm\sinh\pi \approx \pm 11{,}54873936$ begrenzt ist, g dagegen eine Funktion mit Werten zwischen null und $\sinh 2\pi \approx 267{,}7448943$, die weder gerade noch ungerade ist.

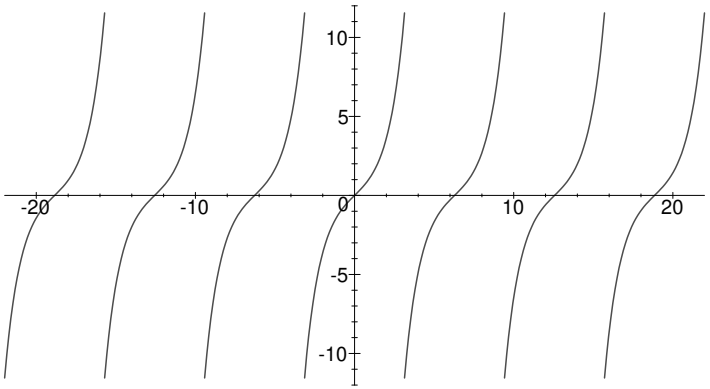


Abb. 10: Die Funktion $f(t)$

Wie groß der Unterschied zwischen den beiden Funktionen wirklich ist, sieht man optisch am besten, wenn man sie wie in Abbildung zwölf in ein gemeinsames Koordinatensystem abbildet: Die fett gezeichneten Kurvenstücke sind beiden Funktionen gemeinsam, und dort, wo f und g nicht übereinstimmen, ist f durch eine ausgezogene, g durch eine gestrichelte Kurve dargestellt.

Wenn wir mit einer Integration von 0 bis 2π arbeiten wollen, müssen

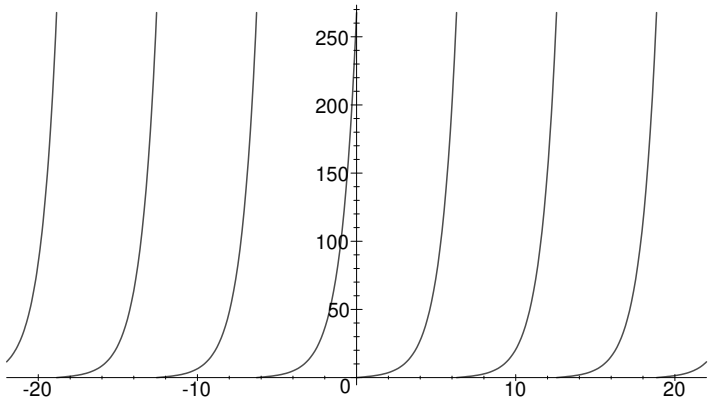


Abb. 11: Die Funktion $g(t)$

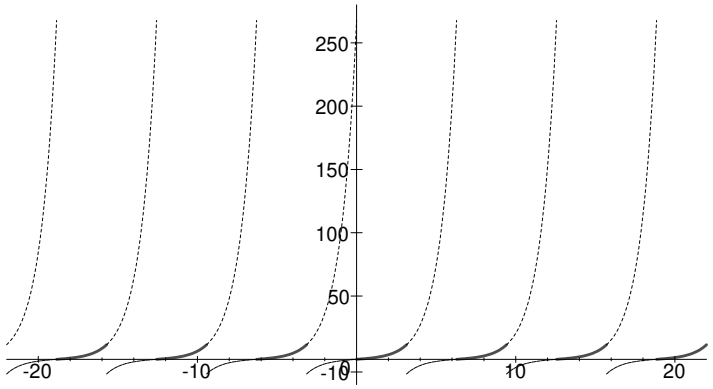


Abb. 12: $f(t)$ und $g(t)$ im gleichen Koordinatensystem

wir also das Integral in zwei Teilintegrale aufteilen:

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{-k\cdot it}\,dt = \int_0^{\pi} \sinh t\, e^{-k\cdot it}\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} \sinh(t-2\pi)\, e^{-k\cdot it}\,dt$$

Zum Glück wissen wir aber aus §2*a),* daß wir bei einer periodischen Form über jedes beliebige Periodenintervall integrieren dürfen, ohne

etwas am Ergebnis zu verändern: Das wurde dort zwar nur für reelle Integrale gezeigt, aber da ein komplexes Integral auf zwei reelle zurückgeführt werden kann, gilt es auch dafür. Also ist auch

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-k\cdot it}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sinh t\, e^{-k\cdot it}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^t - e^{-t}}{2}\, e^{-k\cdot it}\,dt = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{t(1-ki)} - e^{-t(1+ki)}\right)\,dt \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^{t(1-ki)}}{1-ki}\,\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{e^{-t(1+ki)}}{-(1+ki)}\,\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^{\pi}e^{-ki\pi} - e^{-\pi}e^{ki\pi}}{1-ki} + \frac{e^{-\pi}e^{-ki\pi} - e^{\pi}e^{ki\pi}}{1+ki}\right) \\
&= \frac{(-1)^k}{4\pi}(e^{\pi} - e^{-\pi})\left(\frac{1}{1-ki} - \frac{1}{1+ki}\right) \\
&= \frac{(-1)^k \sinh\pi}{2\pi}\,\frac{(1+ki)-(1-ki)}{1+k^2} = \frac{\sinh\pi}{\pi}\cdot\frac{(-1)^k\cdot ik}{k^2+1}\,.
\end{aligned}$$

Die komplexe FOURIER-Reihe ist somit

$$S_f(t) = i\frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{k^2+1}e^{ikt}\,.$$

Da der Koeffizient von e^{ikt} eine ungerade Funktion von k ist, fallen beim Einsetzen von $e^{ikt} = \cos kt + i\sin kt$ die Cosinusterme weg, während sich die Sinusterme zu k und zu $-k$ gegenseitig verdoppeln; wir erhalten also die reelle Form

$$S_f(t) = i\frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{k^2+1}i\sin kt = -2\frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{k^2+1}\sin kt\,,$$

die gleichzeitig die reelle FOURIER-Reihe von f ist.

Bei der direkten Berechnung über die Koeffizientenformeln für die reelle Reihe wäre obiges Lemma ebenfalls nützlich gewesen: Da f eine ungerade Funktion ist, treten nur Sinusterme auf, und deren Koeffizienten

sind

$$b_\ell = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sinh t\,\sin\ell t\,dt\,.$$

Der Integrand hier ist in Exponentialform gleich

$$\frac{e^t - e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^{i\ell t} - e^{-i\ell t}}{2i} = \frac{e^{t(1+i\ell)}}{4i} - \frac{e^{t(1-i\ell)}}{4i} - \frac{e^{-t(1-i\ell)}}{4i} + \frac{e^{-t(1+i\ell)}}{4i}\,,$$

und die Stammfunktion des Summanden

$$\frac{e^{\pm t(1\pm i\ell)}}{4i} \quad\text{ist}\quad \frac{e^{\pm t(1\pm i\ell)}}{\pm 4i(1\pm i\ell)}\,.$$

Die Stammfunktion des Integranden ist daher

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{t(1+i\ell)}}{4i(1+i\ell)} - \frac{e^{t(1-i\ell)}}{4i(1-i\ell)} - \frac{e^{-t(1-i\ell)}}{-4i(1-i\ell)} + \frac{e^{-t(1+i\ell)}}{-4i(1+i\ell)} \\
&\qquad = \frac{e^{t(1+i\ell)} - e^{-t(1+i\ell)}}{4i(1+i\ell)} - \frac{e^{t(1-i\ell)} - e^{-t(1-i\ell)}}{4i(1-i\ell)}\,,
\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}
b_\ell &= \frac{e^{t(1+i\ell)} - e^{-t(1+i\ell)}}{4\pi i(1+i\ell)}\,\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{e^{t(1-i\ell)} - e^{-t(1-i\ell)}}{4i(1-i\ell)}\,\Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{\left(e^{\pi(1+i\ell)} - e^{-\pi(1+i\ell)}\right) - \left(e^{-\pi(1+i\ell)} - e^{\pi(1+i\ell)}\right)}{4\pi i(1+i\ell)} \\
&\quad - \frac{\left(e^{\pi(1-i\ell)} - e^{-\pi(1-i\ell)}\right) - \left(e^{-\pi(1-i\ell)} - e^{\pi(1-i\ell)}\right)}{4\pi i(1-i\ell)} \\
&= \frac{(-1)^\ell\left(e^{\pi} - e^{-\pi} - e^{-\pi} + e^{\pi}\right)}{4\pi i(1+i\ell)} - \frac{(-1)^\ell\left(e^{\pi} - e^{-\pi} - e^{-\pi} + e^{\pi}\right)}{4\pi i(1-i\ell)} \\
&= (-1)^\ell\left(\frac{\sinh\pi}{\pi i(1+i\ell)} - \frac{\sinh\pi}{\pi i(1-i\ell)}\right) \\
&= (-1)^\ell\frac{\sinh\pi}{\pi i}\left(\frac{1}{1+i\ell} - \frac{1}{1-i\ell}\right) \\
&= (-1)^\ell\frac{\sinh\pi}{\pi i}\,\frac{(1-i\ell)-(1+i\ell)}{1+\ell^2} = (-1)^\ell\frac{\sinh\pi}{\pi}\,\frac{-2\ell}{\ell^2+1}\,.
\end{aligned}$$

Das sind, abgesehen von der anderen Bezeichnung für den Index, genau die oben berechneten Koeffizienten.

Wir können das Integral auch ganz ohne komplexe Zahlen ausrechnen: Zweimalige Anwendung der Regel für partielle Integration liefert

$$b_\ell = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sinh t\, \sin \ell t\, dt = \frac{1}{\pi}\cosh t \sin \ell t \,\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\ell}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cosh t \cos \ell t\, dt$$

$$= -\frac{\ell}{\pi}\left(\sinh t \cos \ell t \,\Big|_{-\pi}^{\pi} + \ell \int_{-\pi}^{\pi} \sinh t \sin \ell t\, dt\right)$$

$$= -\frac{\ell}{\pi}\left((-1)^\ell \cdot 2\sinh \pi + \ell \pi b_\ell\right) = -\frac{\ell}{\pi}(-1)^\ell \cdot 2\sinh \pi - \ell^2 b_\ell\,.$$

Somit ist

$$(1+\ell^2)\, b_\ell = -\frac{2\sinh \pi}{\pi}(-1)^\ell \ell \quad \text{und} \quad b_\ell = -\frac{2\sinh \pi}{\pi}\frac{(-1)^\ell \ell}{\ell^2+1}\,.$$

Damit haben wir die FOURIER-Reihe von f auf drei verschiedene Weisen berechnet; das Ergebnis war natürlich in allen drei Fällen dasselbe, der Weg dorthin aber recht verschieden. Es hängt sowohl vom Problem als auch von persönlichen Vorlieben ab, welchen Rechengang man vorzieht; gerade bei Funktionen, bei denen die FOURIER-Reihe sowohl Sinus- als auch Cosinusterme enthält, wird aber oft der Weg über die komplexe FOURIER-Reihe am schnellsten sein, da man dann nur ein Integral berechnen muß.

Auch für Untersuchung der Eigenschaften von FOURIER-Reihen ist die komplexe Form oft besser geeignet als die reelle; wir wollen daher als nächstes versuchen, die komplexe Reihe ohne den Umweg über die reelle direkt zu verstehen.

d) Hermitesche Vektorräume

Fundamental für die Berechnung der reellen FOURIER-Koeffizienten war das (Fast-)Skalarprodukt auf $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; wir sollten daher versuchen, etwas ähnliches auch im Komplexen zu definieren.

Wir beginnen der Einfachheit halber mit $\mathbb{C}^n$.

Die unmittelbare Verallgemeinerung des Skalarprodukts des $\mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{C}^n$ ist nicht sonderlich nützlich: Dann hätten wir nämlich zum Beispiel

$$\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + i \cdot i = 0\,.$$

Solche Vektoren mit Quadrat Null sind zwar in einigen Anwendungen (wie etwa der speziellen Relativitätstheorie) durchaus sinnvoll, meist möchte man aber das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst als Quadrat seiner Länge interpretieren, und die sollte für alle Vektoren außer dem Nullvektor positiv sein.

Wir haben bereits jeder komplexen Zahl ungleich Null eine positive reelle Zahl zugeordnet, nämlich ihren Betrag

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}\,.$$

Entsprechend können wir zwei komplexen Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}$$

aus $\mathbb{C}^n$ das Produkt

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{\ell=1}^{n} v_\ell \overline{w_\ell}$$

zuordnen. Auch hier ist offensichtlich $\vec{v} \cdot \vec{v}$ für jeden Vektor außer dem Nullvektor eine positive reelle Zahl, denn wir addieren ja die Betragsquadrate der Komponenten des Vektors.

Dieses Produkt erfüllt nun allerdings nicht mehr die Forderungen aus der Definition eines Skalarprodukts: Es ist zwar noch linear im ersten Argument, nicht mehr aber im zweiten, denn schon bei Multiplikation des zweiten Vektors mit einer komplexen Zahl $\lambda \notin \mathbb{R}$ ist

$$\vec{v} \cdot (\lambda \vec{w}) = \sum_{\ell=1}^{n} v_\ell \cdot \overline{\lambda w_\ell} = \overline{\lambda} \cdot \sum_{\ell=1}^{n} v_\ell \overline{w_\ell} = \overline{\lambda} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w}) \neq \lambda \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})\,.$$

Bezüglich der Addition gibt es keine Probleme; somit wird die Linearitätsregel für das zweite Argument zu

$$\vec{u} \cdot (\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \overline{\lambda} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) + \overline{\mu} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{w}) .$$

Die Symmetriebedingung ist ebenfalls verletzt, denn schon für zwei komplexe Zahlen z und w ist das Produkt $z\overline{w} = \overline{w}z = \overline{w\overline{z}}$ im allgemeinen verschieden von $w\overline{z}$, und entsprechend ist auch für zwei Vektoren

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \overline{\vec{w} \cdot \vec{v}} .$$

Der Begriff des HERMITEschen Vektorraums formalisiert diese Eigenschaften:

Definition: Ein HERMITEscher Vektorraum ist ein Paar $(V, \cdot)$ bestehend aus einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V und einer Abbildung

$$\cdot : V \times V \to \mathbb{C}; \quad (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} \cdot \vec{w}$$

mit folgenden Eigenschaften:

a) $\cdot$ ist linear im ersten Argument, d.h.

$$(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{w}) + \mu(\vec{v} \cdot \vec{w})$$

für alle $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

b) $\cdot$ ist HERMITEsch symmetrisch, d.h.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \overline{\vec{w} \cdot \vec{v}}$$

für alle $\vec{v}, \vec{w} \in V$.

c) $\cdot$ ist positiv definit, d.h.

$$\vec{v} \cdot \vec{v} > 0$$

ist eine positive *reelle* Zahl für alle Vektoren $\vec{v} \neq \vec{0}$ aus V.

Die bilineare Abbildung $\cdot$ heißt HERMITE*sches Skalarprodukt;* auch hier werden wir den Malpunkt nicht immer hinschreiben und bei Verwechslungsgefahr mit anderen Produkten auch gelegentlich $(\vec{v}, \vec{w})$ anstelle von $\vec{v} \cdot \vec{w}$ schreiben.

CHARLES HERMITE (1822–1901) war einer der bedeutendsten Mathematiker des neunzehnten Jahrhunderts. Zu seinen Resultaten zählen eine Vereinfachung des ABELschen Beweises, daß Gleichungen fünften Grades im allgemeinen nicht durch Wurzelausdrücke gelöst werden können, die explizite Lösung solcher Gleichungen durch elliptische Funktionen, der Nachweis, daß e eine transzendente Zahl ist, also keiner algebraischen Gleichung über $\mathbb{Q}$ genügt, eine Interpolationsformel und vieles mehr. HERMITE galt als ein sehr guter akademischer Lehrer; er unterrichtete an der École Polytechnique, dem Collège de France, der École Normale Supérieure und der Sorbonne.

Durch Kombination der Eigenschaften *a)* und *b)* kann man leicht ausrechnen, was anstelle der Linearität für das zweite Argument gilt: Genau wie im obigen Beispiel ist

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot (\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) &= \overline{(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) \cdot \vec{u}} = \overline{\lambda(\vec{v} \cdot \vec{u}) + \mu(\vec{w} \cdot \vec{u})} \\ &= \overline{\lambda}\,\overline{(\vec{v} \cdot \vec{u})} + \overline{\mu}\,\overline{(\vec{w} \cdot \vec{u})} = \overline{\lambda}\,(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \overline{\mu}\,(\vec{u} \cdot \vec{w}) .\end{aligned}$$

Diese Eigenschaft, zusammen mit der Linearität im ersten Argument, bezeichnet man gelegentlich als *Sesquilinearität,* d.h. „anderthalbfache Linearität“, im Gegensatz zur echten Linearität in zwei Argumenten, der *Bilinearität.*

Typisches Beispiel eines HERMITEschen Vektorraums ist der $\mathbb{C}^n$ mit dem eingangs definierten Produkt; was uns hier in erster Linie interessiert sind jedoch HERMITEsche Vektorräume von komplexwertigen Funktionen.

Auch in HERMITEschen Vektorräumen werden wir $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ gelegentlich als *Länge* des Vektors $\vec{v}$ bezeichnen; auf die Definition von Winkeln hingegen wollen wir verzichten, da die Übernahme der entsprechenden Definition für EUKLIDische Vektorräume hier auf geometrisch nicht sinnvolle komplexe Winkel führen würde.

Ansonsten können und werden wir EUKLIDische und HERMITEsche Vektorräume im folgenden gleichzeitig behandeln: Ersetzt man in der Definition eines HERMITEschen Vektorraums überall $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}$, so erhält man einen EUKLIDischen Vektorraum. Zwar stehen noch an vielen Stellen die Querstriche für komplexe Konjugation, aber da sich eine

reelle Zahl unter komplexer Konjugation nicht ändert, sind die Konjugationsstriche nur überflüssig, nicht schädlich.

e) Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Als erstes Beispiel wollen wir die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung für EUKLIDische und HERMITEsche Vektorräume in einer Form beweisen, die auch für EUKLIDische Vektorräume eine leichte Verallgemeinerung der bereits bekannten Ungleichung ist und die darauf Rücksicht nimmt, daß wir in $\mathrm{L}_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und $\mathrm{L}_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$ kein wirkliches Skalar- *bzw.* HERMITEsches Produkt haben:

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung: Für $k = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sei auf dem k-Vektorraum V eine Abbildung $\cdot\colon V \times V \to k;\ (f,g) \mapsto f \cdot g$ gegeben mit den Eigenschaften
a) $(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{w}) + \mu(\vec{v} \cdot \vec{w})$
b) $\vec{w} \cdot \vec{v} = \overline{\vec{v} \cdot \vec{w}}$
c) $\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$ für alle $\vec{v} \in V$.
Dann ist für alle Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in V$

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \ .$$

(Man beachte, daß hier nicht gefordert wird, daß $\vec{v} \cdot \vec{v} > 0$ für $\vec{v} \neq \vec{0}$.)

Der *Beweis* beruht auf folgendem Trick: Wegen *c)* ist für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) \cdot (\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) &= \lambda\overline{\lambda}\,\vec{v} \cdot \vec{v} + \lambda\overline{\mu}\,\vec{v} \cdot \vec{w} + \mu\overline{\lambda}\,\vec{w} \cdot \vec{v} + \mu\overline{\mu}\,\vec{w} \cdot \vec{w} \\ &= \lambda\overline{\lambda}\,\vec{v} \cdot \vec{v} + \lambda\overline{\mu}\,\vec{v} \cdot \vec{w} + \overline{\lambda}\mu\,\overline{\vec{v} \cdot \vec{w}} + \mu\overline{\mu}\,\vec{w} \cdot \vec{w}\end{aligned}$$

stets nichtnegativ. Speziell für $\lambda = (\vec{w} \cdot \vec{w}) \in \mathbb{R}$ und $\mu = -(\vec{v} \cdot \vec{w})$ erhalten wir

$$(\vec{w} \cdot \vec{w})^2(\vec{v} \cdot \vec{v}) - 2(\vec{w} \cdot \vec{w})(\overline{\vec{v} \cdot \vec{w}})(\vec{v} \cdot \vec{w}) + (\vec{v} \cdot \vec{w})(\overline{\vec{v} \cdot \vec{w}})(\vec{w} \cdot \vec{w}) \geq 0\,,$$

also

$$(\vec{w} \cdot \vec{w})\big((\vec{w} \cdot \vec{w})(\vec{v} \cdot \vec{v}) - |\vec{v} \cdot \vec{w}|^2\big) \geq 0\,.$$

Ist hier $\vec{w} \cdot \vec{w} \neq 0$, können wir durch diese Zahl dividieren und die Behauptung ist bewiesen. Andernfalls können wir, falls wenigstens $\vec{v} \cdot \vec{v}$ nicht null ist, im obigen Argument die Rollen von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ vertauschen und damit die Behauptung beweisen.

Wenn schließlich $\vec{v} \cdot \vec{v}$ und $\vec{w} \cdot \vec{w}$ beide null sind, folgt aus

$$(\vec{v} \pm \vec{w}) \cdot (\vec{v} \pm \vec{w}) = \pm(\vec{v} \cdot \vec{w} + \overline{\vec{v} \cdot \vec{w}}) = \pm 2\,\mathfrak{Re}(\vec{v}\vec{w}) \geq 0\,,$$

daß der Realteil von $\vec{v} \cdot \vec{w}$ verschwindet, und genauso verschwindet auch der Imaginärteil, da $(i\vec{v} \pm \vec{w}) \cdot (i\vec{v} \pm \vec{w}) = \pm 2\,\mathfrak{Im}(\vec{v} \cdot \vec{w}) \geq 0$ ist. Somit ist $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, und die Ungleichung gilt auch in diesem Fall. ∎

f) Orthonormalbasen Hermitescher Vektorräume

Genau wie in EUKLIDischen Vektorräumen bezeichnen wir auch im HERMITEschen Fall zwei Vektoren als *orthogonal,* wenn ihr (HERMITEsches) Skalarprodukt verschwindet. Mit diesem Begriff kann die Definition von Orthogonal- und Orthonormalbasen wörtlich von EUKLIDischen Fall übernommen werden:

Definition: *a)* Eine Basis $\mathcal{B}$ eines EUKLIDischen oder HERMITEschen Vektorraums heißt *Orthogonalbasis,* wenn jedes Element von $\mathcal{B}$ orthogonal zu allen übrigen ist.
b) Eine Orthogonalbasis $\mathcal{B}$ heißt *Orthonormalbasis,* wenn zusätzlich für jeden Vektor $\vec{b} \in \mathcal{B}$ gilt: $\vec{b} \cdot \vec{b} = 1$.

Damit ist klar, daß auch im Komplexen die Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis des n-dimensionalen Vektorraums $\mathbb{C}^n$ bilden.

Genau wie im EUKLIDischen Fall gilt, daß tatsächlich *jeder* HERMITEsche Vektorraum eine Orthonormalbasis hat; für den Beweis werden wir uns allerdings, wie immer, wenn von Basen die Rede ist, zur Vermeidung von logischen Schwierigkeiten auf den endlichdimensionalen Fall beschränken:

Satz: Jeder endlichdimensionale HERMITEsche Vektorraum V hat eine Orthonormalbasis.

Der *Beweis* geht fast genauso wie im EUKLIDischen Fall: Wir wissen bereits, daß V *irgendeine* Basis $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ hat; daraus konstruieren wir zunächst eine *Orthogonalbasis* nach dem GRAM-SCHMIDTschen Orthogonalisierungsverfahren. Dieses besteht bekanntlich aus n Schritten, wobei im r-ten Schritt eine Orthogonalbasis $\{vc_1, \ldots, \vec{c}_r\}$ von $[\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r]$ konstruiert wird.

Der erste Schritt ist der einfachste: Da es noch keine Orthogonalitätsbedingung für $\vec{c}_1$ gibt, können wir einfach $\vec{c}_1 = \vec{b}_1$ setzen.

Nachdem wir $r \geq 1$ Schritte durchgeführt haben, haben wir r linear unabhängige Vektoren $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_r$ mit $\vec{c}_i \cdot \vec{c}_j = 0$ für $i \neq j$ aus dem von $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r$ aufgespannten Untervektorraum. Ist $r = n$, haben wir eine Orthogonalbasis; andernfalls muß ein auf den bisher konstruierten $\vec{c}_i$ senkrecht stehender Vektor $\vec{c}_{r+1}$ gefunden werden, der zusammen mit diesen den von $\vec{b}_1$ bis $\vec{b}_{r+1}$ erzeugten Untervektorraum erzeugt.

Da $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_r$ und $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r$ denselben Untervektorraum erzeugen, gilt dasselbe für $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_r, \vec{b}_{r+1}$ und $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{r+1}$; das Problem ist, daß $\vec{b}_{r+1}$ im allgemeinen nicht orthogonal zu den $\vec{c}_i$ sein wird. Wir dürfen $\vec{b}_{r+1}$ aber abändern durch einen beliebigen Vektor aus dem von $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_r$ aufgespannten Untervektorraum; also setzen wir

$$\vec{c}_{r+1} = \vec{b}_{r+1} + \lambda_1 \vec{c}_1 + \cdots + \lambda_r \vec{c}_r$$

und versuchen, die λ_i so zu bestimmen, daß dieser Vektor orthogonal zu $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_r$ wird.

Wegen der Orthogonalität der $\vec{c}_i$ ist

$$\vec{c}_{r+1} \cdot \vec{c}_i = \vec{b}_{r+1} \cdot \vec{c}_i + \sum_{j=1} \lambda_j (\vec{c}_j \cdot \vec{c}_i) = \vec{b}_{r+1} \cdot \vec{c}_i + \lambda_i (\vec{c}_i \cdot \vec{c}_i)\,;$$

setzen wir daher $\lambda_i = -\dfrac{\vec{b}_{r+1} \cdot \vec{c}_i}{\vec{c}_i \cdot \vec{c}_i}$, so ist $\vec{v} \cdot \vec{c}_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, r$.

Nach dem n-ten Schritt haben wir eine Orthogonalbasis $\{\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n\}$ von V konstruiert. Daraus wird die gewünschte *Orthonormalbasis* $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, wenn wir jeden Vektor durch seine Länge dividieren, d.h.

$$\vec{e}_i = \frac{\vec{c}_i}{\|\vec{c}_i\|}\,.$$

■

Um auch den Umgang mit HERMITEschen Skalarprodukten und das Rechnen mit komplexen Zahlen zu üben, betrachten wir als Beispiel den von

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1+2i \\ -2+i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1+2i \\ -i \\ -4-i \\ 1+2i \end{pmatrix}$$

aufgespannten Untervektorraum von $\mathbb{C}^4$.

Wie üblich können wir bei der Anwendung des GRAM-SCHMIDTschen Orthogonalisierungsverfahrens $\vec{c}_1 = \vec{b}_1$ setzen; im zweiten Schritt suchen wir einen Vektor $\vec{c}_2 = \vec{b}_2 + \lambda_1 \vec{c}_1$ mit der Eigenschaft, daß

$$\vec{c}_2 \cdot \vec{c}_1 = (\vec{b}_2 + \lambda_1 \vec{c}_1) \cdot \vec{c}_1 = \vec{b}_2 \cdot \vec{c}_1 + \lambda_1 (\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1) = 0$$

ist. Bis hierher geht alles genauso wie im reellen Fall, allerdings war es dort völlig irrelevant, ob wir $\vec{c}_2 \cdot \vec{c}_1 = 0$ oder $\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2 = 0$ fordern wollten. Hier im Komplexen ist das zwar grundsätzlich auch noch irrelevant, denn wegen der Eigenschaft

$$\vec{c}_2 \cdot \vec{c}_1 = \overline{\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2}$$

verschwindet das eine Produkt genau dann, wenn auch das andere verschwindet. Rechnerisch gibt es allerdings einen Unterschied, denn

$$\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2 = \vec{c}_1 \cdot (\vec{b}_2 + \lambda_1 \vec{c}_1) = \vec{c}_1 \cdot \vec{b}_2 + \overline{\lambda}_1 (\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1) = 0$$

bestimmt $\overline{\lambda}_1$, nicht λ_1. Falls man dies beachtet, erhält man natürlich bei beiden Ansätzen denselben Wert von λ_1.

Um die komplexe Konjugation zu vermeiden, wählen wir hier den ersten Weg. Dazu benötigen wir die HERMITEschen Skalarprodukte

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1+2i \\ -2+i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bei deren Berechnung darf man auf keinen Fall vergessen, die Einträge des jeweils zweiten Vektors komplex zu konjugieren, d.h.

$$\begin{aligned}\vec{b}_2 \cdot \vec{c}_1 &= (1+2i)\cdot\overline{1} + (-2+i)\cdot\overline{i} + (-i)\cdot\overline{(-i)} + (-1)\cdot\overline{(-1)} \\ &= (1+2i)\cdot 1 + (-2+i)\cdot(-i) + (-i)\cdot i + (-1)\cdot(-1)\ . \\ &= (1+2i) + (1+2i) + 1 + 1 = 4 + 4i\end{aligned}$$

Entsprechend ist

$$\begin{aligned}\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1 &= 1\cdot\overline{1} + i\cdot\overline{i} + (-i)\cdot\overline{(-i)} + (-1)\cdot\overline{(-1)} \\ &= 1\cdot 1 + i\cdot(-i) + (-i)\cdot i + (-1)\cdot(-1) = 1+1+1+1 = 4\,,\end{aligned}$$

wobei das allerdings auch mit weniger Mühe einzusehen ist: Da für einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ mit Komponenten $v_1, \ldots, v_n$

$$\vec{v}\cdot\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \overline{v_i} = \sum_{i=1}^{n} |v_i|^2$$

ist, hätte es genügt, einfach die Betragsquadrate der vier Einträge aufzusummieren, wobei im vorliegenden Fall trivial ist, daß alle diese Beträge gleich eins sind.

Einsetzen der beiden Skalarprodukte in die Gleichung für λ_1 zeigt, daß

$$(4+4i) + 4\lambda_1 = 0 \quad \text{und damit} \quad \lambda_1 = \frac{-4-4i}{4} = -1-i$$

sein muß. Somit ist

$$\begin{aligned}\vec{c}_2 = \vec{b}_2 + \lambda_1\vec{c}_1 &= \begin{pmatrix} 1+2i \\ -2+i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} - (1+i)\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+2i \\ -2+i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+i \\ -1+i \\ 1-i \\ -1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -1 \\ i \end{pmatrix}\ .\end{aligned}$$

Im dritten Schritt muß ein Vektor

$$\vec{c}_3 = \vec{b}_3 + \mu_1\vec{c}_1 + \mu_2\vec{c}_2$$

berechnet werden mit

$$\vec{c}_3\cdot\vec{c}_1 = \vec{c}_3\cdot\vec{c}_2 = 0\,.$$

Hier ist

$$\vec{c}_3\cdot\vec{c}_1 = \vec{b}_3\cdot\vec{c}_1 + \mu_1\vec{c}_1\cdot\vec{c}_1 + \mu_2\vec{c}_2\cdot\vec{c}_1 = \vec{b}_3\cdot\vec{c}_1 + \mu_1\vec{c}_1\cdot\vec{c}_1\,,$$

da der zweite Schritt sicherstellte, daß $\vec{c}_2\cdot\vec{c}_1 = 0$ ist. Das HERMITEsche Skalarprodukt $\vec{c}_1\cdot\vec{c}_1 = 4$ kennen wir bereits, und eine kurze Rechnung zeigt, daß

$$\vec{b}_3\cdot\vec{c}_1 = (1+2i) + (-1) + (1-4i) + (-1-2i) = -4i$$

ist. Also folgt

$$\mu_1 = -\frac{\vec{b}_3\cdot\vec{c}_1}{\vec{c}_1\cdot\vec{c}_1} = -\frac{-4i}{4} = i$$

und entsprechend folgt auch

$$\mu_2 = -\frac{\vec{b}_3\cdot\vec{c}_2}{\vec{c}_2\cdot\vec{c}_2} = -\frac{8}{4} = -2\,,$$

wobei diesesmal die genaue Berechnung der beiden HERMITEschen Skalarprodukte dem Leser als Übungsaufgabe überlassen sei. Der dritte Basisvektor $\vec{c}_3 = \vec{b}_3 + i\vec{c}_1 - 2\vec{c}_2$ ist daher gleich

$$\begin{pmatrix} 1+2i \\ -i \\ -4-i \\ 1+2i \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ -1-i \\ 1-i \end{pmatrix}\ .$$

Damit ist eine *Orthogonalbasis* gefunden; wenn wir eine *Orthonormalbasis* wollen, müssen wir die Vektoren noch durch ihre Längen dividieren: Wir wissen bereits, daß $\vec{c}_1\cdot\vec{c}_1 = \vec{c}_2\cdot\vec{c}_2 = 4$ ist, so daß die ersten beiden Vektoren die Länge zwei haben; $\vec{c}_3$ hat vier Komponenten vom Betrag zwei, also ist

$$\vec{c}_3\cdot\vec{c}_3 = 4\cdot 2 = 8 \quad \text{und} \quad \|\vec{c}_2\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\,.$$

Die gesuchte Orthonormalbasis besteht daher aus den Vektoren

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix},\quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ -1-i \\ 1-i \end{pmatrix}\ .$$

Für das folgende sehr wichtig ist ein weiterer im EUKLIDischen Fall bereits wohlbekannter Satz:

Satz: $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ sei eine Orthonormalbasis eines EUKLIDischen oder HERMITEschen Vektorraums V.
a) Sind $\vec{v} = a_1\vec{e}_1 + \cdots + a_n\vec{e}_n$ und $\vec{w} = b_1\vec{e}_1 + \cdots + b_n\vec{e}_n$ zwei Vektoren aus V, so ist

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i} \, .$$

b) Für einen Vektor $\vec{v} \in V$ ist

$$\vec{v} = a_1\vec{e}_1 + \cdots + a_n\vec{e}_n \quad \text{mit} \quad a_i = \vec{v} \cdot \vec{e}_i \, .$$

Der *Beweis* ist in beiden Fällen ein Einzeiler:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i\overline{b_j}\ \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \sum_{i=1}^{n} a_i\overline{b_i} \, , \quad \text{denn} \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{e}_i = (a_1\vec{e}_1 + \cdots + a_n\vec{e}_n) \cdot \vec{e}_i = \sum_{j=1}^{n} a_j \vec{e}_j \cdot \vec{e}_i = a_i \, .$$

Bezüglich einer Orthonormalbasis sieht also jedes (gewöhnliche oder HERMITEsche) Skalarprodukt aus wie das entsprechende Standardskalarprodukt – und das unabhängig von der gewählten Orthonormalbasis. Sobald man Vektoren bezüglich einer Orthonormalbasis dargestellt hat, lassen sich also alle Skalarprodukte sowie auch die Basisdarstellung eines beliebigen Vektors auf die einfachst denkbare Weise darstellen.

g) Komplexe trigonometrische Polynome

Wie im Reellen fixieren wir eine Periode $T > 0$ und setzen

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \, .$$

Definition: Ein komplexes trigonometrisches Polynom zur Periode T ist eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die sich mit einem geeigneten $N \in \mathbb{N}$ als

$$f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{k\cdot i\omega t}$$

schreiben läßt.

Aufgrund der EULERschen Beziehungen ist jedes reelle trigonometrische Polynom gleichzeitig ein komplexes, denn

$$\begin{aligned}
&a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{M} b_\ell \sin \ell\omega t \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \frac{e^{k\cdot i\omega t} + e^{-k\cdot i\omega t}}{2} + \sum_{\ell=1}^{M} b_\ell \frac{e^{\ell\cdot i\omega t} e^{-\ell\cdot i\omega t}}{2i} \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{2} e^{k\cdot i\omega t} + \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{2} e^{-k\cdot i\omega t} - i\sum_{\ell=1}^{M} \frac{b_\ell}{2} e^{\ell\cdot i\omega t} + i\sum_{\ell=1}^{M} \frac{b_\ell}{2} e^{-\ell\cdot i\omega t} \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{k\cdot i\omega t} + \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-k\cdot i\omega t} \, .
\end{aligned}$$

Schreibt man dies in der üblichen Weise als komplexes trigonometrisches Polynom $\sum c_k e^{k\cdot i\omega t}$, ist also

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k) & \text{für } k > 0 \\ a_0 & \text{für } k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) & \text{für } k < 0 \end{cases} \, .$$

Insbesondere sind c_k und c_{-k} dann für alle k komplex konjugiert zueinander; c_0 ist reell und somit zu sich selbst konjugiert.

Ist umgekehrt für ein komplexes trigonometrisches Polynom $c_k = \overline{c_{-k}}$ für alle k, so ist mit $c_k = d_k + ie_k$ und $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
c_k e^{k\cdot i\omega t} + c_{-k} e^{-k\cdot i\omega t} &= d_k\big(e^{k\cdot i\omega t} + e^{-k\cdot i\omega t}\big) + ie_k\big(e^{k\cdot i\omega t} - e^{-k\cdot i\omega t}\big) \\
&= 2d_k \cos k\omega t - 2e_k \sin k\omega t \, ,
\end{aligned}$$

die Funktion läßt sich also auch als reelles trigonometrisches Polynom schreiben mit

$$\begin{aligned}
a_0 &= c_0 \\
a_k &= 2\,\mathfrak{Re}\, c_k \quad \text{für } k \geq 1 \, . \\
b_\ell &= -2\,\mathfrak{Im}\, c_\ell
\end{aligned}$$

Auch auf dem Vektorraum aller komplexer trigonometrischer Polynome betrachten wir natürlich das Produkt

$$(f,\, g) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

und berechnen als Beispiel das Produkt zweier Basisfunktionen:

$$(e^{k\cdot i\omega t},\, e^{\ell\cdot i\omega t}) = \frac{1}{T}\int_0^T e^{k\cdot i\omega t}\overline{e^{\ell\cdot i\omega t}}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T e^{k\cdot i\omega t}\, e^{-\ell\cdot i\omega t}\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T e^{(k-l)\cdot i\omega t}\,dt\,.$$

Für $k = \ell$ ist der Integrand gleich eins, das Integral also gleich T und das Skalarprodukt gleich eins.

Für $k \neq \ell$ ist der Integrand eine echte Exponentialfunktion; wie wir aus Abschnitt *b)* wissen, berechnet sich ihre Stammfunktion nach derselben Formel wie im Reellen, d.h.

$$\int_0^T e^{(k-\ell)\cdot i\omega t}\,dt = \frac{1}{k-\ell}e^{(k-\ell)\cdot i\omega t}\,\Big|_0^T = \frac{1}{k-\ell}(e^0 - e^{(k-\ell)\cdot i\omega T}) = 0\,,$$

da $\omega T = 2\pi$ ist. Also ist

$$(e^{k\cdot i\omega t},\, e^{\ell\cdot i\omega t}) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = \ell \\ 0 & \text{für } k \neq \ell \end{cases}.$$

Lemma: Mit obigem Produkt wird der Vektorraum aller komplexer trigonometrischer Polynome der Periode T zu einem HERMITEschen Vektorraum. Die Funktionen $e^{k\cdot i\omega t}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ bilden eine Orthonormalbasis dieses Vektorraums.

Beweis: Die verlangten Linearitäts- und Symmetrieeigenschaften folgen aus der Linearität der Integration und deren Vertauschbarkeit mit

der komplexen Konjugation. Für die positive Definitheit beachte man, daß $f(t)\overline{f(t)}$ eine stetige reellwertige Funktion ist, die keine negativen Werte annimmt. Für solche Funktionen wissen wir aus Kapitel 2, §1*a),* daß ihr Integral über ein endliches Intervall nichtnegativ ist und genau dann verschwindet, wenn die Funktion im gesamten Intervall identisch verschwindet.

Die Behauptung über die Orthonormalbasis schließlich folgt sofort aus den gerade berechneten Produkten. ∎

Korollar: Ist f ein komplexes trigonometrisches Polynom, so ist

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{k\cdot i\omega t} \quad \text{mit} \quad c_k = (f,\, e^{k\cdot i\omega t}) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-k\cdot i\omega t}\,dt\,.$$

(Die Summe in diesem Korollar ist endlich, da alle bis auf endlich viele Koeffizienten verschwinden.)

Beweis: Nach Definition eines komplexen trigonometrischen Polynoms ist f darstellbar als Linearkombination endlich vieler Funktionen $e^{k\cdot i\omega t}$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Da diese Funktionen Teil einer Orthonormalbasis sind, ist der jeweilige Koeffizient gleich

$$(f,\, e^{k\cdot i\omega t}) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-k\cdot i\omega t}\,dt\,,$$

und da jede Basisfunktion $e^{\ell\cdot i\omega t}$, die nicht in der Linearkombination vorkommt, zu jeder Basisfunktion in der Linearkombination orthogonal ist, verschwindet $(f, e^{\ell\cdot i\omega t})$ für jede solche Funktion. ∎

Falls wir wieder ohne Rücksicht auf Konvergenzprobleme N gegen unendlich gehen lassen, führt uns auch dies wieder auf die Definition der komplexen FOURIER-Reihe, auf die wir in Abschnitt *a)* auf dem Umweg über reelle FOURIER-Reihen gekommen waren.

h) Das Hermitesche Produkt auf $\mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ und die Besselsche Ungleichung

Im vorigen Abschnitt hatten wir auf dem Vektorraum aller komplexer trigonometrischer Polynome ein HERMITEsches Skalarprodukt definiert durch die Festsetzung

$$(f,\,g) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}\,dt\,.$$

Zumindest *definieren* können wir $(f,\,g)$ auch für beliebige Funktionen $f, g \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$. Sowohl die Linearitätseigenschaft als auch die HERMITEsche Symmetrie zeigt man genauso wir dort, und auch die Forderung

$$(f,\,f) \geq 0 \quad \text{für alle} \quad f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$$

ist trivialerweise erfüllt. Probleme gibt es allerdings mit der positiven Definitheit: Für die Funktion f, die bei allen Vielfachen der Periode T den Wert eins annimmt und sonst überall verschwindet, ist $(f,\,f) = 0$, aber die Funktion ist nicht gleich der Nullfunktion.

Wir sprechen daher nicht von einem HERMITEschen Skalarprodukt, sondern nur von einem HERMITEschen Produkt; wie sich zeigen wird, ist es auch ohne die Definitheitseigenschaft recht nützlich.

Als erste Anwendung beweisen wir die BESSELsche Ungleichung:

Lemma: Für die FOURIER-Koeffizienten $c_k = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)e^{-k\cdot i\omega t}\,dt$ einer Funktion $f \in L_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\overline{c_k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{f(t)}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt\,;$$

insbesondere konvergiert die linke Summe also.

Beweis: Die rechte Seite der Ungleichung ist gerade das HERMITEsche Produkt $(f,\,f)$, und auch die FOURIER-Koeffizienten lassen sich als Produkte

$$c_k = (f,\,e^{k\cdot i\omega t})$$

schreiben. Wir wollen noch einige weitere Produkte ausrechnen.

Zunächst definieren wir die Teilsumme

$$S_N(t) \underset{\text{def}}{=} \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{k\cdot i\omega t}\,.$$

Dies ist ein trigonometrisches Polynom, und wir wissen daher schon aus §2*a)*, daß

$$(S_N,\,S_N) = \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2$$

ist.

Als nächstes betrachten wir das Produkt

$$(f - S_N,\,f - S_N) = (f,\,f) - (S_N,\,f) - (f,\,S_N) + (S_N,\,S_N)\,.$$

Auch wenn das HERMITEsche Produkt auf $L_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ nicht positiv definit ist, wissen wir doch, daß die linke (und damit auch die rechte) Seite zumindest nichtnegativ ist.

Wegen der Linearität des HERMITEschen Produkts im ersten Argument ist weiter

$$\begin{aligned}(S_N,\,f) &= \left(\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{k\cdot i\omega t},\,f\right) = \sum_{k=-N}^{N} c_k\left(e^{k\cdot i\omega t},\,f\right)\\ &= \sum_{k=-N}^{N} c_k\overline{(f,\,e^{k\cdot i\omega t})} = \sum_{k=-N}^{N} c_k\overline{c_k} = \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2\\ &= (S_N,\,S_N)\,,\end{aligned}$$

und da dies eine reelle Zahl ist, folgt auch

$$(f,\,S_N) = \overline{(S_N,\,f)} = (S_N,\,f) = (S_N,\,S_N)\,.$$

Fassen wir alles zusammen, ist also

$$0 \leq (f - S_N,\,f - S_N) = (f,\,f) - (S_N,\,S_N)$$

und damit

$$(S_N,\,S_N) \leq (f,f) \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Ausgeschrieben wird das zu

$$\sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 \le \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

und der Grenzübergang $N \to \infty$ führt zur gewünschten Ungleichung

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \le \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt\,,$$

wie behauptet. ∎

FRIEDRICH WILHELM BESSEL (1784–1846) verließ die Schule schon im Alter von 14 Jahren und wurde Lehrling eines Handelshauses. Dessen Überseehandel veranlaßte ihn zur Beschäftigung mit Geographie, Spanisch und Englisch und schließlich (für die Navigation) mit Astronomie. Nachdem er 1804 die Bahn des HALLEYschen Kometen berechnet hatte, bekam er 1806 eine Stelle als Astronom eines privaten Observatoriums. Seine Beiträge zur Mathematik entstanden aus seinen astronomischen Berechnungen. 1809 wurde er zum Direktor des Königsberger Observatoriums und zum Professor der Astronomie ernannt.

Aufgrund der Beziehungen zwischen reellen und komplexen FOURIER-Reihen (für die genau dieselben Formeln gelten, wie sie in §2*a)* für trigonometrische Polynome hergeleitet wurden) folgt daß für die reelle FOURIER-Reihe einer reellwertigen Funktion gilt

$$|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) \le \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,dt\,.$$

Insbesondere konvergieren also auch die beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \quad \text{und} \quad \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell^2\,.$$

i) Harmonische Analyse als lineare Abbildung

Die BESSELsche Ungleichung zeigt, daß nicht alle Folgen reeller oder komplexer Zahlen als FOURIER-Koeffizienten eine stückweise stetigen Funktion auftreten können: Zumindest muß die Summe ihrer Betragsquadrate konvergieren.

Betrachten wir den Vektorraum

$$\ell^2(\mathbb{Z},\,\mathbb{C}) \underset{\text{def}}{=} \left\{ c\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c(k)|^2 < \infty \right\};$$

so muß also die Funktion $c\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ mit $c(k) = c_k$ in diesem Vektorraum liegen; wir haben somit eine Abbildung

$$\mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{Z},\,\mathbb{C})\,,$$

die einer Funktion $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ ihre FOURIER-Koeffizienten zuordnet.

Um den Zusammenhang zwischen Funktionen und Koeffizientenfolgen besser zu verdeutlichen, definieren wir für $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ die Funktion

$$\widehat{f}\colon \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \\ k \mapsto \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)e^{-k\cdot i\omega t}\,dt \end{cases};$$

$\widehat{f}(k)$ ist also gerade der k-te FOURIER-Koeffizient von f.

Lemma: Die Zuordnung $f \mapsto \widehat{f}$ definiert eine lineare Abbildung von $\mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ nach $\ell^2(\mathbb{Z},\,\mathbb{C})$.

Der *Beweis* ist trivial wegen der Linearität der Integration. ∎

Als nächstes definieren wir auf $\ell^2(\mathbb{Z},\,\mathbb{C})$ ein HERMITEsches Skalarprodukt durch die Vorschrift

$$(c,\,d) \underset{\text{def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\overline{d_k}\,.$$

Wir müssen zeigen, daß dies erstens wohldefiniert ist, daß die Summe also überhaupt konvergiert, und daß es zweitens alle Forderungen an ein HERMITEsches Skalarprodukt erfüllt.

Da für zwei komplexe Zahlen z und w ist $\big(|z| - |w|\big)^2 \geq 0$, also

$$|zw| = |z\overline{w}| \leq \frac{1}{2}\big(|z|^2 + |w|^2\big) .$$

Für zwei Funktionen $c, d \in \ell^2(\mathbb{Z},\ \mathbb{C})$ ist daher für jede natürliche Zahl N

$$\left|\sum_{k=-N}^{N} c(k)\overline{d(k)}\right| \leq \sum_{k=-N}^{N} \big|c(k)\overline{d(k)}\big|$$
$$\leq \frac{1}{2}\left(\sum_{k=-N}^{N} |c(k)|^2 + \sum_{k=-N}^{N} |d(k)|^2\right) .$$

Nach Definition von $\ell^2(\mathbb{Z},\ \mathbb{C})$ konvergiert die rechte Seite für $N \to \infty$, also auch die linke.

Das Nachrechnen der Forderungen an ein HERMITEsches Skalarprodukt ist nun einfach: Abgesehen von der Tatsache, daß die Summen nicht mehr endlich sind, geht alles ganz genauso wie beim HERMITEschen Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$.

Mit diesem Skalarprodukt ausgedrückt bekommt die BESSELsche Ungleichung die kompakte Form

$$\left(\widehat{f},\ \widehat{f}\right) \leq (f,\ f) \quad \text{für alle} \quad f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\ \mathbb{C}) .$$

§4: Konvergenz von Fourier-Reihen

Abgesehen von den beiden Beispielen der Rechteckschwingung und des Sägezahns wissen wir bislang noch von keiner FOURIER-Reihe, ob und gegebenenfalls wohin sie konvergiert. In diesem Paragraphen soll dies zumindest für stückweise differenzierbare Funktionen geklärt werden. Als zentral wird sich dabei eine neue Konstruktion herausstellen, die *Faltung zweier Funktionen.*

a) Faltungen

Definition: Für $f, g \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ bezeichnen wir die Funktion

$$f \star g(t) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$

als (periodische) Faltung von f und g.

Anschaulich kann man sich die Faltung als eine Art Mittelung von g vorstellen mit einer Gewichtsfunktion f. Im zweidimensionalen (nichtperiodischen) Analogon kann man beispielsweise ein optisch defokusiertes Bild so beschreiben: Bei einer perfekten optischen Abbildung einer Ebene hängt jeder Bildpunkt von genau einem Punkt der Ebenen ab; ist das System aber defokusiert, so kommen auch noch Einflüsse der Nachbarpunkte dazu, die umso größer sind, je näher die Punkte beieinanderliegen. Eine Helligkeitsverteilung $f(s,t)$ wird dann abgebildet auf

$$F(s,t) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{\left((s-\sigma)^2+(t-\tau)^2\right)/2a} f(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau ,$$

wobei der Parameter a umso größer ist, je stärker das Bild defokusiert ist. Für kleines a ist der Effekt also eher ein Weichzeichnen als eine echte Unschärfe, und dieser Glättungseffekt ist ein allgemeines Charakteristikum von Faltungen:

Lemma: Für $f, g \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ ist $f \star g$ eine stetige Funktion.

(Man beachte, daß f und g beide nur als stückweise stetig vorausgesetzt sind!)

Beweis: Als stückweise stetige periodische Funktion ist g insbesondere beschränkt: Für jedes offene Intervall $(t_j,\ t_{j+1})$, in dem f stetig ist, müssen nach Definition der stückweisen Stetigkeit der rechtsseitige Grenzwert $\lim\limits_{\substack{t\to t_j\\ t>t_j}} g(t)$ und der linksseitige Grenzwert $\lim\limits_{\substack{t\to t_{j+1}\\ t<t_{j+1}}} g(t)$ existieren; damit kann die Einschränkung von g auf das offene Intervall $(t_j,\ t_{j+1})$ fortgesetzt werden zu einer stetigen Funktion auf dem

abgeschlossenen Intervall $[t_j,\, t_{j+1}]$ (die an den Intervallenden natürlich nicht mit g übereinstimmen muß). Damit hat der Betrag dieser Funktion ein endliches Maximum M_j, das auch eine Schranke für g im offenen Intervall $(t_j,\, t_{j+1})$ ist. Nimmt man nun als M das Maximum aller M_j sowie auch der Beträge $\left|g(t_j)\right|$ der Funktionswerte an den potentiellen Sprungstellen, so ist $|g(t)| \le M$ für alle $t \in [0,\, T]$ und damit auch für alle $t \in \mathbb{R}$.

Seien nun t_1 und t_2 Punkte aus $\mathbb{R}$; dann ist

$$\begin{aligned} |f \star g(t_1) - f \star g(t_2)| &\le \frac{1}{T} \int_0^T |f(t_1-\tau) - f(t_2-\tau)|\, |g(\tau)|\, d\tau \\ &\le \frac{M}{T} \int_0^T |f(t_1-\tau) - f(t_2-\tau)|\, d\tau\,. \end{aligned}$$

Das noch verbliebene Integral mißt die Fläche zwischen den Graphen von $f(t)$ und $f(t+t_2-t_1)$ über eine Periode von f; wegen der stückweisen Stetigkeit von f geht diese gegen null für $t_2 \to t_1$. ∎

b) Die Fourier-Reihe einer Faltung

Die Nützlichkeit von Faltungen für FOURIER-Reihen ergibt sich aus folgender Formel:

Satz: : Für $f, g \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist

$$\widehat{f \star g}(k) = \widehat{f}(k) \cdot \widehat{g}(k) \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{Z}\,;$$

die FOURIER-Koeffizienten der von $f \star g$ sind also gerade die Produkte der FOURIER-Koeffizienten von f mit denen von g.

Der *Beweis* erfolgt durch Nachrechnen: Der k-te FOURIER-Koeffizient

c_k von $f \star g$ ist

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_0^T f \star g(t) e^{-k\cdot i\omega t}\, dt = \frac{1}{T^2} \int_0^T \left(\int_0^T f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau \right) e^{-k\cdot i\omega t}\, dt \\ &= \frac{1}{T^2} \iint\limits_{\substack{0\le t\le T\\ 0\le \tau\le T}} f(t-\tau) g(\tau) e^{-k\cdot i\omega t}\, d\tau\, dt \\ &= \frac{1}{T^2} \iint\limits_{\substack{0\le t\le T\\ 0\le \tau\le T}} f(t-\tau) e^{-k\cdot i\omega(t-\tau)} \cdot g(\tau) e^{-k\cdot i\omega\tau}\, dt\, d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(t-\tau) e^{-k\cdot i\omega(t-\tau)}\, dt \right) g(\tau) e^{-k\cdot i\omega\tau}\, d\tau\,. \end{aligned}$$

Der Inhalt der letzten Klammer kann mit Hilfe der Substitution $u = t-\tau$ im Integral berechnet werden:

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t-\tau) e^{-k\cdot i\omega(t-\tau)}\, dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau}^{T-\tau} f(u) e^{-k\cdot i\omega u}\, du = \widehat{f}(k)\,,$$

denn wie wir uns schon überlegt haben, kommt es bei einer periodischen Funktion nicht darauf an, über welches Intervall der Länge T wir integrieren. Somit ist

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T \widehat{f}(k) \cdot g(\tau) e^{-k\cdot i\omega\tau}\, d\tau = \widehat{f}(k) \cdot \widehat{g}(k)\,,$$

wie behauptet. ∎

Die FOURIER-Reihe von $f \star g$ ist also

$$S_{f\star g}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_k e^{k\cdot i\omega t}\,,$$

wobei

$$S_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{k\cdot i\omega t} \quad \text{und} \quad S_g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{k\cdot i\omega t}$$

die FOURIER-Reihen von f und g sind.

Nach der BESSELschen Ungleichung konvergieren die Summen

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \quad \text{und} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |d_k|^2 \ ;$$

außerdem ist für jedes k

$$|c_k d_k| \le \frac{1}{2}\left(|c_k|^2 + |d_k|^2\right) ;$$

also konvergiert auch

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k d_k| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|c_k d_k e^{k\cdot i\omega t}\right| \ .$$

(Man beachte, daß $\left|e^{k\cdot i\omega t}\right| = 1$ ist für jede reelle Zahl t.) Damit haben wir gezeigt, daß die FOURIER-Reihe von $f \star g$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

Das hat eine wichtige Konsequenz:

Lemma: Konvergiert die FOURIER-Reihe einer Funktion h gleichmäßig gegen eine Funktion S_h, so ist S_h stetig und hat dieselben FOURIER-Koeffizienten wie h.

Beweis: Die FOURIER-Reihe von h sei

$$S_h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{k\cdot i\omega t} \ .$$

Da alle Summanden $c_k e^{k\cdot i\omega t}$ stetige Funktionen sind, ist wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe auch die Summe eine stetige Funktion; deren k-ter FOURIER-Koeffizient ist

$$\widehat{S_h}(k) = \left(S_h,\, e^{k\cdot i\omega t}\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{\ell=-N}^{N} c_\ell \left(e^{\ell\cdot i\omega t}, e^{k\cdot i\omega t}\right) = c_k \ ,$$

wie behauptet. ∎

Insgesamt haben wir damit bewiesen

Satz: Für $f, g \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$ konvergiert die FOURIER-Reihe von $f \star g$ absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Funktion. Diese hat dieselben FOURIER-Koeffizienten wie $f \star g$. ∎

Damit wissen wir zwar immer noch nicht, *wohin* die FOURIER-Reihe von $f \star g$ konvergiert, aber wir wissen immerhin, *daß* sie für Funktionen, die als Faltungen darstellbar sind, konvergiert, und wir wissen auch, daß für die Differenz zwischen Ausgangs- und Grenzfunktion sämtliche FOURIER-Koeffizienten verschwinden. Wir müssen daher einerseits Funktionen mit verschwindenden FOURIER-Koeffizienten genauer untersuchen und andererseits versuchen, eine möglichst große Klasse von Funktionen als Faltungen darzustellen, auf die wir den gerade bewiesenen Satz anwenden können.

c) Faltung mit einem Sägezahn

Als erstes konkretes Beispiel (von dem sich zeigen wird, daß es zumindest einen Teil der zweiten Aufgabe lösen wird) betrachten wir für eine beliebige Funktion $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$ die Faltung mit dem Sägezahn

$$s(t) = \frac{T}{2} - t \quad \text{für} \quad 0 < t < T \quad \text{und} \quad s(0) = 0 \,,$$

periodisch fortgesetzt mit Periode T; es handelt sich hier um das Zweifache der in §2*c2)* betrachteten Funktion.

Für $t, \tau \in [0,\, T)$ liegt $t - \tau$ genau dann wieder in $[0,\, T)$, wenn $\tau \le t$ ist; andernfalls liegt $t - \tau$ im Intervall $(-T,\, 0)$, wo

$$s(t) = s(t+T) = \frac{T}{2} - (t+T) = -\frac{T}{2} - t$$

ist. Somit ist für $t, \tau \in (0,\, T)$

$$s(t-\tau) = \begin{cases} \frac{T}{2} - t + \tau & \text{für } \tau < t \\ 0 & \text{für } \tau = t \\ -\frac{T}{2} - t + \tau & \text{für } \tau > t \end{cases}$$

und $s \star f(t)$ ist gleich

$$\frac{1}{T}\int_0^T s(t-\tau)f(\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^t \left(\frac{T}{2}-(t-\tau)\right) f(\tau)\,d\tau + \frac{1}{T}\int_t^T \left(-\frac{T}{2}-(t-\tau)\right) f(\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2}\int_0^t f(\tau)\,d\tau - \frac{T}{2}\int_t^T f(\tau)\,d\tau + \int_0^T (\tau-t)f(\tau)\,d\tau\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^t f(\tau)\,d\tau - \int_t^T f(\tau)\,d\tau\right) + \frac{1}{T}\int_0^T (\tau-t)f(\tau)\,d\tau\,.$$

Ist $F(t)$ eine Stammfunktion von $f(t)$, so ist der erste Summand gleich

$$\frac{1}{2}\big(F(t)-F(0)-F(T)+F(t)\big) = F(t) - \frac{F(0)+F(T)}{2}\,.$$

Auch das letzte Integral läßt sich durch partielle Integration weiter ausrechnen zu

$$\int_0^T (\tau-t)f(\tau)\,d\tau = (\tau-t)F(\tau)\Big|_0^T - \int_0^T F(\tau)\,d\tau$$

$$= (T-t)F(T) + tF(0) - \int_0^T F(\tau)\,d\tau$$

$$= t\big(F(0)-F(T)\big) + TF(T) - \int_0^T F(\tau)\,d\tau\,.$$

Insgesamt ist also

$$s\star f(t) = F(t) + t\big(F(0)-F(T)\big) - \frac{F(0)+F(T)}{2} + TF(T) - \int_0^T F(\tau)\,d\tau\,.$$

Abgesehen von dem Term $t\big(F(0)-F(T)\big)$ ist das eine Stammfunktion von $f(t)$, denn die drei hinteren Terme sind Konstanten, die nicht von t abhängen. Ist also insbesondere $F(T) = F(0)$, so ist $s \star f$ eine Stammfunktion von f. Dies wollen wir ausnützen, um differenzierbare Funktionen sowie eine leichte Verallgemeinerung davon als Faltungen auszudrücken um so die Konvergenz ihrer FOURIER-Reihen zu beweisen.

d) Fourier-Reihen stetiger stückweise differenzierbarer Funktionen

Definition: Eine stückweise stetige Funktion heißt stückweise differenzierbar, wenn es nur isolierte Punkte gibt, in denen f nicht stetig differenzierbar ist und wenn auch in diesen Ausnahmepunkten sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert von $\dot{f}(t)$ existieren.

Hier interessieren wir uns für periodische Funktionen; für diese bedeutet die Definition, daß es pro Periodenintervall höchstens endliche viele Punkte geben darf, in denen die Ableitung nicht definiert ist, aber auch dort muß sie einen linksseitigen und einen rechtsseitigen Grenzwert haben.

Einfache Beispiele stückweise differenzierbarer Funktionen sind die Rechteckschwingungen aus §2*b),* die überall außer in den Sprungstellen stetig differenzierbar sind und Ableitung null haben; in den Sprungstellen verschwindet daher auch sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert. Die Funktion ist aber trotzdem nicht differenzierbar in den Sprungstellen, da sie dort nicht einmal stetig ist. (Wäre f differenzierbar, so würde die Ableitung identisch verschwinden, die Funktion müßte also nach dem üblichen Argument über den Mittelwertsatz der Differentialrechnung konstant sein.)

Genauso ist beim Sägezahn aus §2*c)* die Ableitung überall außer in den Sprungstellen gleich -1; in den Sprungstellen ist die Funktion nicht differenzierbar, aber beide Grenzwerte der Ableitung sind gleich -1.

Weiteres Beispiel einer stetigen stückweise differenzierbaren Funktion ist etwa

$$f(t) = |t| \quad \text{für} \quad |t| \le 1\,,$$

periodisch fortgesetzt mit Periode zwei. Für alle $t \notin \mathbb{Z}$ ist f differenzierbar; falls die größte ganze Zahl kleiner t gerade ist, ist die Ableitung +1, ansonsten -1. Bei einer geraden ganzen Zahl ist der linksseitige Grenzwert der Ableitung -1 und der rechtsseitige +1, bei einer ungeraden ist es umgekehrt.

Für eine stückweise differenzierbare Funktion können wir nicht wirklich von der abgeleiteten Funktion reden, da diese nicht in jedem Punkt existieren muß. Wir können aber eine Funktion $\varphi(t)$ definieren, die überall dort mit $\dot{f}(t)$ übereinstimmt, wo $\dot{f}(t)$ existiert; in den übrigen Punkten setzen wir $\varphi(t)$ auf irgendeinen beliebigen Wert, zum Beispiel auf null.

Die Funktion

$$\widetilde{f}(t) = \int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau \,.$$

ist stetig und stückweise differenzierbar, und sie hängt nicht ab vom Wert von φ in den Ausnahmepunkten; ihre Ableitung stimmt dort, wo sie definiert ist, mit φ überein. Falls f stetig ist, unterscheidet sich $\widetilde{f}$ daher nur um eine Konstante von f, und auch f ist eine Stammfunktion von φ.

Setzen wir nun noch zusätzlich voraus, daß $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}\,\mathbb{C})$ periodisch ist, folgt aus der Rechnung im vorigen Abschnitt, daß sich $f(t)$ nur um eine Konstante vom Faltungsprodukt $s \star \varphi$ unterscheidet, denn

$$f(T) - f(0) = 0$$

für eine Funktion mit Periode T.

Aus Abschnitt *b)* wissen wir, daß die FOURIER-Reihe von $s \star \varphi$ wie auch von jeder anderen Faltung absolut und gleichmäßig konvergiert; da die Addition einer Konstanten hieran nichts ändert folgt also zusammen mit den übrigen Resultaten aus Abschnitt *b)*

Satz: Ist $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$ stetig und stückweise differenzierbar, konvergiert die FOURIER-Reihe von f absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Funktion S_f, die dieselben FOURIER-Koeffizienten hat wie f. ∎

e) Der Eindeutigkeitssatz

Auch wenn wir nun wissen, daß die FOURIER-Reihe zumindest für stetige stückweise differenzierbare Funktionen konvergiert, wissen wir noch nicht, wohin sie konvergiert. Diese Frage soll in diesem Abschnitt geklärt werden.

Beginnen wir mit dem einfachsten Fall einer Funktion, deren sämtliche FOURIER-Koeffizienten verschwinden, und die sich zudem noch einigermaßen anständig verhält: Bei einer stückweise stetigen Funktion existieren nach Definition in jedem Punkt die beiden Grenzwerte

$$f(t^+) \underset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{s \to t \\ s > t}} f(s) \quad \text{und} \quad f(t^-) \underset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{s \to t \\ s < t}} f(s)\,,$$

die überall dort, wo f stetig ist, miteinander und mit $f(t)$ übereinstimmen. Für die übrigen Punkte wollen wir verlangen, daß

$$f(t) = \frac{1}{2}\big(f(t+) + f(t-)\big)$$

der Mittelwert dieser beiden Werte ist.

Satz: Für $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$ seien alle FOURIER-Koeffizienten null; außerdem sei in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \frac{1}{2}\big(f(t^+) + f(t^-)\big)\,.$$

Dann ist $f(t) \equiv 0$.

Beweis: Auch hier arbeiten wir wieder mit einem Faltungsintegral, und zwar wollen wir versuchen, die Funktion f als Faltung von sich selbst mit einer geeigneten Funktion g auszudrücken; wir suchen also nach einer Funktion g, so daß $f \star g = f$ ist. Falls g diese Eigenschaft für *beliebige* Funktionen f haben soll, die durch ihre FOURIER-Reihe dargestellt werden, müssen dann alle FOURIER-Koeffizienten von g gleich eins sein, denn bei einer Faltung zweier Funktionen multiplizieren sich die FOURIER-Koeffizienten. g hat also die FOURIER-Reihe

$$S_g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{k \cdot i\omega t} \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}\,,$$

was offensichtlich unmöglich ist: Nach der BESSELschen Ungleichung müßte sonst nämlich

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1$$

konvergieren, was natürlich nicht der Fall ist.

Wir können aber eine kleine Modifikation dieser Reihe, betrachten, nämlich

$$I_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k\cdot i\omega t}\,.$$

Hier sorgt der Exponent $|k|$ im Falle $|r| < 1$ für eine starke Dämpfung der Koeffizienten mit großem Index, so daß es zumindest mit der BESSELschen Ungleichung keine Probleme mehr gibt: Die entsprechende Summe ist zusammengesetzt aus zwei konvergenten geometrischen Reihen. Falls auch $I_r(t)$ selbst konvergiert, können wir damit rechnen und hoffen, daß wir irgendwann einmal den Grenzübergang $r \to 1$ machen können, was dann *ungefähr* der Faltung mit der nicht existenten Funktion g entspricht.

Wir berechnen $I_r(t)$ über zwei geometrische Reihen:

Beschränken wir uns zunächst auf positive Indizes, so ist nach der Summenformel

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} r^{|k|} e^{k\cdot i\omega t} &= \frac{1}{1-re^{i\omega t}} = \frac{1-re^{-i\omega t}}{(1-re^{i\omega t})(1-re^{-i\omega t})}\\ &= \frac{1-r\cos\omega t + ir\sin\omega t}{1+r^2-2r\cos\omega t}\,.\end{aligned}$$

Ersetzt man in einem der Summanden k durch $-k$, so ändert sich nichts am Koeffizienten $r^{|k|}$ und auch nichts am Realteil von $e^{k\cdot i\varphi}$; der Imaginärteil allerdings ändert sein Vorzeichen. Somit ist

$$\sum_{k=-\infty}^{0} r^{|k|} e^{k\cdot i\omega t} = \frac{1-r\cos\omega t + ir\sin\omega t}{1+r^2-2r\cos\omega t}$$

der konjugiert komplexe Wert zu obiger Summe. Da wir für $k = 0$ den Summanden eins bekommen, der in beiden obigen Summen auftritt, ist also

$$\begin{aligned}I_r(t) &= \frac{1-r\cos\omega t + ir\sin\omega t}{1+r^2-2r\cos\omega t} + \frac{1-r\cos\omega t - ir\sin\omega t}{1+r^2-2r\cos\omega t} - 1\\ &= \frac{2-2r\cos\omega t}{1+r^2-2r\cos\omega t} - 1 = \frac{2-2r\cos\omega t - (1+r^2-2r\cos\omega t)}{1+r^2-2r\cos\omega t}\\ &= \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\omega t}\,.\end{aligned}$$

Diese Funktion wollen wir uns für verschiedene Werte von r etwas genauer ansehen.

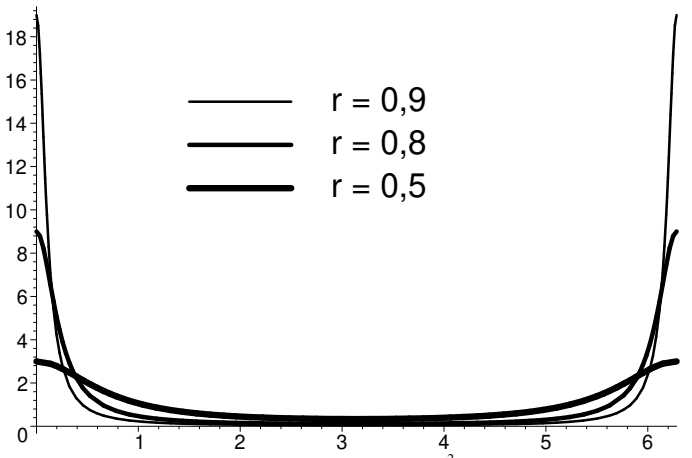


Abb. 13: $I_r(t) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t}$

Abbildung 13 zeigt, daß sich I_r im offenen Intervall $(0,\ T)$ für $r \to 1$ immer stärker an die t-Achse annähert, wohingegen die Funktionswerte an den Intervallenden immer stärker ansteigen. In der Tat ist können wir für $0 < t < T$ beim Grenzübergang $r \to 1$ einfach einsetzen und erhalten

$$I_1(t) = \frac{1-1^2}{2-2\cos\omega t} = 0\,.$$

Für $t = 0$ oder T verschwindet dagegen auch der Nenner, und

$$\lim_{r\to 1} I_r(0) = \lim_{r\to 1} I_r(T) = \lim_{r\to 1} \frac{1-r^2}{1+r^2-2} = \lim_{r\to 1} \frac{(1+r)(1-r)}{(1-r)^2} = \lim_{r\to 1} \frac{(1+r)}{(1-r)} = \infty\,.$$

Die Fläche unter der Kurve I_r im Intervall $[0,\ T]$ ist

$$\int_0^T \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\omega t}\,dt\,,$$

ein nicht sehr angenehm aussehendes Integral.

Die Mathematik stellt allerdings seit über hundert Jahren Algorithmen zur Verfügung, mit denen sich nicht nur entscheiden läßt, ob Funktionen wie I_r eine elementar ausdrückbare Stammfunktion haben, sondern auch berechnen, wie diese Stammfunktion dann aussieht. In den gängigen Computeralgebrasystemen sind diese Algorithmen zumindest teilweise implementiert, und wenn es auch zu weit führen würde, hier zu erklären, wie man eine Stammfunktion des Integranden

$$\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\omega t}$$

findet, läßt sich doch das Ergebnis

$$F_r(t) = -\frac{2}{\omega}\arctan\left(\frac{r+1}{r-1}\,\tan\frac{\omega t}{2}\right) + C$$

leicht verifizieren: Nach der Kettenregel ist zunächst

$$\frac{d}{dt}\arctan\left(a\tan\frac{\omega t}{2}\right) = \frac{1}{1+a^2\tan^2\frac{\omega t}{2}}\cdot\frac{a\omega}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\omega t}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{a\omega}{\cos^2\frac{\omega t}{2}+a^2\sin^2\frac{\omega t}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\omega}{1+(a^2-1)\sin^2\frac{\omega t}{2}}\,.$$

Mit der Beziehung

$$\sin^2\frac{\omega t}{2} = \frac{1-\cos\omega t}{2}$$

wird das zu

$$\frac{1}{2}\frac{a\omega}{1+\frac{a^2-1}{2}-\frac{a^2-1}{2}\cos\omega t} = \frac{a\omega}{(a^2+1)-(a^2-1)\cos\omega t}\,.$$

Für $a = \dfrac{r+1}{r-1}$ ist $a^2+1 = 2\cdot\dfrac{r^2+1}{(r-1)^2}$ und $a^2-1 = \dfrac{4r}{(r-1)^2}$, also wird der Ausdruck zu

$$\frac{\frac{r+1}{r-1}\cdot\omega}{2\cdot\frac{r^2+1}{(r-1)^2}-\frac{4r}{(r-1)^2}\cos\omega t} = \frac{(r^2-1)\omega}{2(r^2+1)-4r\cos\omega t}\,.$$

Um die Ableitung von F_r zu berechnen, müssen wir das noch mit $-2/\omega$ multiplizieren, was genau den Integranden ergibt. Somit ist F_r eine Stammfunktion von I_r.

Daß es mit dieser Stammfunktion ein Problem gibt, sieht man spätestens dann, wenn man naiv einsetzt und auf

$$\int_0^T I_r(t)\,dt = F_r(T) - F_r(0) = 0 - 0 = 0$$

kommt, denn aus geometrischen Gründen ist völlig klar, daß das Integral für $r < 1$ positiv sein muß.

Das Problem ist natürlich die Singularität des Tangens im Punkt $\frac{\pi}{2}$: Für $t = \frac{T}{2}$ ist F_r nicht definiert, da der Tangens dort gegen plus oder minus unendlich geht – je nachdem, von welcher Seite wir kommen. Damit ist F_r keine auf dem ganzen Integrationsintervall definierte Stammfunktion, und das Integral kann nicht einfach durch Einsetzen der oberen und der unteren Grenze berechnet werden.

Der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert von F_r existieren allerdings auch für $t = \frac{T}{2}$:

Für $0 < t < \frac{T}{2}$ ist $\tan\frac{\omega t}{2}$ positiv und geht gegen $+\infty$ für $t \to \frac{T}{2}$. Da der Faktor vor dem Tangens für alle $r \in (-1,\ 1)$ negativ ist, folgt

$$\lim_{\substack{t\to T/2\\ t<T/2}} F_r(t) = -\frac{2}{\omega}\lim_{u\to-\infty}\arctan u = -\frac{2}{\omega}\frac{-\pi}{2} = \frac{T}{2}\,.$$

Für $\frac{T}{2} < t < T$ dagegen ist $\tan\frac{\omega t}{2}$ negativ und geht gegen $-\infty$ für $t \to \frac{T}{2}$. Somit ist

$$\lim_{\substack{t\to T/2\\ t>T/2}} F_r(t) = -\frac{2}{\omega}\lim_{u\to\infty}\arctan u = -\frac{2}{\omega}\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{T}{2}\,.$$

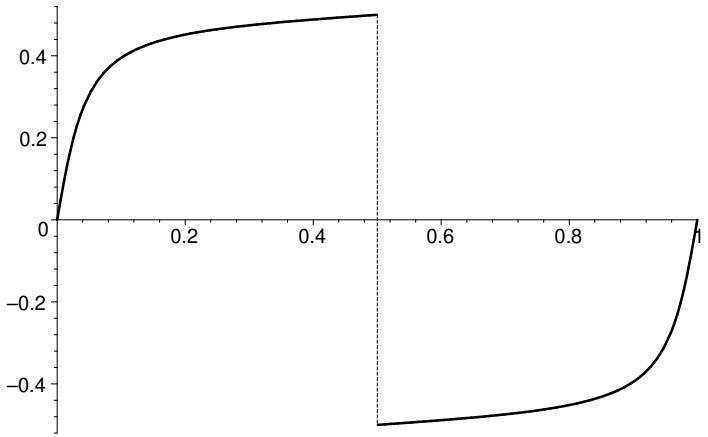


Abb. 14: $F_r(t)$ für $r = 0{,}8$ und $T = 2$

Abbildung 14 zeigt die Funktion F_r mit ihrer Sprungstelle in der Intervallmitte.

Zur Berechnung des Integrals von I_4 über eine Periode spalten wir es auf in zwei Teilintegrale über Intervalle, in denen wir eine Stammfunktion haben, und erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^T I_r(t)\,dt &= \int_0^{\frac{T}{2}} I_r(t)\,dt + \int_{\frac{T}{2}}^T I_r(t)\,dt\\ &= \lim_{\substack{t\to T/2\\ t<T/2}} F_r(t) - F_r(0) + F_r(T) - \lim_{\substack{t\to T/2\\ t>T/2}} F_r(t)\\ &= \frac{T}{2} - 0 + 0 + \frac{T}{2} = T\,.\end{aligned}$$

Somit ist

$$\frac{1}{T}\int_0^T I_r(t)\,dt = 1 \quad \text{für alle} \quad r \in (-1,\,1)$$

und

$$\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} I_r(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^T I_r(t)\,dt = \frac{1}{2}\,.$$

Lassen wir nun r gegen eins gehen, ändert sich natürlich nichts an diesen Formeln, aber die beiden Integrale konzentrieren sich immer mehr auf die Umgebung von $t = 0$ *bzw.* $t = T$. Damit ist anschaulich ziemlich klar, daß für eine Funktion $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ gilt

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 1} I_r \star f(t) &= \lim_{r\to 1}\frac{1}{T}\int_0^T f(t-\tau)I_r(\tau)\,d\tau\\ &= \lim_{r\to 1}\frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} f(t-\tau)I_r(\tau)\,d\tau + \int_{\frac{T}{2}}^T f(t-\tau)I_r(\tau)\,d\tau\right)\\ &= \frac{1}{2}\big(f(t^-) + f(t^+)\big)\,,\end{aligned}$$

denn für $r \to 1$ geht $I_r(t)$ gegen null für alle t im Integrationsbereich außer $t = 0$ und $t = T$. Auf die genauen Abschätzungen zum Beweis dieser Aussage sei verzichtet.

Stattdessen wenden wir die Aussage an auf die Funktion f aus dem Satz; dafür besagt sie, daß

$$\lim_{r\to 1} I_r \star f(t) = f(t) \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Für $|r| < 1$ ist

$$I_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k\cdot i\omega t}$$

absolut und gleichmäßig konvergent; deshalb kann die Summation mit Integration vertauscht werden und wir erhalten für $I_r \star f$ auch den Ausdruck

$$\begin{aligned} I_r \star f(t) &= \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k\cdot i\omega(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k\cdot i\omega t} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) e^{-k\cdot i\omega\tau}\, d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k\cdot i\omega t} \cdot \widehat{f}(k)\,. \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung alle FOURIER-Koeffizienten von f verschwinden, ist also $I_r \star f(t) = 0$ für alle r vom Betrag kleiner eins. Damit ist aber auch

$$f(t) = \lim_{r\to 1} I_r \star f(t) = 0 \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

wie behauptet. ∎

Das war ein langer Beweis für eine nicht sonderlich aufregende Aussage; der Satz hat jedoch weitreichende Konsequenzen:

Eindeutigkeitssatz: Haben zwei Funktionen $f, g \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dieselben FOURIER-Koeffizienten, so unterscheiden sie sich höchstens an Unstetigkeitsstellen.

Beweis: Wir definieren zwei neue Funktion

$$\widetilde{f}(t) = \frac{1}{2}\big(f(t^+) + f(t^-)\big) \quad \text{und} \quad \widetilde{g}(t) = \frac{1}{2}\big(g(t^+) + g(t^-)\big)\,;$$

dann unterscheiden sich f von $\widetilde{f}$ und g von $\widetilde{g}$ höchstens in den Unstetigkeitsstellen von f *bzw.* g. Insbesondere haben f und $\widetilde{f}$ sowie g und $\widetilde{g}$ dieselben FOURIER-Koeffizienten, also auch $\widetilde{f}$ und $\widetilde{g}$.

Somit erfüllt $\widetilde{f} - \widetilde{g}$ alle Voraussetzungen des gerade bewiesenen Satzes, verschwindet also identisch. Damit ist $\widetilde{f} = \widetilde{g}$; die ursprünglichen Funktionen f und g unterscheiden sich davon höchstens in ihren jeweiligen Unstetigkeitsstellen. ∎

Speziell können wir diesen Satz anwenden auf eine stetige stückweise differenzierbare Funktion f: Aus dem vorigen Abschnitt wissen wir, daß deren FOURIER-Reihe absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Funktion S_f konvergiert, die dieselben FOURIER-Koeffizienten wie f hat. Aus dem Eindeutigkeitssatz folgt also

Satz: Die FOURIER-Reihe einer stetigen stückweise differenzierbaren Funktion $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ konvergiert absolut und gleichmäßig gegen f. ∎

Kombinieren wir dies mit den speziellen Beispielen aus §2*c),* so erhalten wir den folgenden

Hauptsatz: $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sei stückweise stetig differenzierbar.
a) Ist f in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig, so konvergiert die FOURIER-Reihe dort gleichmäßig gegen f.
b) In jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ konvergiert die FOURIER-Reihe gegen

$$\frac{1}{2}\big(f(t^+) + f(t^-)\big)\,.$$

c) In jeder Sprungstelle von f tritt das GIBBS-Phänomen auf, d.h. die Teilsummen der FOURIER-Reihe überschwingen den Sprung um einen Faktor, der asymptotisch gegen $\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Si}(\pi) \approx 1{,}178979744$ konvergiert.

Beweis: Für stetiges f ist *a)* klar nach dem vorigen Satz und sowohl *b)* als auch *c)* sind auch klar, da es keine Sprungstellen gibt, so daß der Wert in *b)* immer gleich $f(t)$ ist.

Für unstetiges f seien $t_1, \ldots, t_r$ die Unstetigkeitsstellen im Intervall $[0,\ T)$; die Sprunghöhen dort seien

$$a_i \underset{\text{def}}{=} f(t_i^-) - f(t_i^+)\,.$$

Mit der aus §3*c2)* bekannten Sägezahnschwingung

$$s(t) = \begin{cases} \frac{T}{4} - \frac{t}{2} & \text{für } 0 < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}\,,$$

periodisch fortgesetzt mit Periode T, ist dann

$$s_i(t) \underset{\text{def}}{=} \frac{2a_i}{T} s(t - t_i)$$

eine weitere stückweise differenzierbare Funktion, die ebenfalls Sprunghöhe a_i an der Stelle t_i hat. Also ist auch

$$\widetilde{f}(t) = f(t) - \sum_{j=1}^{r} s_j(t)$$

eine stückweise differenzierbare Funktion, die nun aber *keine* Sprungstellen mehr hat; $\widetilde{f}$ ist also stetig und erfüllt daher alle Behauptungen des Satzes.

Für die Funktion s haben wir die drei Behauptungen des Satzes in §2*d)* und *e)* explizit nachgerechnet; da sie unter Verschiebung und Reskalierung invariant sind, gelten sie auch für die Funktionen s_i. Damit gelten sie aber auch für

$$f(t) = \widetilde{f}(t) + \sum_{j=1}^{r} s_j(t)\,,$$

wie behauptet. ∎

Da praktisch alle Funktionen, deren FOURIER-Reihen man in technischen Anwendungen betrachtet, stückweise differenzierbar sind, wollen wir es für die punktweise Konvergenz bei diesem Satz bewenden lassen; für sonstige stückweise stetige Funktionen wollen wir uns im nächsten Abschnitt mit einer schwächeren Konvergenzaussage begnügen.

f) Der Satz von Parseval

Im Zusammenhang mit der BESSELschen Ungleichung haben wir bereits die HERMITEschen Produkte in $\mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ und $\ell^2(\mathbb{Z},\,\mathbb{C})$ miteinander verglichen; jetzt wollen wir sehen, daß sie dieselben Werte liefern. Auch hierbei arbeiten wir mit Faltungen; wesentliches Hilfsmittel ist der folgende, implizit schon im vorigen Abschnitt verwendete

Satz: Für $f, g \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ konvergiert die FOURIER-Reihe von $f \star g$ überall gleichmäßig gegen $f \star g$; sind $c_k = \widehat{f}(k)$ und $d_k = \widehat{g}(k)$ die FOURIER-Koeffizienten von f und g, ist also für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$f \star g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_k e^{-k\cdot i\omega t}\,.$$

∎

Aus diesem Satz lassen sich sehr einfach Eigenschaften der Faltung ableiten, z.B. gilt

Lemma: *a)* Für $f, g \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ ist $f \star g = g \star f$
b) Für $f, g, h \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ ist $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$

Beweis: Betrachtet man die FOURIER-Reihen, werden die Behauptungen einfach zum Kommutativ- und Assoziativgesetz der Multiplikation komplexer Zahlen. ∎

(Man könnte das Lemma natürlich auch direkt durch Integration beweisen.)

Wir wollen den obigen Satz verwenden, um folgende Formel zu beweisen:

Satz von Parseval: Für $f, g \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ ist

$$(f,\,g) = \left(\widehat{f},\,\widehat{g}\right)\,,$$

d.h. für die FOURIER-Koeffizienten c_k von f und d_k von g ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{d_k} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}\,dt\,.$$

Zum *Beweis* brauchen wir eine Funktion, deren FOURIER-Koeffizienten die Zahlen $\overline{d_k}$ sind. Komplexe Konjugation der FOURIER-Reihe zu g führt zu

$$\overline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{k\cdot i\omega t}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{d_k e^{k\cdot i\omega t}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{d_k} e^{-k\cdot i\omega t}\,.$$

Ersetzen wir hierin noch t durch $-t$, erhalten wir

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{d_k} e^{k \cdot i\omega t}$$

als FOURIER-Reihe von $\widetilde{g}(t) = \overline{g(-t)}$.

Somit ist $f \star \widetilde{g}$ eine Funktion mit FOURIER-Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{d_k} e^{k \cdot i\omega t} .$$

Da die FOURIER-Reihe einer Faltung stets gleichmäßig konvergiert und dieselben FOURIER-Koeffizienten hat wie die Faltung selbst, folgt aus dem Eindeutigkeitssatz des vorigen Abschnitts, daß diese Reihe in jedem Punkt t gegen $f \star \widetilde{g}(t)$ konvergiert. Speziell für $t = 0$ ist daher einerseits

$$f \star \widetilde{g}(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{d_k}$$

und andererseits

$$f \star \widetilde{g}(0) = \widetilde{g} \star f(0) = \frac{1}{T} \int_0^T \widetilde{g}(-\tau) f(\tau)\, d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) \overline{g(\tau)}\, d\tau .$$

Damit ist der Satz bewiesen. ∎

Korollar: Sind $c_k = \widehat{f}(k)$ die FOURIER-Koeffizienten von f, so ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \, dt .$$

Gelegentlich wird auch dieses Korollar als Satz von PARSEVAL bezeichnet.

Der französische Mathematiker MARC-ANTOINE PARSEVAL DES CHÊNES (1755–1836) publizierte nur fünf mathematische Arbeiten; die 1799 veröffentlichte zweite davon enthält den hier betrachteten Satz.
Als überzeugter Royalist kam PARSEVAL während der französischen Revolution 1792 ins

Gefängnis; später mußte er aus Frankreich fliehen, weil ihn NAPOLEON wegen regimekritischer Gedichte verhaften lassen wollte.

Obiges Korollar liefert oft interessante spezielle Werte unendlicher Reihen: Für den Sägezahn mit Periode 2π etwa ist im Intervall $(0, 2\pi)$

$$s(t) = \frac{\pi - t}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2ki} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

mit

$$c_k = \begin{cases} -\frac{i}{2k} & \text{für } k > 0 \\ 0 & \text{für } k = 0 \\ \frac{i}{2k} & \text{für } k < 0 \end{cases} .$$

Somit ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} .$$

Außerdem ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi - t}{2} \right)^2 dt = \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \, dt = \frac{1}{8\pi} \cdot 2 \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{12} .$$

Somit ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

Der Satz von PARSEVAL liefert auch schnell die im vorigen Abschnitt angekündigte schwächere Konvergenzaussage für beliebige stückweise stetige periodische Funktionen: Mit dem HERMITEschen Produkt in $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ können wir in der üblichen Weise eine Norm

$$\|f\|_{2,T} = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \, dt}$$

definieren und sagen, eine Folge $f_1, f_2, \ldots$ konvergiere in der L^2-Norm gegen f, wenn

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_{2,T} = 0$$

ist. Dann gilt:

Satz: Für jedes $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ konvergiert die FOURIER-Reihe in der L^2-Norm gegen f.

Beweis: Wie wir beim Beweis der BESSELschen Ungleichung gesehen haben, gilt mit $c_k = \widehat{f}(k)$ für die Teilsumme

$$S_N = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{k\cdot i\omega t} ,$$

daß

$$\|f - S_N\|_{2,T}^2 = (f - S_N,\, f - S_N) = (f,\, f) - \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 .$$

Nach dem Satz von PARSEVAL geht die rechts stehende Differenz für $N \to \infty$ gegen null, also auch $\|f - S_N\|_{2,T}$. ∎

g) Hilbert-Räume

In §2 hatten wir das Problem der harmonischen Analyse verglichen mit dem Problem, einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ bezüglich einer Orthonormalbasis darzustellen; die einfachste Lösung besteht bekanntlich darin, die Skalarprodukte von $\vec{v}$ mit den Basisvektoren $\vec{b}_i$ zu bilden; dann ist

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} (\vec{v} \cdot \vec{b}_k)\, \vec{b}_k .$$

Genauso haben wir nun bei der Berechnung einer komplexen FOURIER-Reihe einer Funktion $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die Skalarprodukte $c_k = (f, e^{k\cdot i\omega t})$ gebildet für alle ganzen Zahlen $k \in \mathbb{Z}$ und gesehen, daß zumindest für stückweise differenzierbare Funktionen für die in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ die Mittelwertbedingung

$$f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

erfüllt ist,

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{k\cdot i\omega t}$$

ist, eine sehr ähnliche Situation also.

Es gibt allerdings einen entscheidenden Unterschied: Im Gegensatz zur endlichen Summe oben haben wir hier eine Summe, in der im allgemeinen unendlich viele der Summanden von Null verschieden sind. Eine solche unendliche Summe kann nur sinnvoll definiert werden, wenn wir einen Konvergenzbegriff haben, wie dies etwa in $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ der Fall ist; über Körpern wie $\mathbb{Q}$ oder auch über endlichen Körpern hätten unendliche Summen überhaupt keine sinnvolle Interpretation.

In der linearen Algebra verlangt man daher aus gutem Grund von einer Basis, daß sich alle Vektoren als *endliche* Linearkombinationen von Basisvektoren darstellen lassen, auch wenn die Basis selbst unendlich sein kann.

Aus diesem Grund bilden die Funktionen $e^{k\cdot i\omega t}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ keine Basis von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, und sie sind auch keine Basis des Untervektorraums aus allen stückweise differenzierbaren Funktionen mit der Mittelwerteigenschaft: Sie bilden nur eine Basis des sehr viel kleineren Untervektorraums der (komplexen) trigonometrischen Polynome. Der in §2*b)* betrachtete Rechteckimpuls f mit Periode T gehört bereits nicht mehr zu diesem Untervektorraum und ist in der Tat linear unabhängig von den Funktionen $e^{k\cdot i\omega t}$: Andernfalls gäbe es nämlich eine nichttriviale endliche Linearkombination

$$\lambda_0 f(t) + \lambda_1 e^{k_1\cdot i\omega t} + \cdots + \lambda_r e^{k_r\cdot i\omega t} = 0 ,$$

in der λ_0 nicht verschwinden darf, da sonst die $e^{k\cdot i\omega t}$ linear abhängig wären.

Also ist

$$f(t) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} e^{k_1\cdot i\omega t} + \cdots - \frac{\lambda_r}{\lambda_0} e^{k_r\cdot i\omega t} ,$$

und das ist offensichtlich eine FOURIER-Reihe von f. Da wir die FOURIER-Reihe

$$f(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\sin(2\ell+1)\omega t}{2\ell+1} = -\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{i}{4\ell+2} e^{(2\ell+1)\cdot i\omega t}$$

bereits kennen, wissen wir aber nach dem Eindeutigkeitssatz, daß das nicht stimmen kann.

Wenn wir die reinen Schwingungen zu einer Basis von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ergänzen wollen, können wir also beispielsweise den Rechteckimpuls als neues Basiselement dazunehmen und, wie man sich leicht überlegt, auch noch den Sägezahn. Tatsächlich muß man noch eine ganze Reihe anderer Funktionen mit hinzunehmen, und bis heute hat es niemand geschafft, eine Basis von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ hinzuschreiben.

Der letzte Satz sollte zumindest diejenigen nicht verwundern, die sich aus dem letzten Semester noch an die dortige Diskussion im Zusammenhang mit der Existenz von Basen erinnern: Wir hatten dies nur für endlichdimensionale Vektorräume bewiesen, da es im unendlichdimensionalen Fall logische Schwierigkeiten gibt: Man muß das absolut nichtkonstruktive Auswahlaxiom benutzen, das zu allem Überfluß auch noch von den restlichen Axiomen der Mengenlehre unabhängig ist, so daß zumindest im Prinzip auch eine Mathematik ohne Auswahlaxiom möglich ist. Dort ist dann nicht beweisbar, daß jeder Vektorraum eine Basis hat – was freilich nicht bedeutet, daß nun beweisbar wäre, daß irgendein gegebener Vektorraum *keine* Basis hätte.

Von daher ist zumindest für alle praktischen Zwecke das System der Funktionen $e^{k \cdot i\omega t}$ die beste Annäherung an eine Basis, die man bekommen kann.

Sie ist in vielfacher anderer Hinsicht eine Verallgemeinerung der Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$: Beispielsweise besagt der Satz von PARSEVAL, daß wir den Abstand (bezüglich der L_2-Norm) zwischen zwei Funktionen, die beide bezüglich dieser Basis dargestellt sind, genauso ausrechnen können, wie wir das vom EUKLIDischen oder HERMITEschen Abstand her gewohnt sind – nur daß wir es jetzt eben mit einer unendlichen Summe von Quadraten zu tun haben.

Da eine solche Situation in Funktionenräumen alles andere als selten vorkommt und FOURIER-Reihen beileibe nicht die einzigen unendlichen Summen ihrer Art mit praktischer Bedeutung sind, hat die Mathematik hierfür einen Begriffsapparat nebst zugehörigen Techniken entwickelt, die wir hier in dieser Vorlesung zwar nicht unbedingt brauchen, die aber in manchen Gebieten beispielsweise der Signalverarbeitung oder der optischen Übertragungstechnik eine wichtige Rolle spielen, die Theorie der HILBERTräume:

Definition: Ein EUKLIDischer oder HERMITEscher Vektorraum V heißt HILBERT-Raum, wenn jede CAUCHY-Folge aus V gegen ein Element von V konvergiert.

DAVID HILBERT (1862–1943) wurde in Königsberg geboren, wo er auch zur Schule und zur Universität ging. Er promovierte dort 1885 mit einem Thema aus der Invariantentheorie, habilitierte sich 1886 und bekam 1893 einen Lehrstuhl. 1895 wechselte er an das damalige Zentrum der deutschen wie auch internationalen Mathematik, die Universität Göttingen, wo er bis zu seiner Emeritierung im Jahre 1930 lehrte. Seine Arbeiten umfassen ein riesiges Spektrum aus unter anderem Invariantentheorie, Zahlentheorie, Geometrie, Funktionalanalysis, Logik und Grundlagen der Mathematik sowie auch zur Relativitätstheorie. Er gilt als einer der Väter der modernen Algebra.

Für unsere bislang betrachteten Räume nützt uns der Begriff des HILBERT-Raums leider nichts: Im Falle endlicher Dimension ist jeder EUKLIDische oder HERMITEsche Vektorraum ein HILBERT-Raum, denn wir können den Raum vermöge irgendeiner Orthonormalbasis mit $\mathbb{R}^n$ *bzw.* $\mathbb{C}^n$ identifizieren und das CAUCHYsche Konvergenzkriterium komponentenweise anwenden. Von den unendlichdimensionalen Vektorräumen $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, die uns in Augenblick interessieren, ist leider keiner ein HILBERT-Raum, denn wie wir schon gesehen haben ist weder $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ein EUKLIDischer noch $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ein HERMITEscher Vektorraum, da es stückweise stetige Funktionen gibt, deren Norm $\sqrt{(f, f)}$ verschwindet, ohne daß f die Nullfunktion wäre.

Dieses Problem wollen wir üblich weitgehend ignorieren; wir bezeichnen einfach für *jeden* $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum V mit einem Produkt, das bis auf die Forderung

$$(f, f) = 0 \Longrightarrow f \equiv 0$$

EUKLIDsch *bzw.* HERMITEsch ist, eine Teilmenge $H \subseteq V$ als HILBERT-*Raumbasis*, wenn es für jedes Element $f \in V$ eine Folge $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von

Elementen aus H und eine Folge $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gibt, so daß

$$\delta_n \underset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i h_i - f$$

für $N \to \infty$ die Eigenschaft hat, daß

$$\lim_{N\to\infty} (\delta_n,\, \delta_N) = 0$$

ist. Die Grenzwerte sind dabei natürlich bezüglich der L^2-Norm zu verstehen.

In diesem Sinne ist also das System der Funktionen $e^{k\cdot i\omega t}$ nach der Diskussion im vorigen Abschnitt eine HILBERT-Raumbasis von $L_T(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$ und damit auch das System der Funktionen $1, \sin k\omega t,\ \cos \ell\omega t$ eine HILBERT-Raumbasis von $L_T(\mathbb{R},\, \mathbb{R})$.

Solche HILBERT-Raumbasen sind in dieser Allgemeinheit leider noch nicht sonderlich nützlich für praktische Anwendungen: Will man einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ als Linearkombination von *irgendeiner* Basis $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ darstellen, muß man ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen in n Unbekannten lösen. Für endliches n ist das für große n zwar nicht mehr sehr angenehm, aber doch grundsätzlich möglich und per Computer auch noch für n in der Größenordnung von hundert Tausend durchaus praktikabel.

Wird die Dimension allerdings unendlich, so läßt sich ein System aus unendlich vielen Gleichungen in unendlich vielen Variablen nur in sehr speziellen Fällen wirklich lösen; einer davon ist der, den wir bei der Berechnung des FOURIER-Reihe ausgenutzt haben: Im Falle einer abzählbaren orthogonalen HILBERT-Raumbasis $\left\{\vec{b}_i \;\middle|\; i \in \mathbb{N}\right\}$ ist

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\vec{v}\cdot\vec{b}_i}{\vec{b}_i\cdot\vec{b}_i}$$

leicht berechenbar; noch einfacher wird es, wenn wir von einer orthonormalen HILBERT-Raumbasis ausgehen, da dann alle Nenner eins sind.

Solche orthogonale *bzw.* orthonormale HILBERT-Raumbasen bezeichnet man als *vollständige Orthogonalsysteme* bzw. *vollständige Orthonormalsysteme.*

h) Die Poisson-Formel

Der Konvergenzbeweis für FOURIER-Reihen war sehr abstrakt; in diesem Anschnitt wollen wir sehen, daß die Methoden, die wir dabei kennengelernt haben, auch nützlich sein können bei der Lösung eines praktischen Problems:

Bei bildgebenden Verfahren der Medizintechnik, bei Werkstoffuntersuchungen, Wärmeleitungsproblemen und vielen anderen Anwendungen hat man es oft mit folgendem *Randwertproblem* zu tun: Man kennt eine Funktion am Rand einer Fläche oder eines Volumens und möchte sie auch im (physikalisch oft unzugänglichen) Innern berechnen.

Sofern man keine einschränkenden Annahmen über die Funktion macht, ist dieses Problem natürlich weit von einer eindeutigen Lösbarkeit entfernt; in vielen interessanten Fällen ist es allerdings eindeutig lösbar.

Wir wollen hier nur ein ganz einfaches Beispiel betrachten: eine auf der Kreislinie bekannte Funktion, die ins Kreisinnere hinein fortgesetzt werden soll. Dabei wollen wir verlangen, daß die Funktion überall der *Kontinuitätsgleichung*

$$\Delta u = 0$$

genügt, wie das beispielsweise für elektrische Potentiale in Abwesenheit von Ladungen der Fall ist.

In Polarkoordinaten ausgedrückt ist der LAPLACE-Operator nach **[HM1]**, Kap. 2, §4*g)* gleich

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}\,;$$

für $u(r,\varphi) = r^k \cos k\varphi$ und $u(r,\varphi) = r^k \sin k\varphi$ rechnet man leicht nach, daß $\Delta u = 0$ ist. Damit ist auch

$$\Delta(r^n e^{\pm k\cdot i\varphi}) = 0$$

und allgemeiner

$$\Delta u(r,\varphi) = 0 \quad \text{für} \quad u(r,\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k r^{|k|} e^{k\cdot i\omega t}\,,$$

falls die Summe konvergiert. Für ein Randwertproblem ist die Funktion brauchbar, wenn zusätzlich auch noch

$$u_0(\varphi) \underset{\text{def}}{=} \lim_{r\to 1} u(r,\varphi)$$

für alle Winkel φ existiert.

Ein spezielles Beispiel einer konvergenten Summe ist die Funktion I_r aus Abschnitt *e);* wenn wir als Argument anstelle von ωt die Winkelvariable φ einsetzen, ist für $|r| < 1$

$$I_r(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k\cdot i\varphi} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\varphi}\,.$$

Da $I_r \star u_0$ für stetige Funktionen im Limes $r \to 1$ gerade u_0 ist, ist für eine vorgegebene Funktion u_0

$$u(r,\varphi) = I_r \star u_0(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)u_0(\psi)}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\psi)}\,d\psi$$

eine Fortsetzung ins Innere mit $\Delta u(r,\varphi) = 0$. Das ist die POISSONsche Integralformel zur Lösung dieses einfachen Randwertproblems.

SIMÉON DENIS POISSON (1781–1840) studierte zunächst Medizin, dann ab 1798 Mathematik an der *Ecole Polytechnique* bei LAPLACE und LAGRANGE. 1802 bekam er eine Stelle als Astronom am *Bureau des Longitudes,* 1809 wurde er Professor für reine Mathematik an der neugegründeten *Faculté des Sciences.* Er arbeitete hauptsächlich über bestimmte Integrale und FOURIER-Theorie, schrieb aber auch ein wichtiges Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitstheorie (in dem die POISSON-Verteilung erstmalig auftauchte) und Arbeiten über Mechanik, Astronomie, Elektrizität und Magnetismus.

§5: Die Fourier-Transformation

Die FOURIER-Transformation leistet für nichtperiodische Signale das, was FOURIER-Reihen für periodische Signale leisten; zur Herleitung ihrer Definition und ihrer wesentlichen Eigenschaften gehen wir daher aus von FOURIER-Reihen.

a) Fourier-Reihen und Fourier-Integrale

In den vorigen Paragraphen haben wir periodische Funktionen mittels ihrer FOURIER-Reihen als Überlagerungen reiner Schwingungen dargestellt. Diese Zerlegung einer Funktion in Sinus- und Cosinusschwingungen verschiedener Frequenzen ist nicht nur für periodische Funktionen nützlich; angesichts der Tatsache, daß das Verhalten vieler elektronischer Bauteile von der Frequenz abhängt, würde man gerne *jede* Funktion entsprechend zerlegen. Es ist allerdings klar, daß FOURIER-Reihen, wie wir sie bislang kennen, dazu nicht geeignet sind, denn da dort alle beteiligten Frequenzen Vielfache eine festen Grundfrequenz sind, muß auch die Summe mindestens die der Grundfrequenz entsprechende Periode haben. Trotzdem liefern FOURIER-Reihen einen Ansatz auch für zumindest einige Klassen nichtperiodischer Funktionen.

Für eine beliebige reelle Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wählen wir dazu zunächst eine (große) Periode T und betrachten die Funktion $f_T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf dem Intervall $(-T/2,\, T/2]$ mit f übereinstimmt und dann periodisch mit Periode T auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird. Die FOURIER-Reihe von f_T ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ki\omega t} \quad \text{mit} \quad c_k = \widehat{f}_T(k) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-ki\omega t}\,dt$$

und $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Um f selbst darzustellen, müssen wir T gegen unendlich gehen lassen; um das Verhalten von c_k bei Veränderung von T kontrollieren zu können,

definieren wir dazu eine Funktion $C(\nu)$ als

$$C(\nu) \underset{\text{def}}{=} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-i\nu t}\,dt\,.$$

Mit dieser Definition ist

$$c_k = \frac{1}{T}C(k\omega) = \frac{\omega}{2\pi}C(k\omega)\,,$$

und die FOURIER-Reihe von f_T läßt sich schreiben als

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k\omega)e^{i(k\omega)t}\omega\,.$$

Wäre dies eine endliche Summe, etwa

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} C(k\omega)e^{i(k\omega)t}\omega\,,$$

so könnten wir sie auffassen als RIEMANN-Summe für

$$\int_{-N\omega}^{(N+1)\omega} \frac{1}{2\pi}C(\nu)e^{i\nu t}\,d\nu$$

bei einer äquidistanten Unterteilung mit Intervallbreite ω. Falls also ω gegen Null geht (und damit $T = 2\pi/\omega$ gegen unendlich) und gleichzeitig N gegen unendlich, konvergiert die FOURIER-Reihe gegen das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}C(\nu)e^{i\nu t}\,d\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(\nu)e^{i\nu t}\,d\nu\,,$$

sofern dieses existiert.

Im Idealfall sollte also gelten

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(\nu)e^{i\nu t}\,d\nu \quad \text{mit} \quad C(\nu) \underset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\nu t}\,dt$$

und wir definieren

Definition: Für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bezeichnen wir die Funktion

$$\widehat{f}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ \omega \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt \end{cases},$$

so sie existiert, als FOURIER-Transformierte von f.

Damit sollte dann also gelten

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\,,$$

und diese Konstruktion, die f aus $\widehat{f}$ rekonstruiert, heißt *inverse* FOURIER-*Transformation:*

Definition: Für $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bezeichnen wir die Funktion

$$\check{g}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega \end{cases}$$

als inverse FOURIER-Transformierte von g.

Offensichtlich ist

$$\check{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\widehat{f}(-\omega) \quad \text{und} \quad \widehat{g}(t) = 2\pi\check{g}(-t)\,.$$

Je nach Buch oder Vorlesung werden die Vorfaktoren gelegentlich auch anders gewählt, beispielsweise stand in der HM II bis 1998 der Faktor $1/2\pi$ vor der FOURIER-Transformation selbst statt vor ihrer inversen. Die jetzt gewählte Definition paßt besser zu der aus der hiesigen Elektrotechnik; dort wird die FOURIER-Transformation als

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

definiert, wobei j wie in der Elektrotechnik üblich für die in der Mathematik und Physik mit i bezeichnete imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ steht, d.h. $F(j\omega) = \widehat{f}(\omega)$.

Einige Autoren bevorzugen es auch, aus Symmetriegründen bei beiden Transformationen einen Vorfaktor $1/\sqrt{2\pi}$ zu verwenden. In allen Fällen sind die Faktoren so aufeinander abgestimmt, daß für hinreichend gutartige Funktionen die Beziehungen

$$\check{\widehat{f}}(t) = f(t) \quad \text{und} \quad \widehat{\check{f}}(t) = f(t)$$

gelten.

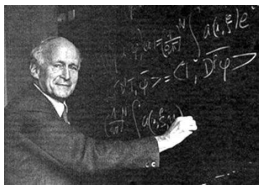
Die Existenz der FOURIER-Transformierten, d.h. die Konvergenz des uneigentlichen Integrals aus der Definition, sowie auch die obigen Formeln für $\check{\widehat{f}}$ und $\widehat{\check{f}}$ sind leider alles andere als selbstverständlich: Für $f(t) = 1$ oder auch $f(t) = e^{i\omega t}$ oder $f(t) = t^n$ und in vielen weiteren Fällen kann das Integral für $\widehat{f}(\omega)$ schon aus ganz trivialen Gründen nicht existieren.

Wenn wir sicher sein wollen, daß alles gut geht, müssen wir deshalb Bedingungen an die Funktion f stellen. Zur Vorsicht stellen wir zunächst einmal übertrieben starke Forderungen, zeigen, daß mit denen alles gut geht, und schrauben sie dann in einem nächsten Schritt wieder auf ein realistisches Maß herunter.

Definition: Eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *stark abfallend,* wenn die Funktionen

$$t \mapsto \left| t^r f^{(k)}(t) \right|$$

für alle $k, r \geq 0$ beschränkt sind. Die Menge aller stark abfallender Funktionen bezeichnen wir als SCHWARTZ-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.



LAURENT SCHWARTZ wurde 1915 in Paris geboren, studierte zunächst an der dortigen Ecole Normale Supérieure, dann an der Universität Straßburg. 1945 wurde er Professor in Nancy und entwickelte dort die mathematische Theorie der bislang nur von Physikern wie DIRAC und HEAVISIDE betrachteten Distributionen. Für diese Arbeiten wurde er 1950 mit der Fields Medal ausgezeichnet, dem bedeutendsten Preis in der Mathematik. Von 1953 bis zu seiner Emeritierung 1983 lehrte er in Paris.

Es ist klar, daß auch Summen und skalare Vielfache von stark abfallenden Funktionen stark abfallend sind; der SCHWARTZ-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist daher ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Beispiele: *a)* Die Funktion $f(t) = e^{-t^2}$ liegt in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$: Sie ist beliebig oft stetig differenzierbar; ihre Ableitungen haben jeweils die Form $P(t)e^{-t^2}$ mit einem geeigneten Polynom P. Da die Exponentialfunktion schneller wächst als jedes Polynom, geht e^{-t^2} schneller gegen Null als ein Polynom gegen unendlich gehen kann, das Produkt geht also für $t \to \pm\infty$ gegen Null und ist daher auf ganz $\mathbb{R}$ beschränkt.

b) Sei

$$f(t) = \begin{cases} e^{\dfrac{-1}{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Da diese Funktion außerhalb des Intervalls (a, b) verschwindet und im Innern stetig ist, ist sie natürlich beschränkt. Ihre Ableitungen sind Produkte aus rationalen Funktionen mit f selbst; da $f(t)$ für $t \to a$ oder $t \to b$ erheblich schneller gegen null geht als eine rationale Funktion gegen unendlich gehen kann, haben alle Ableitungen an den Intervallgrenzen den Wert null; die Funktion ist also beliebig oft stetig differenzierbar. Die Beschränktheitsbedingungen sind problemlos: Im kompakten Intervall $[a, b]$ ist jede stetige Funktion beschränkt, und außerhalb sind alle hier betrachteten Funktionen null.

Ein erster Hinweis darauf, daß wir in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ nur selten Probleme mit der Existenz von Integralen haben dürften, gibt das folgende

Lemma: *a)* Für eine Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ existieren

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f(t)}\,dt\,.$$

b) Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $\omega \in \mathbb{R}$ existiert das FOURIER-Integral

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt\,;$$

für $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $t \in \mathbb{R}$ existiert das inverse FOURIER-Integral

$$\check{g}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega t}\, d\omega\,.$$

c) Die Abbildung

$$\begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \qquad (f,g) \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\, dt \end{cases}$$

macht $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ zu einem HERMITEschen Vektorraum.

Beweis: a) Da sowohl $f(t)$ als auch $t^2 f(t)$ beschränkt sind, ist auch $(1+t^2)f(t)$ beschränkt, es gibt also eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so daß

$$|f(t)| \le \frac{C}{1+t^2} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}\,.$$

Da das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{a,b\to\infty} \int_{-a}^{b} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{a,b\to\infty} \big(\arctan b - \arctan(-a)\big)$$
$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

konvergiert, ist es eine konvergente Majorante des Integrals über f, so daß nach dem Majorantenkriterium auch das letztere konvergiert. Damit ist auch *b)* bewiesen, d.h. die Konvergenz aller Integrale $\widehat{f}(\omega)$ und $\check{g}(t)$, denn da $e^{\pm i\omega t}$ den Betrag eins hat, ist auch für jedes $\omega \in \mathbb{R}$ *bzw.* $t \in \mathbb{R}$

$$|f(t)| = \left|f(t)\cdot e^{-i\omega t}\right| \le \frac{C}{1+t^2}$$

bzw.

$$|g(\omega)| = \left|g(\omega)\cdot e^{i\omega t}\right| \le \frac{C}{1+\omega^2}\,.$$

Genauso läßt sich auch das Integral über $f(t)\overline{f(t)}$ abschätzen, denn da $|tf(t)|$ beschränkt ist, ist auch $\left|t^2 f(t)\overline{f(t)}\right|$ und damit $(1+t^2)f(t)\overline{f(t)}$ beschränkt. (Betragsstriche sind hier natürlich überflüssig.)

b) Wie wir gerade gesehen haben, konvergiert das rechtsstehende Integral im Spezialfall $f = g$. Für beliebiges $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und beliebige reelle Zahlen $a \le b$ gilt nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung in der etwas allgemeineren Form aus §1*d)*

$$\left|\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\, dt\right| \le \sqrt{\left|\int_a^b f(t)\overline{f(t)}\, dt\right|} \cdot \sqrt{\left|\int_a^b g(t)\overline{g(t)}\, dt\right|}\,,$$

und somit konvergiert mit der rechten Seite auch die linke für $a \to -\infty$ und $b \to \infty$.

Die Eigenschaften eines HERMITEschen Skalarprodukts sind klar bis auf die Eigenschaft, daß nur die Nullfunktion Skalarprodukt null mit sich selbst haben darf, aber da wir es hier mit beliebig oft stetig differenzierbaren und damit insbesondere stetigen Funktionen zu tun haben, folgt dies genauso wie in **[HM1]**, *Kap. 2,* §1*a)* für das Skalarprodukt auf dem Vektorraum aller stetiger Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$. ∎

b) Der Satz von Fubini

Wenn wir die FOURIER-Transformation auch wieder rückgängig machen wollen, wissen wir nur dann, daß $\check{\widehat{f}}$ existiert, wenn $\widehat{f}$ wieder stark abfallend ist. Das ist für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ glücklicherweise immer der Fall; bevor wir das zeigen können, brauchen wir aber erst einige andere Eigenschaften der FOURIER-Transformation, die uns auch später noch in anderem Zusammenhang nützlich sein werden. Für diese wiederum benötigen wir einige einfache Aussagen über die Vertauschung von Grenzprozessen.

Lemma: *a)* Die Funktion $h\colon [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist auch

$$H\colon \begin{cases} [a,b] \to \mathbb{R} \\ \qquad \omega \mapsto \displaystyle\int_c^d h(\omega,t)\, dt \end{cases}$$

stetig.
b) Ist h zusätzlich r-mal stetig partiell nach der ersten Variablen ω differenzierbar, so ist

$$\frac{d^r H}{d\omega^r}(\omega) = \int_c^d \frac{\partial^r h}{\partial \omega^r}(\omega, t)\, dt\,.$$

Beweis: a) Da $[a, b]$ und $[c, d]$ abgeschlossene Intervalle sind, ist h nicht nur stetig, sondern sogar gleichmäßig stetig. Es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für jedes $t \in [c, d]$ gilt

$$|h(\omega_1, t) - h(\omega_2, t)| < \varepsilon \quad \text{falls} \quad |\omega_1 - \omega_2| < \delta\,.$$

Für solche ω_1 und ω_2 ist dann

$$|H(\omega_1) - H(\omega_2)| \le \int_c^d |h(\omega_1, t) - h(\omega_2, t)|\, dt < \varepsilon(d - c)\,.$$

Da $d - c$ eine Konstante ist, läßt sich dies durch Wahl von $\varepsilon = \eta/(d - c)$ unter jedes vorgegebene $\eta > 0$ drücken.

b) Für $\Delta \neq 0$ ist

$$\frac{H(\omega + \Delta) - H(\omega)}{\Delta} = \int_c^d \frac{h(\omega + \Delta, t) - h(\omega, t)}{\Delta}\, dt\,,$$

und der rechtsstehende Integrand ist nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gleich $\frac{\partial h}{\partial \omega}(\xi, t)$ für ein ξ zwischen ω und $\omega + \Delta$. Für $\Delta \to 0$ geht dies gegen $\frac{\partial h}{\partial \omega}(\omega, t)$, und da die partielle Ableitung als stetig vorausgesetzt wurde, gilt wegen *a),* daß

$$H'(\omega) = \lim_{\xi \to \omega} \int_c^d \frac{\partial h}{\partial \omega}(\xi, t)\, dt = \int_c^d \frac{\partial h}{\partial \omega}(\omega, t)\, dt$$

ist, wie behauptet. Für $r > 1$ folgt die Behauptung induktiv. ∎

Als erste Anwendung folgt ein Satz über die Vertauschung der Integrationsreihenfolge, der für die Inversion der FOURIER-Transformation fundamental sein wird:

Satz von Fubini: Für eine stetige Funktion $h\colon [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ ist

$$\int_a^b \left(\int_c^d h(\omega, t)\, dt \right) d\omega = \int_c^d \left(\int_a^b h(\omega, t)\, d\omega \right) dt\,.$$

Beweis: Das folgt entweder aus der zweidimensionalen Integrationstheorie in **[HM1]**, Kap. II, §6*b),* da beide Seiten das Integral

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} h(\omega, t)\, d\omega\, dt$$

berechnen, wobei das Rechteck $[a, b] \times [c, d]$ als Normalbereich einmal vom Typ I und einmal vom Typ II aufgefaßt wird. Es folgt aber auch leicht aus dem gerade bewiesenen Lemma:

Für $a \le \omega \le b$ sei

$$H(\omega) = \int_c^d \left(\int_a^\omega h(\xi, t)\, d\xi \right) dt\,.$$

Nach der zweiten Aussage des gerade bewiesenen Lemmas ist dann

$$H'(\omega) = \int_c^d h(\omega, t)\, dt\,,$$

also ist die linke Seite der zu beweisenden Gleichung

$$\int_a^b \left(\int_c^d h(\omega, t)\, dt \right) d\omega = \int_a^b H'(\omega)\, d\omega = H(b) - H(a) = H(b)\,,$$

und das ist nach Konstruktion gleich der rechten Seite. ∎

Der italienische Mathematiker GUIDO FUBINI (1879–1943) arbeitete zunächst auf dem Gebiet der Differentialgeometrie, interessierte sich dann aber immer mehr für analytische Themen wie Differentialgleichungen und Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher. 1901 wurde er Professor in Catania auf Sizilien, später in Genua und ab 1908 in Turin, wo er blieb, bis er 1939 trotz seiner angegriffenen Gesundheit wegen des italienischen Faschismus nach USA emigrierte und ans Institute for Advanced Study in Princeton wechselte. Der hier zitierte Satz ist zwar sein bekanntestes, aber ganz sicher nicht sein bedeutendstes Ergebnis.

Wir interessieren uns im Augenblick nicht für Integrale über endliche Intervalle, sondern für Integrale über die gesamte reelle Gerade; bevor wir den gerade bewiesenen Satz auf FOURIER-Integrale anwenden können, müssen wir also noch den Grenzübergang $a, c \to -\infty$ und $b, d \to +\infty$ durchführen. Nach dem WEIERSTRASSschen Konvergenzkriterium gibt es hier keine Probleme, *falls* die betroffenen Integrale absolut konvergent sind. Die für uns interessante Version des Satzes von FUBINI ist also

Satz: Die stetige Funktion $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei so, daß die uneigentlichen Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(\omega,t)|\, dt \right) d\omega \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(\omega,t)|\, d\omega \right) dt$$

beide konvergieren. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega,t)\, dt \right) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega,t)\, d\omega \right) dt\,.$$

■

c) Fourier-Integrale und Ableitungen

Die Aussagen des vorigen Abschnitts führen geradewegs auf Eigenschaften der FOURIER-Transformation; als erstes erhalten wir

Lemma: Für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und alle $r \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{d^r}{d\omega^r} \widehat{f}(\omega) = (-i)^r \widehat{t^r f}(\omega)$$

und

$$\omega^r \widehat{f}(\omega) = (-i)^r \widehat{f^{(r)}}(\omega)\,.$$

Beweis: Nach dem Lemma im vorigen Abschnitt ist

$$\frac{d^r \widehat{f}(\omega)}{d\omega^r} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^r}{d\omega^r} \left(f(t) e^{-i\omega t} \right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (-it)^r f(t) e^{-i\omega t}\, dt = (-i)^r \widehat{t^r f}(\omega)\,,$$

womit die erste Aussage bewiesen wäre.

Für die zweite begnügen wir uns der Einfachheit halber mit dem Fall $r = 1$, aus dem die allgemeine Aussage per Induktion folgt. Für $r = 1$ ist

$$\omega \widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \omega e^{-i\omega t}\, dt\,,$$

und dieses Integral läßt sich durch partielle Integration weiter umformen. Dazu nehmen wir $f(t)$ als den ersten Faktor und $\omega e^{-i\omega t}$ als den zweiten; letzterer hat die Stammfunktion

$$\frac{\omega e^{-i\omega t}}{-i\omega} = i e^{-i\omega t}\,,$$

und wir erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \omega e^{-i\omega t}\, dt = \left. f(t) \cdot i e^{-i\omega t} \right|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}(t) \cdot i e^{-i\omega t}\, dt\,.$$

Da f im SCHWARTZ-Raum liegt, strebt $f(t)$ für $t \to \pm\infty$ gegen null, der erste Summand verschwindet also, und übrig bleibt

$$\omega \widehat{f}(\omega) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}'(t) e^{-i\omega t}\, dt = -i \cdot \widehat{\dot{f}}(\omega)\,.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ∎

Die beiden Aussagen dieses Lemmas sind zentral für so ziemlich alle Anwendungen nicht nur der FOURIER-Transformation, sondern, wie wir bald sehen werden, auch für die Anwendung von Integraltransformationen überhaupt auf Differentialgleichungen.

Als erste Anwendung wollen wir uns überlegen, daß die inverse FOURIER-Transformation wirklich invers zur FOURIER-Transformation ist. Die Strategie ist folgende: Wir zeigen zunächst, daß dies für *eine* spezielle Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt, und folgern daraus in einem zweiten Schritt, daß dies für *alle* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ der Fall ist.

Für die eine spezielle Funktion aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ haben wir nicht viel Auswahl: Wir kennen bislang im wesentlichen nur zwei Beispiele, nämlich $f(t) = e^{-t^2}$ und $f(t) = e^{-1/(t-a)(b-t)}$ auf (a,b) und null sonst. Da das erste Beispiel etwas harmloser aussieht, nehmen wir dieses, und da es den Aufwand kaum vergrößert, später aber nützlich sein wird, verallgemeinern wir es leicht zu

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} \quad \text{mit} \quad \sigma \in \mathbb{R}\,.$$

Diese Funktion heißt GAUSS-Funktion mit Varianz σ^2; ihr Graph wird auch als *Glockenkurve* bezeichnet. Abbildung 15 zeigt die Kurven für $\sigma = 1/2$ (gepunktet), $\sigma = 1$ (ausgezogen) und $\sigma = 2$ (gestrichelt); wie man sieht, wird die Kurve flacher für größere σ, wohingegen kleine σ zu einem schärfer ausgeprägten Maximum führen. Im Abschnitt über Fehlerrechnung werden uns noch genauer mit dieser Funktion beschäftigen.

Nach Definition ist

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} e^{-i\omega t}\, dt\,,$$

aber da schon die Stammfunktion von e^{-t^2} nicht elementar ausdrückbar ist, haben wir sicherlich wenig Chancen, dieses Integral über eine Stammfunktion zu berechnen.

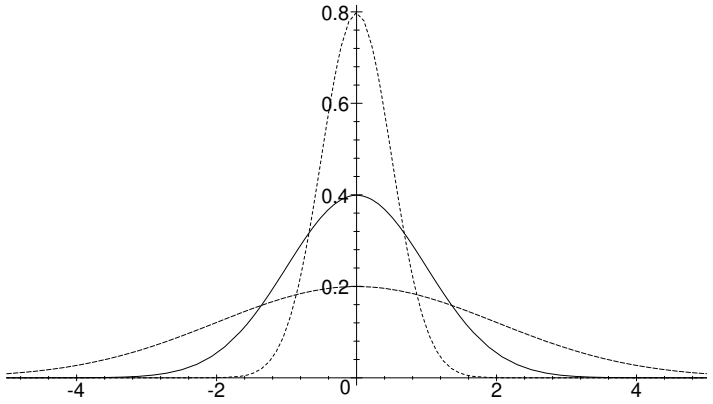


Abb. 15: Gaußkurven für $\sigma = \frac{1}{2}$, 1 und 2

Das Lemma aus dem vorigen Abschnitt erlaubt uns aber, Aussagen über die Ableitung von $\widehat{f}(\omega)$ machen:

$$\frac{d\widehat{f}}{d\omega}(\omega) = (-i)\cdot \widehat{tf}(\omega) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{-i\omega t}\, dt\,.$$

Der neue Integrand ist ziemlich ähnlich zur Ableitung des alten, denn

$$\frac{d}{dt} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t} = -\left(\frac{t}{\sigma^2} + i\omega\right) e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t}$$

oder

$$\frac{d}{dt}\left(-\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t}\right) = (t + i\omega\sigma^2)\, e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t}\,.$$

Die Funktion, die hier abgeleitet wird, geht für $t \to \pm\infty$ gegen null, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t + i\omega\sigma^2)\, e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t}\, dt = -\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0\,,$$

und damit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t}\, dt = -i\omega\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t}\, dt\,.$$

Die Ableitung von $\widehat{f}(\omega)$ ist daher

$$\frac{d\widehat{f}}{d\omega}(\omega) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}\sigma}(-i\omega\sigma^2) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\,dt = -\omega\sigma^2 \cdot \widehat{f}(\omega)\,.$$

Somit ist $\widehat{f}(\omega)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d\widehat{f}}{d\omega}(\omega) = -\omega\sigma^2 \cdot \widehat{f}(\omega)\,.$$

Diese Differentialgleichung hat auch die Lösung

$$g(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}\,,$$

wie man durch Differenzieren von $g(\omega)$ leicht nachrechnet, und für den Quotienten dieser beiden Lösungen ist

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\widehat{f}(\omega)}{g(\omega)}\right) &= \frac{d}{d\omega}\left(\widehat{f}(\omega)e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}\right)\\ &= \frac{d\widehat{f}}{d\omega}(\omega)\cdot e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} + \widehat{f}(\omega)\cdot\sigma^2\omega e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}\\ &= -\omega\sigma^2\widehat{f}(\omega)e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} + \omega\sigma^2\widehat{f}(\omega)e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} = 0\,.\end{aligned}$$

Also ist der Quotient eine Konstante, d.h.

$$\widehat{f}(\omega) = \widehat{f}(0)\cdot e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}\,.$$

Damit ist uns die FOURIER-Transformierte von f bekannt bis auf die Konstante

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt\,.$$

In **[HM1]**, Kap. 2, §6*c)* hatten wir auf dem Umweg über ein zweidimensionales Integral

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

berechnet; über die Substitution $u = t/\sqrt{2}\sigma$ folgt daraus sofort

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt = 1\,.$$

Als Endergebnis erhalten wir somit

$$\widehat{f}(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1/\sigma)}e^{\frac{-\omega^2}{2\cdot(1/\sigma)^2}}\,,$$

wobei die kompliziertere zweite Form zeigt, daß es sich abgesehen vom Vorfaktor $\sqrt{2\pi}/\sigma$ wieder um eine GAUSS-Funktion handelt, allerdings mit Varianz $1/\sigma^2$.

Mit der Abkürzung

$$N_\sigma(t) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}$$

können wir kurz schreiben

$$\widehat{N_\sigma}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}N_{1/\sigma}(\omega)\,.$$

Damit kennen wir natürlich auch die inverse FOURIER-Transformierte einer GAUSS-Funktion, denn nach den allgemeinen Rechenregeln ist

$$\check{N}_\sigma(\omega) = \frac{1}{2\pi}\widehat{N_\sigma}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}N_{\frac{1}{\sigma}}(\omega)\,.$$

Insbesondere können wir damit nachrechnen, daß die *inverse* FOURIER-Transformation zumindest in diesem Beispiel tatsächlich invers zur FOURIER-Transformation ist, d.h.

$$\check{\widehat{N}}_\sigma(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\check{N}_{\frac{1}{\sigma}}(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sigma}}N_\sigma(t) = N_\sigma(t)\,.$$

Genauso zeigt man, daß auch

$$\widehat{\check{N}}_{\sigma(t)} = N_\sigma(t)$$

ist; die beiden Transformationen sind hier also in der Tat invers zueinander.

d) Die Umkehrung der Fourier-Transformation

Wie angekündigt, soll aus dem Beispiel des vorigen Abschnitts nun in einem zweiten Schritt gefolgert werden, daß dies nicht nur für die Funktionen N_σ gilt, sondern für *alle* Funktionen aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, d.h.

Satz: Die FOURIER-Transformation und die inverse FOURIER-Transformation definieren zueinander inverse lineare Abbildungen

$$\begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \widehat{f} \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ g \mapsto \check{g} \end{cases} .$$

Insbesondere sind also beide Abbildungen Isomorphismen, und für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist

$$\check{\widehat{f}}(t) = f(t) .$$

Für das HERMITEsche Skalarprodukt auf $\mathcal{S}^2(\mathbb{R})$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}(\omega)}\,d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\omega)\overline{\check{g}(\omega)}\,d\omega ,$$

und damit insbesondere auch

$$\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\|\widehat{f}\right\|_2 = \sqrt{2\pi}\left\|\check{f}\right\|_2 \quad \text{mit} \quad \|f\|_2 = \sqrt{(f,\,f)} .$$

Beweis: Die Linearität ist, wie bei jedem Integral, klar; das Problem ist, ob $\widehat{f}$ und $\check{g}$ stark abfallend sind. Betrachten wir zunächst nur die Produkte $\omega^r \widehat{f}(\omega)$. Für diese ist

$$\left|\omega^r \widehat{f}(\omega)\right| = \left|(-i)^r \widehat{f^{(r)}}(\omega)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f^{(r)}(t)e^{-i\omega t}\,dt\right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|f^{(r)}(t)\right|\,dt < \infty ,$$

da f stark abfallend ist. Für

$$\omega^r \widehat{f}^{(k)}(\omega) = \omega^r (-i)^k \widehat{t^k f}(\omega)$$

können wir genauso argumentieren, und wegen des Zusammenhangs zwischen FOURIER-Transformation und inverser FOURIER-Transformation folgt daraus auch das Ergebnis für $\check{g}$.

Als nächstes wollen wir uns überlegen, daß für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\check{\widehat{f}}(t) = f(t)$$

ist. Dazu benutzen wir zwei zunächst beliebige weitere Funktionen $g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, die wir im Laufe der Rechnung nach Bedarf genauer festlegen werden.

Nach Definition ist

$$\check{\widehat{f}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega ;$$

wir betrachten das etwas allgemeinere Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}g(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\omega s}\,ds\right) e^{i\omega t}g(\omega)\,d\omega ,$$

das wir nach dem Satz von FUBINI weiter ausrechnen können als

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega(s-t)}\,d\omega\right) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\widehat{g}(s-t)\,ds .$$

Nun sei a eine positive reelle Konstante und $g(\omega) = h(a\omega)$, wobei die Funktion $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ im Augenblick noch beliebig ist. Dann führt die Substitution $\nu = a\omega$ auf

$$\widehat{g}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(a\omega)e^{-i\omega s}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu)e^{-i\nu\frac{s}{a}}\,\frac{d\nu}{a}$$

$$= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} h(\nu)e^{-i\nu\frac{s}{a}}\,d\nu = \frac{1}{a}\widehat{h}\left(\frac{s}{a}\right) .$$

und nach obiger Rechnung ist daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} h(a\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cdot \frac{1}{a} \cdot \widehat{h}\left(\frac{s-t}{a}\right)\, ds\,.$$

Mit der neuen Variablen

$$u \underset{\text{def}}{=} \frac{s-t}{a}$$

ist $s = t + au$, und wir können diese Formel auch kürzer schreiben als

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} h(a\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+au) \cdot \widehat{h}(u)\, du\,.$$

Beide Seiten sind stetig in a; für $a \to 0$ erhalten wir auf der linken Seite

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} h(0)\, d\omega = h(0) \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega = 2\pi \cdot h(0) \cdot \overset{\times}{\widehat{f}}(t)$$

und rechts

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \widehat{h}(u)\, du = f(t) \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(u)\, du = 2\pi \cdot f(t) \cdot \overset{\times}{\widehat{h}}(0)\,.$$

Also ist für zwei beliebige Funktionen $f, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ stets

$$h(0) \cdot \overset{\times}{\widehat{f}}(t) = f(t) \cdot \overset{\times}{\widehat{h}}(0)\,.$$

Setzen wir nun für h speziell eine GAUSS-Funktion ein, etwa

$$h(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2}}\,,$$

so wissen wir bereits aus dem obigem Beispiel, daß $\overset{\times}{\widehat{h}}$ und h übereinstimmen; insbesondere haben beide an der Stelle $\omega = 0$ den von null verschiedenen Wert $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, so daß wir durch diesen Wert dividieren können und die gewünschte Formel

$$\overset{\times}{\widehat{f}}(t) = f(t)$$

erhalten. Wegen der Beziehungen

$$\widehat{\overset{\vee}{f}}(\omega) = 2\pi \overset{\vee\vee}{f}(-\omega) \quad \text{und} \quad \overset{\vee}{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \widehat{f}(-\omega)$$

ist dann auch

$$\widehat{\overset{\vee}{f}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi f\big(-(-\omega)\big) = f(\omega)\,.$$

Zu beweisen bleibt noch, daß die beiden Transformationen auch das HERMITEsche Skalarprodukt auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ respektieren. Dazu wiederholen wir einfach die Rechnung zu Beginn des Beweises ohne den Faktor $e^{i\omega t}$: Für eine beliebige Funktion $g(\omega)$ aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) g(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) g(\omega)\, d\omega$$

nach dem Satz von FUBINI gleich

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega t}\, d\omega \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \widehat{g}(t)\, dt\,,$$

wir haben also die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) g(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \widehat{g}(t)\, dt\,. \qquad (*)$$

Um daraus Aussagen über das HERMITEsche Skalarprodukt herzuleiten, benutzen wir die Beziehungen

$$\widehat{\overset{\vee}{f}}(t) = 2\pi \overset{\times}{f}(-t) = 2\pi f(-t) \quad \text{oder} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \widehat{\overset{\vee}{f}}(-t) \qquad (**)$$

und

$$\begin{aligned} \overline{\widehat{g}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g}(t)\, \overline{e^{-i\omega t}}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g}(t)\, e^{i\omega t}\, dt \\ &= -\int_{\infty}^{-\infty} \overline{g}(-t) e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g}(-t) e^{-i\omega t}\, dt \\ &= \widehat{\overline{g}}(-\omega)\,, \end{aligned} \qquad (***)$$

wobei der Übersichtlichkeit halber $\overline{g}$ für diejenige Funktion steht, die jedem Wert t den Funktionswert $\overline{g}(t) = \overline{g(t)}$ zuordnet; entsprechend ist $\widehat{\overline{g}}(t) = \overline{\widehat{g}(t)}$.

Damit läßt sich das HERMITEsche Skalarprodukt folgendermaßen umformen:

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,dt \underset{(**)}{=} \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\widehat{f}}(-t)\widehat{\widehat{g}}(-t)\,dt$$

$$\underset{(*)}{=} \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\widehat{f}}(-t)\widehat{\overline{g}}(-t)\,dt \underset{(**)}{=} \frac{1}{4\pi^2}\cdot 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\widehat{\overline{g}}(-t)\,dt$$

$$\underset{(***)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\overline{\widehat{g}}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}(\widehat{f},\widehat{g})\,.$$

Die Aussage über das Produkt der inversen FOURIER-Transformierten folgt nun einfach daraus, daß die beiden Transformationen zueinander invers sind:

$$(\check{f},\check{g}) = \frac{1}{2\pi}(\widehat{\check{f}},\widehat{\check{g}}) = \frac{1}{2\pi}(f,g)\,.$$

■

Bemerkung: Falls wir für beide Transformationen den Vorfaktor $1/\sqrt{2\pi}$ gewählt hätten, würden beide das HERMITEsche Skalarprodukt respektieren, allerdings müßten wir uns dann ständig mit dieser Wurzel vor den Integralen herumschlagen. So hat jede Normierung ihre Vor- und Nachteile.

e) Die Fourier-Transformation eines Rechteckimpulses

Mit dem gerade bewiesenen Satz haben wir eine einigermaßen befriedigende Theorie der FOURIER-Transformation auf dem SCHWARTZ-Raum der stark abfallenden Funktionen. Dies genügt freilich nicht, denn wir möchten auch Funktionen transformieren, die *nicht* unendlich oft stetig differenzierbar sind. Für die *Existenz* des FOURIER-Integral brauchen wir die Differenzierbarkeit nicht; beispielsweise haben wir schon im Beweis

für die Existenz des FOURIER-Integrals für stark abfallende Funktionen gesehen, daß es dazu nur auf die Existenz des Integrals über den Betrag der Funktion von $-\infty$ bsi ∞ ankommt. Der Vollständigkeit halber sei dies hier noch einmal explizit festgehalten:

Definition: Eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ heißt *absolut integrierbar,* wenn das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt$$

existiert.

Lemma: Für eine absolut integrierbare Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ existiert die FOURIER-Transformierte

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt\,.$$

Beweis: Da $e^{-i\omega t}$ den Betrag eins hat, ist $|f(t)e^{-i\omega t}| = |f(t)|$; die Funktion $f(t)e^{-i\omega t}$ ist also absolut integrierbar, und damit existiert erst recht das uneigentliche Integral über die Funktion selbst.

■

Als *Beispiel* betrachten wir die FOURIER-Transformierte eines Rechteckimpulses

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{für } -b \le t \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\,.$$

Hier ist

$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-b}^{b} ae^{-i\omega t}\,dt = \frac{a}{-i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_{-b}^{b}$$

$$= \frac{a}{\omega}\frac{e^{i\omega b}-e^{-i\omega b}}{i} = \frac{2a\sin\omega b}{\omega}\,.$$

Mit der in der Elektrotechnik sehr wichtigen Funktion

$$\operatorname{sinc} t = \frac{\sin t}{t}$$

läßt sich dies auch schreiben als

$$\widehat{f}(\omega) = 2ab \operatorname{sinc} \omega b \, .$$

Anstelle von $\operatorname{sinc} t$ schreiben manche Autoren auch $\operatorname{si} t$, man darf die Funktion aber nicht mit Ihrer Stammfunktion, dem Integralsinus $\operatorname{Si} t$, verwechseln.

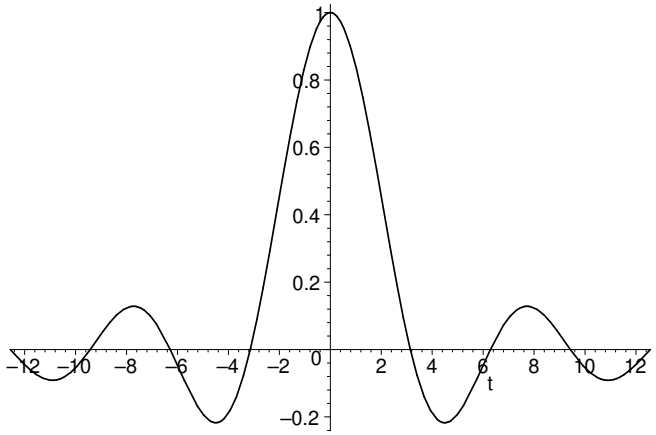


Abb. 16: Die Funktion $\operatorname{sinc} t = \frac{\sin t}{t}$

Natürlich stellt sich die Frage, was die gerade ausgerechnete FOURIER-Transformierte wert ist: Falls die in den letzten Abschnitten bewiesenen Sätze nicht zumindest zum größten Teil auch hier gelten, nützt uns das ganze nur wenig.

Einen Hinweis darauf, daß die Theorie auch für den Rechteckimpuls gelten könnte, liefert die Tatsache, daß sich der Rechteckimpuls annähern läßt durch stark abfallende Funktionen:

Wir kennen bereits eine Funktion in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, die auch außerhalb des Intervalls (a, b) verschwindet und in dessen Innern positiv ist, nämlich die

Funktion

$$g\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} e^{\dfrac{-1}{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

Allgemeiner hat für jede reelle Zahl $r > 0$ auch

$$g_r\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} e^{\dfrac{-r}{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

dieselbe Eigenschaft. Da $(t-a)(b-t)$ bei $t = (a+b)/2$ maximal wird, hat g_r dort sein einziges Maximum und

$$g_r\left(\frac{a+b}{2}\right) = e^{\dfrac{-4r}{(b-a)^2}} \, .$$

Unser Rechteckimpuls hat eins als Maximalwert; deshalb betrachten wir besser anstelle der g_r die mit dem Kehrwert des Maximums multiplizierten Funktionen

$$f_r\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} e^{\dfrac{4r}{(b-a)^2}} e^{\dfrac{-r}{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases} ,$$

die alle bei $(a+b)/2$ ihren Maximalwert eins annehmen.

Abbildung 17 zeigt für $a = 2$ und $b = 7$ die entsprechenden Funktionen mit $r = 10$, $r = 1$ und für $r = 0{,}1$. Die innerste Kurve für $r = 10$ zeigt noch ein klar ausgeprägtes Maximum, die Kurve für $r = 1$ ist schon deutlich flacher im mittleren Teil, und die für $r = 0{,}1$ schließlich erinnert schon recht gut an den Rechteckimpuls f.

Diese Abbildung legt die Vermutung nahe, daß die f_r für $r \to 0$ in der L^2-Norm gegen f konvergieren. Leider können wir aber $\|f - f_r\|_2$ nicht ausrechnen, da wir keine Stammfunktion von f_r kennen. (Schon e^{-t^2} ist

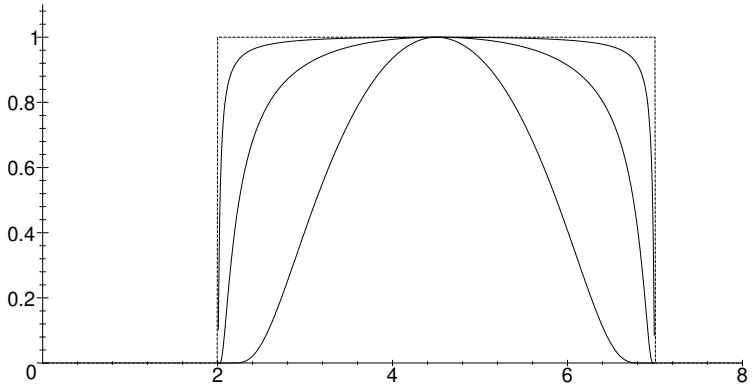


Abb. 17: Approximation des Rechteckimpulses durch stark abfallende Funktionen

schließlich nicht elementar integrierbar.) Deshalb müssen wir uns mit Abschätzungen begnügen. Wir erwarten, daß f_r im mittleren Bereich immer besser mit der Geraden auch Höhe eins übereinstimmt, während es am Rand des Intervalls immer steiler gegen null geht. Daher wählen wir ein $\delta > 0$ und betrachten getrennt denn mittleren Teil $[a+\delta, b-\delta]$ des Intervalls und die beiden Randintervalle $[a, a+\delta]$ und $[b-\delta, b]$.

Über das Verhalten von f_r in den Randintervallen können wir so gut wie nichts sagen; wir wissen nur, daß auf jeden Fall $0 \le f_r(t) \le 1$ ist und schätzen die Differenz zwischen $f(t) = 1$ und $f_r(t)$ daher ab durch eins.

Im mittleren Intervall ist die Differenz zwischen $f(t)$ und $f_r(t)$ im Intervallmittelpunkt $(a+b)/2$ gleich null und wächst dann, wie man sich durch Ableiten von f_r leicht überzeugt, monoton. Insbesondere ist f_r monoton wachsend sowohl in $t-a$ als auch in $b-t$; wir erhalten daher für das mittlere Intervall eine untere Schranke, wenn wir für beide Differenzen den Wert δ einsetzen, was auf

$$e^{\frac{4r}{(b-a)^2}} e^{\frac{-r}{\delta(1-\delta)}} = e^{-r\left(\frac{1}{\delta(1-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2}\right)}$$

führt. Für $t \in [a+\delta, b-\delta]$ gilt daher

$$f(t) - f_r(t) \le 1 - e^{-r\left(\frac{1}{\delta(1-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2}\right)} .$$

Dieser Ausdruck ist nicht sehr angenehm, wir wollen ihn noch weiter abschätzen. Nach Konstruktion von f_r ist der Exponent negativ, und für alle $x \ge 0$ ist $1 - e^{-x} \le x$, denn dies gilt für $x = 0$, und die Ableitung e^{-x} von $1 - e^{-x}$ ist für jedes positive x kleiner als die Ableitung eins von x. Daher ist für $t \in [a+\delta, b-\delta]$

$$\begin{aligned} f(t) - f_r(t) &\le 1 - e^{-r\left(\frac{1}{\delta(1-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2}\right)} \\ &\le r\left(\frac{1}{\delta(1-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2}\right) . \end{aligned}$$

Wir interessieren uns vor allem für kleine Werte von δ; deshalb betrachten wir im folgenden nur noch Werte $\delta \le \frac{1}{2}$. Dann ist $1 - \delta \ge \frac{1}{2}$ und

$$f(t) - f_r(t) \le r\left(\frac{2}{\delta} - \frac{4}{(b-a)^2}\right) .$$

Damit können wir die L^2-Norm der Differenz abschätzen:

$$\begin{aligned} \|f - f_r\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f_r(t)|^2 \, dt \\ &= \int_a^{a+\delta} |f(t) - f_r(t)|^2 \, dt + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(t) - f_r(t)|^2 \, dt \\ &\quad + \int_{b-\delta}^{b} |f(t) - f_r(t)|^2 \, dt \\ &\le \delta + r^2(b-a)\left(\frac{2}{\delta} - \frac{4}{(b-a)^2}\right)^2 + \delta . \end{aligned}$$

Setzen wir hier speziell $\delta = \sqrt{r}$, was wir für hinreichend kleine r dürfen, so wird dies zu

$$\begin{aligned} &\sqrt{r} + r^2(b-a)\left(\frac{2}{\sqrt{r}} - \frac{4}{(b-a)^2}\right)^2 + \sqrt{r} \\ &= 2\sqrt{r} + r(b-a)\left(2 - \frac{4\sqrt{r}}{(b-a)^2}\right)^2 , \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck geht gegen null für $r \to 0$. Also konvergieren die f_r für $r \to \infty$ in der L^2-Norm gegen f.

Der Vollständigkeit halber wollen wir uns noch überlegen, daß auch die Fläche zwischen den Graphen von f_r und von f für $r \to \infty$ gegen null geht: Wenn wir wie eben vorgehen, erhalten wir die Ungleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f_r(t)| \, dt \leq \delta + r(b-a)\left(\frac{2}{\delta} - \frac{4}{(b-a)^2}\right) + \delta \,,$$

und wenn wir hier wieder spezialisieren auf $\delta = \sqrt{r}$ wird dies zu

$$\sqrt{r}\left(2 + (b-a)\left(2 - \frac{4\sqrt{r}}{(b-a)^2}\right)\right) \,,$$

was für $r \to \infty$ gegen null geht.

Da f sowie sämtliche f_r außerhalb des Intervalls $[a, b]$ verschwinden, geht damit auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f_r(t)| \, dt$$

für $r \to \infty$ gegen null. Dieses Integral bezeichnet man als die L^1-Norm von $f - f_r$; die Folge der Funktionen f_r konvergiert also auch in der L^1-Norm gegen f.

§6: Fourier-Transformationen von Distributionen

a) Distributionen auf dem Schwartz-Raum

Die bloße Existenz einer FOURIER-Transformierten nützt uns relativ wenig; wir wollen auch, daß – soweit wie möglich – die für stark abfallende Funktionen bewiesenen Sätze gelten, und wir möchten zum Nachweis dieser Tatsache die doch recht umfangreichen Beweise aus dem letzten Paragraphen wiederverwenden können.

Dazu betrachten wir für eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die lineare Abbildung

$$T_f: \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \qquad \varphi \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt \end{cases} .$$

(Man beachte daß hier, trotz der komplexwertigen Funktionen, keine komplexe Konjugation steht!)

Falls diese Abbildung wohldefiniert ist, *falls* also das uneigentliche Integral für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ existiert, und *falls* zusätzlich auch die FOURIER-Transformierte $\widehat{f}(\omega)$ existiert *und* zusätzlich auch noch alle Integrale $T_{\widehat{f}}(\varphi)$ konvergieren, ist für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} T_{\widehat{f}}(\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\,\varphi(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt\right)\varphi(\omega)\,d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega\right)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{\varphi}(t)\,dt \\ &= T_f(\widehat{\varphi}) \end{aligned}$$

– *sofern* alle dastehenden Integrale absolut konvergieren, so daß wir den Satz von FUBBINI anwenden können.

Diese Beziehung

$$T_{\widehat{f}}(\varphi) = T_f(\widehat{\varphi})$$

wird uns erlauben, die FOURIER-Transformation einer uns interessierenden Funktion f zurückzuführen auf FOURIER-Transformationen auf dem SCHWARTZ-Raum, wo wir bereits alle Arten von schönen Aussagen bewiesen haben.

Als erstes müssen wir uns aber überlegen, für welche Funktionen f die Abbildung T_f überhaupt existiert. Da wir an die Funktionen φ so extrem hohe Anforderungen stellen, kommen wir bei f mit sehr schwachen Voraussetzungen aus:

Lemma: Falls es zu einer stückweise stetigen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Konstanten $k \in \mathbb{N}_0$ und $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so daß

$$|f(t)| \le c \cdot |t|^k$$

ist, existiert $T_f(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Beweis: Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist $t^\ell\,\varphi(t)$ beschränkt für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$, insbesondere also für $\ell = k$ und $\ell = k+2$. Damit ist auch deren Summe beschränkt, es gibt also eine Konstante $M > 0$, für die

$$\left|t^k(1+t^2)\varphi(t)\right| = \left|t^k\varphi(t) + t^{k+2}\varphi(t)\right| \le M$$

ist. Damit folgt

$$\left|(1+t^2)f(t)\varphi(t)\right| \le \left|(1+t^2)ct^k\varphi(t)\right| \le cM$$

und

$$|f(t)\varphi(t)| \le \frac{cM}{1+t^2}\,.$$

Da das Integral über die rechte Seite existiert (wie wir beim Beweis des Lemmas in §5*a)* gesehen haben, ist es gleich $cM\pi$), ist auch das Integral $T_f(\varphi)$ absolut konvergent. ∎

Für die Existenz von $T_f(\varphi)$ reicht also, daß f nicht schneller wächst als ein Polynom.

Betrachten wir als nächstes die wichtigsten Eigenschaften von T_f: Offensichtlich ist T_f eine lineare Abbildung, denn für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist

$$\begin{aligned} T_f(\lambda\varphi + \mu\psi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\big(\lambda\varphi(t) + \mu\psi(t)\big)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda f(t)\varphi(t)\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} \mu f(t)\psi(t)\,dt \\ &= \lambda T_f(\varphi) + \mu T_f(\psi)\,. \end{aligned}$$

Außerdem hat T_f eine Stetigkeitseigenschaft, die wir im Hinblick auf spätere Anwendungen gleich etwas allgemeiner formulieren wollen:

Lemma: $\varphi_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und $f, \varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ seien Funktionen derart, daß die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi_n(t)\,dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\,dt$$

existieren. Außerdem sei f beschränkt und

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t) - \varphi_n(t)|\,dt \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\,dt\,.$$

Beweis: Ist $|f(t)| \le M$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so ist

$$\begin{aligned} &\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_n(t)\,dt\right| \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot |\varphi(t) - \varphi_n(t)|\,dt \\ &\le M \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t) - \varphi_n(t)|\,dt\,, \end{aligned}$$

und letztere ist das M-fache einer Nullfolge, also selbst Nullfolge. ∎

Wir wollen dies anwenden auf Funktionen φ aus dem SCHWARTZ-Raum und Funktionen f, die höchstens polynomial ansteigen, die aber nicht notwendigerweise beschränkt sind. Um das zu kompensieren, führen wir für Folgen aus dem SCHWARTZ-Raum einen stärkeren Konvergenzbegriff

ein, wobei wir (wie schon bei der Definition einer stark abfallenden Funktion) gleich so viel wie nur irgendwie möglich fordern:

Definition: Eine Folge $\big(\varphi_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ konvergiert gegen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, wenn für alle $r, k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \Big| t^k \big(\varphi^{(r)}(t) - \varphi(t)\big) \Big| \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty \,.$$

Wir fordern also, daß *alle* Produkte von t-Potenzen und Ableitungen von φ_n gegen die entsprechende Konstruktion für φ konvergieren. Unter dieser extrem starken Voraussetzung verwundert nicht

Lemma: f sei eine stückweise stetige Funktion, die einer Abschätzung der Form $|f(t)| \le ct^k$ genüge. Dann ist für jede gegen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ konvergente Folge von Funktionen $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\lim_{n\to\infty} T_f(\varphi_n) = T_f(\varphi) \,.$$

Beweis: Wir gehen ähnlich vor wie beim Beweis der Existenz von $T_f(\varphi)$: Für jedes $\ell \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \Big| t^\ell \big(\varphi(t) - \varphi_n(t)\big) \Big|$$

eine Nullfolge, es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \Big| t^\ell \big(\varphi(t) - \varphi_n(t)\big) \Big| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N \,.$$

Insbesondere gibt es solche Werte für $\ell = k$ und für $\ell = k+2$, und damit gibt es auch zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \Big| t^k(1+t^2) \big(\varphi(t) - \varphi_n(t)\big) \Big| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N \,,$$

d.h.

$$\Big| t^k \big(\varphi(t) - \varphi_n(t)\big) \Big| < \frac{\varepsilon}{1+t^2} \quad \text{für alle } n > N \text{ und } t \in \mathbb{R} \,.$$

Damit ist

$$\big|T_f(\varphi) - T_f(\varphi_n)\big| \le \int_{-\infty}^{\infty} \big| f(t)\big(\varphi(t) - \varphi_n(t)\big)\big| \, dt$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} \Big| ct^k \big(\varphi(t) - \varphi_n(t)\big)\Big| \, dt \le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c\varepsilon}{1+t^2} \, dt = c\pi \cdot \varepsilon$$

für alle $n > N_0$. Da c und π konstant sind und wir ε beliebig klein machen können, folgt die Behauptung. ∎

Definition: Eine *Distribution* auf dem SCHWARTZ-Raum ist eine lineare Abbildung $T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, so daß für jede gegen ein $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ konvergente Folge stark abfallender Funktionen φ_n gilt:

$$\lim_{n\to\infty} T_f(\varphi_n) = T_f(\varphi) \,.$$

Nach dem gerade bewiesenen Lemma ist also T_f für jede stückweise stetige Funktion f, die nicht stärker als ein Polynom wächst, eine Distribution auf dem SCHWARTZ-Raum.

Das sind allerdings bei weitem noch nicht alle Distributionen auf dem SCHWARTZ-Raum: Beispielsweise ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ auch

$$\Delta_a\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \quad \varphi \mapsto \varphi(a) \end{cases}$$

eine Distribution: Die Linearität ist klar, und für eine gegen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ konvergente Folge stark abfallender Funktionen φ_n ist insbesondere

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t) - \varphi_n(t)|$$

eine Nullfolge, erst recht also $|\varphi(a) - \varphi_n(a)|$, so daß es auch mit der Stetigkeit keine Probleme gibt.

Diese Distribution bezeichnet man als DIRACsche Delta-Distribution. Nicht ganz korrekt spricht man auch von einer DIRACschen Delta-

Funktion und schreibt, gerade so als sei Δ_a von der Form T_δ,

$$\Delta_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t)\,dt \quad \text{und} \quad \Delta_a(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) f(t)\,dt\,.$$

(Letztere Formel würde durch Anwendung der Substitutionsregel aus der ersten folgen, falls $\delta(t)$ wirklich eine Funktion wäre.)

Tatsächlich hat natürlich in beiden Formel die rechte Seite nur *als ganzes* eine sinnvolle Bedeutung, nämlich das, was auf der linken Seite steht. Trotzdem hat sich die Schreibweise gerade in der technischen Literatur eingebürgert und soll daher auch hier verwendet werden.

PAUL ADRIEN MAURICE DIRAC (1902–1984) wuchs auf in England als Sohn eines Schweizer Vaters und einer englischen Mutter. Trotz großem Interesse an der Mathematik studierte er von 1918–1921 Elektrotechnik an der Universität Bristol, da er auf keinen Fall Lehrer werden wollte. 1921 erhielt er ein Stipendium der Universität Cambridge; da dieses aber nicht zum Leben gereicht hätte, blieb er in Bristol, wo ihn die Universität von Studiengebühren befreite und seinen Wechsel in die Mathematik erlaubte. Ab 1923 arbeitete er in Cambridge an seiner Dissertation über Quantenmechanik, die er 1926 abschloß. 1930 folgte ein Buch über Quantenmechanik, für das er 1933 mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet wurde. 1932 bekam er einen Lehrstuhl für Mathematik an der Universität Cambridge. Nach seiner Emeritierung lebte er in Florida, wo er 1971 Physikprofessor an der Florida State University wurde. Zentrales Thema seiner Arbeiten war die Anwendung mathematischer Methoden auf die Quantenmechanik und die Relativitätstheorie sowie auch Ansätze zur (bis heute nicht befriedigend gelösten) Vereinheitlichung dieser beiden Theorien.

Tatsächlich benutzt man Formeln wie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t)\,dt = f(0)$$

nicht nur für Funktionen aus dem SCHWARTZ-Raum, sondern für beliebige stetige (und teilweise auch noch allgemeinere) Funktionen. Dies ist unproblematisch, solange man sich auf Operationen beschränkt, die

auch für lineare Funktionen auf dem jeweils betrachteten Funktionenraum sinnvoll sind.

Unabhängig vom Funktionenraum ist es sinnlos, bei einer Distribution wie $\delta(t)$ von *Funktionswerten* zu reden: Wenn es wirklich eine *Funktion* $\delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gäbe, für die

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t)\,dt = f(0)$$

wäre für jede (stark abfallende oder auch einfach stetige) Funktion f, so müßte $\delta(t)$ für $t \neq 0$ verschwinden – abgesehen eventuell von einigen isolierten Punkten, die für die Integration bedeutungslos sind. Damit müßte aber unabhängig vom Funktionswert $\delta(0)$ und unabhängig von der Funktion f das Integral verschwinden.

Die „Lösung“, $\delta(0) = \infty$ zu setzen, führt nicht zu einer sinnvollen Interpretation des linksstehenden Integrals, denn wenn man einen Ausdruck wie $2 \cdot \infty$ überhaupt interpretieren kann, dann wohl nur im Sinne von $2 \cdot \infty = \infty$ tun, und damit wäre $2\delta(t) = \delta(t)$, obwohl die Distributionen

$$\begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \quad \varphi \mapsto \varphi(0) \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \quad \varphi \mapsto 2\varphi(0) \end{cases}$$

wohldefiniert und wohlunterscheidbar sind.

Problemlos dagegen sind Linearkombinationen der Art

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \delta(t - t_k)\,,$$

denn Linearkombinationen von Distributionen sind wieder Distributionen. Im vorliegenden Fall wäre dies die Distribution

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \Delta_{t_k}\,,$$

für eine stark abfallende Funktion φ ist also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \delta(t - t_k) \right) \varphi(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} a_k \Delta_{t_k}(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi(t_k)\,,$$

und da man zumindest die DIRAC-Distribution auch einfach als lineare Abbildung auf $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ betrachtet, kann man dies auch für eine beliebige stetige Funktion φ sinnvoll interpretieren.

So ist beispielsweise

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1)e^{i\omega t}\,dt = e^{i\omega}$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\big(\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)\big)\,e^{i\omega t}\,d\omega = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \cos t\,.$$

Zumindest wenn wir uns auf Distributionen auf dem SCHWARTZ-Raum beschränken, sind auch viele unendliche Linearkombinationen wie etwa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k \quad \text{oder} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k\Delta_k$$

wohldefiniert, denn für eine stark abfallende Funktion φ konvergieren sowohl

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(k) \quad \text{als auch} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k\varphi(k)\,.$$

In einer (hier nicht betrachteten) Distributionentheorie über dem Raum aller stetiger oder auch aller beliebig oft differenzierbarer Funktionen wäre allerdings keine der beiden Summen wohldefiniert; beisoielsweise könnte man hier $\varphi \equiv 1$ einsetzen, was zu divergenten Summen führen würde.

Wir können eine Distribution T auf dem SCHWARTZ-Raum nicht nur mit Konstanten multiplizieren, sondern allgemeiner auch mit mit einer beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion g, die höchstens polynomiales Wachstum hat: Für eine Distribution der Form T_f ist

$$T_{gf}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\big(g(t)\varphi(t)\big)\,dt = T_f(g\varphi)\,,$$

da auch $g\varphi$ eine stark abfallende Funktion ist. Somit können wir für eine beliebige Distribution T auf dem SCHWARTZ-Raum das Produkt

$$gT\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \quad \varphi \mapsto T(g\varphi) \end{cases}$$

definieren. Beispielsweise gehört $t\delta(t)$ zur Distribution

$$t\Delta_0\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \quad \varphi \mapsto \Delta_0(t\varphi) = (t\varphi)(0) = 0\cdot\varphi(0) = 0\,, \end{cases}$$

d.h. $t\delta = 0$. Man überlegt sich leicht, daß für jede Funktion g wie oben gilt $g\delta = g(0)\delta$.

Problematischer ist die Definition eines Produkts von Distributionen: Die obige Rechnung drückt T_{gf} aus durch T_f und g, nicht aber durch T_f und T_g, wie wir es bräuchten, um ein Produkt zweier Distributionen zu definieren. Auch sonstige Versuche, den Ausdruck $T_{gf}(\varphi)$ umzuformen, führen nicht zu brauchbareren Ergebnissen, und in der Tat kann man in der Theorie der Distributionen ein Produkt nur als Linearform auf dem SCHWARTZ-Raum der stark abfallenden Funktionen *zweier* Veränderlicher definieren. Dieser Raum wird weiter hinten zwar kurz erwähnt werden, es würde aber zu weit führen, ihn wirklich zu behandeln. Wir wollen daher nur festhalten, daß Produkte von δ-„Funktionen“ nicht sinnvoll als Distributionen auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ definiert werden.

Ähnlich ist es mit Ausdrücken der Form $e^{\delta(t)}$ oder $\sin\delta(t)$: Da beispielsweise

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{f(t)}\varphi(t)\,dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{\varphi(t)}\,dt$$

nichts miteinander zu tun haben (und $e^{\varphi(t)}$ nicht einmal eine stark abfallende Funktion ist), können wir hier nicht einfach die Exponentialfunktion ins Argument von T_f schieben, und es ist gibt auch keine sonstige Art und Weise, Ausdrücken wie $e^{\delta(t)}$ oder $\sin\delta(t)$ einen Sinn zu geben.

b) Die Fourier-Transformierte einer Distribution

Die Rechnung zu Beginn von Abschnitt *a)* legt folgende Definition nahe:

Definition: Die FOURIER-Transformierte der Distribution $T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ ist die Distribution

$$\widehat{T}\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \quad \varphi \mapsto T(\widehat{\varphi}) \end{cases};$$

die inverse FOURIER-Transformierte von T ist

$$\check{T}\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \quad \varphi \mapsto T(\check{\varphi}) \end{cases}.$$

Zunächst müssen wir uns überlegen, ob das überhaupt sinvoll ist:

Lemma: *a)* Für eine Distribution $T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ sind auch $\widehat{T}$ und $\check{T}$ wieder Distributionen.
b) $\check{\widehat{T}} = \widehat{\check{T}} = T$.

Beweis: a) Die Linearität von $\widehat{T}$ ist klar, da die FOURIER-Transformation auf dem SCHWARTZ-Raum eine lineare Operation ist, d.h. die FOURIER-Transformierte von $\lambda\varphi + \mu\psi$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ist $\lambda\widehat{\varphi} + \mu\widehat{\psi}$.

Für die Stetigkeit von $\widehat{T}$ genügt es wegen der Stetigkeit von T, wenn wir zeigen, daß für eine konvergente Folge von Funktionen $\varphi_n(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit Grenzwert $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ auch die Folge der FOURIER-Transformierten $\widehat{\varphi_n}$ gegen $\widehat{\varphi}$ konvergiert. Wir müssen also zeigen, daß für je zwei Zahlen $k, r \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \left| \omega^k \left(\widehat{\varphi_n}\right)^{(r)} - \omega^k \left(\widehat{\varphi}\right)^{(r)} \right| = 0 .$$

Nach den Formeln aus §5*c)* ist

$$\omega^k \left(\widehat{\varphi}\right)^{(r)} = \omega^k \cdot (-i)^r \widehat{t^r\varphi} = (-1)^r \omega^k \widehat{t^r\varphi} = (-1)^{r+k} \widehat{\psi}$$

mit $\psi = \frac{d^k}{dt^k}(t^r\varphi)$. Durch k-fache Anwendung der Produktregel folgt, daß ψ Linearkombination von Termen der Form $t^s\varphi^{(\ell)}$ ist. Wegen der Dreiecksungleichung reicht es also, zu zeigen, daß für alle $\ell, s \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \left| \widehat{t^\ell\varphi_n^{(s)}} - \widehat{t^\ell\varphi^{(s)}} \right| = 0 .$$

Nach Definition der Konvergenz in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ gibt es zu ℓ, s und jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so daß für $n \geq N_1$ gilt

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^\ell \varphi_n^{(s)} - t^\ell \varphi^{(s)} \right| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Genauso gibt es auch ein $N_2 \in \mathbb{N}$, so daß für $n \geq N_2$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^{\ell+2} \varphi_n^{(s)} - t^{\ell+2} \varphi^{(s)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist; für n größer oder gleich dem Maximum N_0 von N_1 und N_2 gitlt also

$$\left| t^\ell \varphi_n^{(s)} - t^\ell \varphi^{(s)} \right| < \frac{\varepsilon}{1+t^2} .$$

Damit ist für $n \geq N_0$

$$\left| \widehat{t^\ell\varphi_n^{(s)}}(\omega) - \widehat{t^\ell\varphi^{(s)}}(\omega) \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(t^\ell(\varphi_n^{(s)}(t) - t^\ell(\varphi^{(s)}(t)\right) dt \right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| t^\ell(\varphi_n^{(s)}(t) - t^\ell(\varphi^{(s)}(t) \right| \, dt \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} \leq \varepsilon\pi ,$$

und damit ist der Limes für $n \to \infty$ gleich null, wie behauptet. ∎

Satz: Falls für die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt$ existiert, ist $\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}$.

Beweis: Da $e^{-i\omega t}$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$ Betrag eins hat, ist

$$\left| f(t) e^{-i\omega t} \right| = |f(t)| .$$

Somit konvergiert für eine solche Funktion das Integral $\widehat{f}(\omega)$ absolut, so daß die Existenz der FOURIER-Transformierten kein Problem ist. Auch die Integrale aus der Rechnung zu Beginn von Abschnitt *a)* konvergieren dann absolut, so daß die Behauptung folgt. ∎

Um zu sehen, was die neue Definition bringt, wollen wir die FOURIER-Transformierte des Sinus berechnen:

$$\begin{aligned}\widehat{\sin}\,\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin t\, e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} e^{-i\omega t}\,dt \\ &= \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i(1-\omega)t} - e^{i(-1-\omega)t}\right) dt \\ &= \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(1-\omega)t}\,dt - \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-1-\omega)t}\,dt\end{aligned}$$

existiert offensichtlich nicht, denn für $\omega = \pm 1$ hat eines der Integrale den Integranden eins, wird also unendlich, und in allen anderen Fällen integrieren wir von $-\infty$ bis ∞ über reine Schwingungen, und solche Integrale konvergieren nicht.

Im Distributionensinne ist

$$\begin{aligned}\widehat{T}_{\sin}(\varphi) = T_{\sin}(\widehat{\varphi}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin\omega\,\widehat{\varphi}(\omega)\,d\omega = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\omega} - e^{-i\omega})\,\widehat{\varphi}(\omega)\,dt \\ &= \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\omega)e^{i\omega}\,d\omega - \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\omega)e^{i\omega}\,d\omega \\ &= \frac{2\pi}{2i}\left(\check{\widehat{\varphi}}(1) - \check{\widehat{\varphi}}(-1)\right) = -\pi i\big(\varphi(1)-\varphi(-1)\big)\,,\end{aligned}$$

denn für jede Funktion g ist

$$\check{g}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega, \quad \text{also} \quad \check{g}(1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega}\,d\omega\,.$$

Für die oben eingeführte DIRAC-Distribution ist

$$\Delta_a(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\varphi(t)\,dt = \varphi(a)\,,$$

und damit

$$\widehat{T}_{\sin} = -\pi i\big(\Delta_1 - \Delta_{-1}\big)\,.$$

Kurz, wenn auch etwas kriminell, können wir dies als

$$\widehat{\sin}(\omega) = -\pi i\big(\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)\big)$$

schreiben.

Demnach sollte, wenn diese Rechnung auf ein sinnvolles Ergebnis führte,

$$\sin t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\sin}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

sein, und in der Tat ist

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (-\pi i)\big(\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)\big)e^{i\omega t}\,d\omega \\ &= -\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega-1)e^{i\omega t}\,d\omega + \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega+1)e^{i\omega t}\,d\omega \\ &= -\frac{i}{2}\big(e^{it} - e^{-it}\big) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \sin t\,.\end{aligned}$$

c) Funktionen und ihre Distributionen

Der letzte Abschnitt hat gezeigt, daß die FOURIER-Transformation auf dem Niveau der Distributionen weitgehend unproblematisch ist. Was uns in erster Linie interessiert, sind aber Aussagen über die FOURIER-Transformation auf dem Niveau der *Funktionen:* Hier wissen wir zwar, wie man einer stückweise stetigen Funktion, deren Wachstum durch eine Potenz beschränkt ist, eine Distribution zuordnen können, wir wissen aber noch nicht, ob umgekehrt die Funktion durch ihre Distribution eindeutig bestimmt ist. Diese Frage wollen wir jetzt untersuchen.

Wir gehen also davon aus, daß wir zwei stückweise stetige Funktionen f und g haben derart, daß $T_f = T_g$ ist. Für jede stark abfallende Funktion φ

ist dann

$$T_f(\varphi) = T_g(\varphi) \quad \text{oder} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\varphi(t)\,dt\,.$$

Wir wollen dies für einige spezielle Funktionen φ anwenden; da wir leider wir nur sehr wenige stark abfallende Funktionen kennen, gibt es dazu wenig Auswahl.

Wir kennen beispielsweise aus §5*e)* die Funktionen

$$\varphi_{a,b,r}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} e^{\frac{4r}{(b-a)^2}} e^{\frac{-r}{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases},$$

von denen wir dort gezeigt hatten, daß sie für feste Werte von a, b und ein variables $r > 0$ für $r \to 0$ gegen den Rechteckimpuls

$$R_{a,b}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } a \le t \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

konvergieren. Diese Konvergenz haben wir sowohl bezüglich der L^2-Norm als auch bezüglich der L^1-Norm nachgerechnet. Wegen letzterer können wir aus den Gleichungen

$$T_f(\varphi_{a,b;r}) = T_g(\varphi_{a,b;r})$$

auf Grund des zweiten Lemmas aus Abschnitt *a)* schließen, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)R_{a,b}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)R_{a,b}(t)\,dt, \quad \text{d.h.} \quad \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt$$

ist für alle a, b.

Als stückweise stetige Funktionen haben f und g Stammfunktionen F und G; damit ausgedrückt ist also

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R}\,.$$

(Strenggenommen haben wir das nur gezeigt für $b > a$, aber im Falle $b < a$ können wir einfach obige Überlegung für das Intervall $[b, a]$ wiederholen. Setzen wir $b = a + h$, so gilt daher auch

$$F(a+h) - F(a) = G(a+h) - G(a)$$

und

$$\frac{F(a+h) - F(a)}{h} = \frac{G(a+h) - G(a)}{h}$$

für alle $a, h \in \mathbb{R}$ mit $h \neq 0$.

Lassen wir in dieser Gleichung h gegen null gehen, erhalten wir, sofern F *bzw.* G im Punkt a differenzierbar ist, den Wert der jeweiligen Ableitung im Punkt a.

Eine stückweise stetige Funktion hat eine stetige Stammfunktion; diese ist überall dort differenzierbar, wo die Ausgangsfunktion keine Sprungstelle hat, und dort ist ihre Ableitung gleich dem Funktionswert der Ausgangsfunktion. Damit gilt

$$f(t) = g(t) \quad \text{falls } f, g \text{ im Punkt } t \text{ stetig sind.}$$

Die Funktionen f und g können sich also höchstens an ihren Sprungstellen unterscheiden.

Sind f und g sogar stetig, ist also $f = g$, und das gilt auch, wenn sowohl f als auch g nur die in §4*e)* betrachtete Mittelwerteigenschaft

$$f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} \quad \text{und} \quad g(t) = \frac{g(t^+) + g(t^-)}{2}$$

haben, denn die links- und rechtsseitigen Grenzwerte hängen nur von den Werten ab, die die Funktionen an Stellen annehmen, an denen sie stetig sind.

Das wird uns in den meisten Fällen reichen, insbesondere wenn wir uns auf absolut integrierbare Funktionen beschränken:

Definition: Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *absolut integrierbar,* wenn sie stückweise stetig ist und

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt$$

konvergiert.

Lemma: Ist die Funktion f absolut integrierbar, so existiert die FOURIER-Transformierte von f als Funktion; diese Funktion ist stetig und beschränkt.

Beweis: Nach Definition ist

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt\,.$$

Der Betrag des Integranden ist $|f(t)|$; da f absolut integrierbar ist, konvergiert das Integral absolut und ist damit insbesondere konvergent.

Der Integrand $f(t)e^{-i\omega t}$ ist als Funktion von ω für jeden Wert von t stetig und als Funktion von t immerhin noch stückweise stetig. Daher zeigt das Lemma aus §5*b)* zunächst, daß für Intervalle $[a,b]$, in denen f stetig ist, auch

$$\int_a^b f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

eine stetige Funktion von ω ist. Damit gilt dasselbe für jedes endliche Intervall, denn endliche Summen stetiger Funktionen sind wieder stetig. Für $a \to -\infty$ und $b \to \infty$ schließlich konvergiert das Integral nach Voraussetzung absolut, also auch gleichmäßig, und damit ist auch die Grenzfunktion $\widehat{f}(\omega)$ stetig und beschränkt. ∎

d) Ableitungen von Distributionen

Für die Lösung vieler wichtiger Differentialgleichungen wird sich als extrem nützlich erweisen, daß die FOURIER-Transformation (und auch einige ihrer Modifikationen) eine Differentiation in eine Multiplikation überführt: Wie wir in §5*c)* gesehen haben, ist für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und alle $r \in \mathbb{N}$

$$\frac{d^r}{d\omega^r}\widehat{\varphi}(\omega) = (-i)^r\widehat{t^r\varphi}(\omega)$$

und

$$\omega^r\,\widehat{\varphi}(\omega) = (-i)^r\widehat{\varphi^{(r)}}(\omega)\,.$$

Da Lösungen interessanter Differentialgleichungen nur selten stark abfallende Funktionen sind, hätten wir das gerne auch für allgemeinere Funktionen, und wenn möglich möchten wir es ohne großen Aufwand beweisen, indem wir es über die Theorie der Distributionen auf die bekannten Gleichungen für Funktionen aus dem SCHWARTZ-Raum zurückführen.

Dazu schauen wir zunächst, was Ableitungen auf dem Niveau der Distributionen bedeuten, wie man also beispielsweise eine Ableitung der DIRACschen δ-Distribution definieren kann. Es ist klar, daß ein Ansatz wie

$$\dot{\delta}(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\delta(t+h)-\delta(t)}{h}$$

zu keinem vernünftigen Ergebnis führen kann; wir müssen unserer alten Strategie folgen und für eine differenzierbare Funktion f die Distribution T_f ausrechnen in der Hoffnung, das dies zu einer Formel führt, die sich auf beliebige Distributionen verallgemeinern läßt.

Für eine differenzierbare Funktion f mit der Eigenschaft, daß sowohl f als auch die Ableitung $\dot{f}$ höchstens polynomiales Wachstum haben, ist

$$T_{\dot{f}}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty}\dot{f}(t)\varphi(t)\,dt\,.$$

Nach der Regel für partielle Integration ist daher

$$T_{\dot{f}}(\varphi) = f(t)\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\infty}^{\infty} f(t)\dot{\varphi}(t)\,dt\,.$$

Da f höchstens polynomiales Wachstum hat, ist $|f(t)|$ kleiner oder gleich einem Ausdruck der Form $c\,|t|^k$ für eine reelle Zahl $c > 0$ und eine natürliche Zahl k. Da außerdem φ eine stark abfallende Funktion ist, bleibt $\left|t^{k+1}\varphi(t)\right|$ beschränkt für alle t, d.h.

$$|\varphi(t)| \le \frac{M}{|t|^{k+1}}$$

für eine reelle Zahl $M > 0$. Damit ist

$$|f(t)\varphi(t)| \le \left| ct^k \cdot \frac{M}{t^{k+1}} \right| \le \frac{cM}{|t|} .$$

Somit geht das Produkt $\varphi(t)f(t)$ gegen Null für $t \to \pm\infty$ und

$$T_{\dot f}(\varphi) = -\int_{\infty}^{\infty} f(t)\dot\varphi(t)\,dt = T_f(\dot\varphi) .$$

Damit ist klar, wie wir die Ableitung einer Distribution definieren:

Definition: Die Ableitung einer Distribution $T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ ist die Distribution

$$\dot T\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \quad \varphi \mapsto -T_f(\dot\varphi) \end{cases} ,$$

die n-te Ableitung entsprechend

$$T^{(n)}\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \quad \varphi \mapsto (-1)^n T_f(\varphi^{(n)}) \end{cases} .$$

Zum Nachweis, daß $\dot T$ und allgemeiner auch $T^{(n)}$ Distributionen sind, müssen wir zeigen, daß dies lineare Abbildungen sind – angesichts der Linearität der Differentiation ist das klar. Zum Nachweis der Stetigkeit aber müssen wir wissen, daß für eine konvergente Folge von Funktionen aus dem SCHWARTZ-Raum auch die Folge der abgeleiteten Funktionen konvergiert; dies gilt nur deshalb, weil wir die Konvergenz im SCHWARTZ-Raum so definiert haben, daß auch alle Ableitungen und deren Produkte mit t-Potenzen konvergieren müssen.

Beispielsweise ist also für die DIRAC-Distribution

$$\Delta_a^{(n)}(\varphi) = \varphi^{(n)}(a)$$

oder, mit der δ-„Funktion“ ausgedrückt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t-a)\,\varphi(t)\,dt = \varphi^{(n)}(a) .$$

Auch Sprungfunktionen wie

$$\vartheta\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ \quad t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \ge 0 \end{cases} \end{cases}$$

lassen sich in der schönen neueh Welt der Distributionen problemlos differenzieren:

$$T_\vartheta(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(t)\varphi(t)\,dt = \int_0^{\infty} \varphi(t)\,dt$$

hat als Ableitung die Distribution $\dot T_\vartheta$ mit

$$\dot T_\vartheta(\varphi) = -\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(t)\dot\varphi(t)\,dt = -\int_0^{\infty} \dot\varphi(t)\,dt = -\varphi(t)\Big|_0^{\infty} = \varphi(0) ,$$

da $\varphi(t)$ bei einer stark abfallenden Funktion für $t \to \infty$ gegen null geht. Diese Distribution kennen wir aber: Es ist gerade die DIRAC-Distribution Δ_0. Also ist

$$\dot T_\vartheta = \Delta_0 ,$$

was sich in Funktionen ausgedrückt (mit aller gebotenen Vorsicht) auch als

$$\dot\vartheta(t) = \delta(t)$$

schreiben läßt. Entsprechend lassen sich im Distributionensinne auch andere Sprungfunktionen differenzieren; die Ableitung an einer Sprungstelle $t = t_0$ ist jeweils Sprunghöhe mal $\delta(t - t_0)$.

Damit sind Ableitungen auf dem Niveau der Distributionen problemlos. Das Produkt einer Distribution mit einer beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion mit höchstens polynomialem Wachstum haben wir bereits definiert; das können wir insbesondere anwenden auf die Funktion

$$\Pi_r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto t^r .$$

Wir erwarten

Lemma: Für jede Distribution $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ und jede natürliche Zahl r ist

$$\widehat{T}^{(r)} = (-i)^r \widehat{\Pi_r T} \quad \text{und} \quad \Pi_r \widehat{T} = (-i)^r \widehat{T^{(r)}} .$$

Beweis: Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt nach den entsprechenden Formeln für stark abfallende Funktionen aus §5*c)*

$$\begin{aligned} \widehat{T}^{(r)}(\varphi) &= (-1)^r \widehat{T}(\varphi^{(r)}) = (-1)^r T\left(\widehat{\varphi^{(r)}}\right) = (-1)^r T\left(i^r \Pi_r \widehat{\varphi}\right) \\ &= (-i)^r T(\Pi_r \widehat{\varphi}) = (-i)^r \Pi_r T(\widehat{\varphi}) = (-1)^r \widehat{\Pi_r T}(\varphi) , \end{aligned}$$

denn aus der Formel $\omega^r \widehat{\varphi}(\omega) = (-i)^r \widehat{\varphi^{(r)}}(\omega)$ folgt

$$\widehat{\varphi^{(r)}}(\omega) = i^r \omega^r \widehat{\varphi}(\omega) .$$

Entsprechend zeigt man auch die zweite Formel

$$\begin{aligned} \Pi_r \widehat{T}(\varphi) &= \widehat{T}(\Pi_r \varphi) = T\left(\widehat{\Pi_r \varphi}\right) = T\left(i^r \widehat{\varphi}^{(r)}\right) \\ &= i^r T\left(\widehat{\varphi}^{(r)}\right) = (-i)^r T^{(r)}(\widehat{\varphi}) = (-i)^r \widehat{T^{(r)}} . \end{aligned}$$

■

Für Funktionen folgt daraus sofort

Lemma: Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei r-fach differenzierbar und sowohl die FOURIER-Transformierte von f als auch die ihrer ersten r Ableitungen mögen (als Funktionen) existieren. Außerdem nehmen wir an, daß auch die Distributionen zu allen diesen Funktionen existieren. Dann stimmen

$$\frac{d^r}{d\omega^r} \widehat{f}(\omega) \quad \text{und} \quad (-i)^r \widehat{t^r f}(\omega)$$

überall dort überein, wo die Funktionen stetig sind; genauso auch

$$\omega^r \widehat{f}(\omega) \quad \text{und} \quad (-i)^r \widehat{f^{(r)}}(\omega) .$$

■

e) Weitere Eigenschaften der Fourier-Transformation

Wir haben schon eine ganze Reihe von Eigenschaften der FOURIER-Transformation teils explizit, teils im Vorbeigehen, bewiesen; so haben wir bereits mehrfach ihre *Linearität* benutzt, d.h.

$$\textit{Für } h(t) = \lambda f(t) + \mu g(t) \textit{ ist } \widehat{h}(\omega) = \lambda \widehat{f}(\omega) + \mu \widehat{g}(\omega) .$$

Für eine *Streckung* $g(t) = f(at)$ ist mit der Substitution $u = at$

$$\widehat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\frac{\omega}{a}u} \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right) .$$

Auch das Verhalten unter *Verschiebungen* läßt sich leicht ausrechnen: Für $g(t) = f(t + a)$ ist mit der Substitution $s = t + a$

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t+a) e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega(s-a)}\, ds \\ &= e^{i\omega a} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega s}\, ds = e^{i\omega a} \widehat{f}(\omega) . \end{aligned}$$

Für Verschiebungen im Zeit- und Frequenzbereich folgt entsprechend, daß $e^{ibt} f(t)$ die FOURIER-Transformierte $\widehat{f}(\omega - b)$ hat.

Was uns noch fehlt, ist das Verhalten unter *Faltungen,* die wir hier in völliger Analogie zum periodischen Fall aus §3*a)* definieren:

Definition: Für zwei Funktionen $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt

$$f \star g: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) g(s)\, ds \end{cases} ,$$

falls dieses Integral existiert, *Faltung* von f mit g.

Ebenfalls in völliger Analogie zum periodischen Fall gilt

Lemma: Falls die FOURIER-Transformationen von f, g und $h(t) = (f \star g)(t)$ existieren, ist $\widehat{h}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega)$.

Beweis: Nach dem Satz von FUBINI ist

$$\begin{aligned}
\widehat{h}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\,g(s)\,ds\right)e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\,g(s)e^{-i\omega t}\,dt\right)ds \\
&\underset{u=t-s}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,g(s)e^{-i\omega(u+s)}\,du\right)ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}\,du\right)g(s)e^{-i\omega s}\,ds \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}\,du\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(s)e^{-i\omega s}\,ds\right) = \widehat{f}(\omega)\cdot\widehat{g}(\omega)\,,
\end{aligned}$$

wie behauptet. ∎

Als erste Anwendung hiervon können wir die FOURIER-Transformierte eines Produkts durch die FOURIER-Transformierten der Faktoren ausdrücken:

Korollar: $\widehat{fg}(\omega) = \frac{1}{2\pi}(\widehat{f}\star\widehat{g})(\omega)$.

Beweis: Wir wenden das gerade bewiesenen Lemma an auf die FOURIER-Transformierten von f und g; dann ist

$$\widehat{\widehat{f}\star\widehat{g}}(t) = \widehat{\widehat{f}}(t)\cdot\widehat{\widehat{g}}(t)\,.$$

Wie wir wissen, unterscheiden sich FOURIER-Transformation und inverse FOURIER-Transformation durch den Faktor $1/2\pi$ vor der inversen Transformation und das Vorzeichen des Argument, d.h.

$$\widehat{\widehat{f}}(t) = 2\pi\cdot f(-t), \quad \widehat{\widehat{g}}(t) = 2\pi\cdot g(-t) \quad \text{und} \quad \widehat{\widehat{f}\star\widehat{g}}(t) = 4\pi^2\cdot f(-t)g(-t)\,.$$

Aus dem gleichen Grund ist $\widehat{\widehat{\widehat{f}\star\widehat{g}}}(t) = 2\pi\cdot(\widehat{f}\star\widehat{g})(-t)$, also

$$2\pi\cdot(\widehat{f}\star\widehat{g})(-t) = 4\pi^2\cdot\widehat{fg}(-t) \quad \text{oder} \quad (fg)(-t) = \frac{1}{2\pi}(\widehat{f}\star\widehat{g})(-t)\,.$$

Dies gilt für alle reellen Zahlen t, deshalb können wir das Minuszeichen links und rechts auch weglassen und haben dann die Behauptung des Korollars. ∎

Wie im periodischen Fall folgt auch, daß die Faltung (abgesehen von eventuell vorhandenen Unstetigkeitsstellen) kommutativ und assoziativ ist:

$$f\star g = g\star f \quad \text{und} \quad f\star(g\star h) = (f\star g)\star h\,,$$

denn für die FOURIER-Transformationen der beiden Seiten sind jeweils gleich nach dem Kommutativitätsgesetz und Assoziativitätsgesetz für die Multiplikation komplexer Zahlen.

Eine weitere interessante Konsequenz dieses Lemmas ist, daß sich Faltungen gelegentlich rückgängig machen lassen: $f\star g$ ist durch seine FOURIER-Transformation $\widehat{f}\cdot\widehat{g}$ (fast überall) bestimmt; falls $g(\omega)$ keine Nullstellen hat, kann man die Multiplikation mit $g(\omega)$ durch eine Division rückgängig machen. Eine Grundidee zum Rückgängigmachen der Faltung wäre also die folgende: Ist $h(t)$ die inverse FOURIER-Transformation von $1/\widehat{g}(\omega)$, so hat $(f\star g)\star h$ FOURIER-Transformierte

$$\widehat{f}(\omega)\cdot\widehat{g}(\omega)\cdot\widehat{h}(\omega) = \widehat{f}(\omega)\cdot\widehat{g}(\omega)\cdot\frac{1}{\widehat{g}(\omega} = \widehat{f}(\omega)\,,$$

$(f\star g)\star h$ stimmt also fast überall mit f überein.

Leider ist die Sache aber doch nicht ganz so einfach, denn die Existenz von h ist alles andere als klar: Für eine stark abfallende Funktion $g(\omega)$ ist $1/g(\omega)$ „stark ansteigend“. Das muß aber nicht immer ein Problem sein, denn für praktische Zwecke wird man sowohl den Frequenzbereich, über den integriert wird, als auch den Zeit- oder Ortsbereich oft abschneiden können, so daß nur ein Integral über ein endliches Intervall betrachtet werden muß. Die Formel, die wir gerade benutzt haben, gelten nach dieser Einschränkung des Integrationsintervalls natürlich nicht mehr, zumindest nicht mehr exakt, aber ausgehend von den obigen Formeln kann man mit einigem Geschick doch

gelegentlich Formeln finden, die zumindest näherungsweise ein brauchbares Ergebnis liefern. So konnte beispielsweise die NASA die Bilder des falsch fokusierten HUBBLE-Teleskops durch digitale Nachbehandlung so deutlich verbessern, daß die Bildqualität auch vor der Reperatur nicht viel schlechter war als bei einem korrekt fokusierten Teleskop.

Besonders einfach sind Faltungen mit δ-Funktionen zu berechnen: Für $\eta(t) = \delta(t - t_0)$ zeigt die Substitutionsregel mit $u = t - t_0 - s$, daß

$$\eta \star f = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0 - s) g(s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) g(t - t_0 - u)\, du = g(t - t_0)$$

ist, Faltung mit $\delta(t - t_0)$ verschiebt also einfach das Argument um t_0. Insbesondere ist $\delta \star f = f$.

Im Falle einer Funktion, die außerhalb eines gewissen Intervalls null (oder praktisch null) ist, läßt sich durch Faltung mit einer Summe von δ-Funktionen der Graph an verschiedene Stellen verschieben; Abbildung 18 zeigt dies für die Faltung eines (fett eingezeichneten) Dreiecksimpulses auf $[-1,\ 1]$ und die Distribution

$$\delta(t - 4) + \delta(t - 2) + \delta(t) + \delta(t + 2) + \delta(t + 4)\,.$$

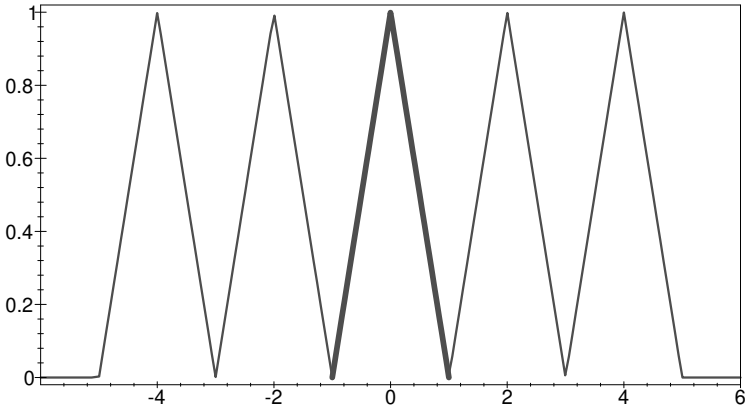


Abb. 18: Faltung eines Dreiecksimpuls mit einer Summe von δ-Distributionen

f) Die Plancherel-Formel

Eine wichtige Eigenschaft von FOURIER-Reihen war der Satz von PARSEVAL, der es erlaubte, die L^2-Norm einer periodischen Funktion sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich zu berechnen. Die PLANCHEREL-Formel ist das Analogon dieses Satzes für nichtperiodische Funktionen.

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *quadratintegrierbar,* wenn

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt$$

existiert und konvergiert. Der Vektorraum aller quadratintegrierbarer Funktionen wird mit $L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ bezeichnet.

Nach dem ersten Lemma aus §5*a)* ist jede stark abfallende Funktion quadratintegrierbar, d.h. der SCHWARTZ-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ liegt in $L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$.

Wie im Fall periodischer Funktionen können wir auf $L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ ein *fast* HERMITEsches Produkt einführen durch

$$(f,\ g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\, dt\,.$$

Da $\big(|f(t)| - |g(t)|\big)^2 \geq 0$ ist, gilt nach der binomischen Formel

$$|f(t)| \cdot |g(t)| \leq \frac{1}{2}\Big(|f(t)|^2 + |g(t)|^2\Big)\,,$$

also

$$\int_N^M |f(t)g(t)|\ dt \leq \frac{1}{2}\int_N^M f(t)\overline{g(t)}\, dt + \frac{1}{2}\int_N^M g(t)\overline{g(t)}\, dt$$

für alle $N \leq M \in \mathbb{R}$. Rechts konvergieren beide Integrale für $N \to -\infty$ und $M \to \infty$, also auch links, und damit konvergiert das Integral zu $(f,\ g)$ sogar absolut.

Es hat alle Eigenschaften eines HERMITEschen Produkts mit Ausnahme der positiven Definitheit – genau wie wir es vom periodischen Fall her gewohnt sind. Wie dort bezeichnen wir

$$\|f\|_2 \underset{\text{def}}{=} \sqrt{(f,\, f)}$$

kurz, wenn auch schlampig als L^2-Norm von f, denn – wie schon bei den periodischen Funktionen – können die Funktionen $f \neq 0$ mit $\|f\|_2 = 0$ für die meisten Anwendungen *praktisch* vernachlässigt werden.

Definition: Wir bezeichnen $f \in L^2(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$ als *eine* Nullfunktion, wenn $\|f\|_2 = 0$ ist.

Nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung, die wir in §3*e)* aus gutem Grund auch für Produkte bewiesen haben, die nur bis auf die positive Definitheit HERMITEsch sind, ist dann für eine beliebige Funktion $g \in L^2(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$

$$|(f,\, g)| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 = 0\,,$$

für eine Nullfunktion f verschwindet also jedes Produkt $(f,\, g)$, und umgekehrt ist auch jede Funktion mit dieser Eigenschaft eine Nullfunktion, denn $\|f\|_2$ ist ja die Wurzel aus $(f,\, f)$.

Für eine quadratintegrierbare Funktion $f \in L^2(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$ können wir eine lineare Abbildung

$$\widetilde{T}_f\colon \begin{cases} L^2(\mathbb{R},\, \mathbb{C}) \to \mathbb{C} \\ \qquad g \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t)\, dt \end{cases}$$

definieren, die auf dem SCHWARTZ-Raum mit T_f übereinstimmt. Vergleich mit dem Produkt

$$(f,\, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \overline{g(t)}\, dt$$

zeigt, daß

$$\widetilde{T}_f(g) = (f,\, \overline{g}) = (g,\, \overline{f})$$

ist. Insbesondere ist $\widetilde{T}_f$ genau dann gleich der Nullabbildung, wenn f eine Nullfunktion ist.

Wie im Fall von T_f rechnet man auch hier schnell nach, daß $\widetilde{T}_f$ der Stetigkeitsbedingung

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{T}_f(g_n) = \widetilde{T}_f\big(\lim_{n\to\infty} g_n\big)$$

genügt, hier allerdings sogar für nur bezüglich der L^2-Norm konvergente Folgen (g_n).

Außerdem ist nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung

$$\big|T_f(g)\big| = |(f,\, \overline{g})| \leq \|f\|_2 \cdot \|\overline{g}\|_2 = \|f\|_2 \cdot \|g\|_2\,,$$

$\big|T_f(g)\big|$ läßt sich also durch die L^2-Norm von g abschätzen.

Diese Eigenschaft hat nicht jede stetige lineare Abbildung von $L^2(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$ nach $\mathbb{C}$: Beispielsweise ist für die Fortsetzung

$$\widetilde{\Delta}_0\colon \begin{cases} L^2(\mathbb{R},\, \mathbb{C}) \to \mathbb{C} \\ \qquad g \mapsto g(0) \end{cases}$$

der DIRAC-Distribution Δ_0 auf $L^2(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$ und den Rechteckimpuls

$$g_a\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ \quad t \mapsto \begin{cases} a & \text{falls } |t| \leq \frac{1}{a^2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

die L^2-Norm gleich

$$\|g_a\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |g_a|^2\,(t)\, dt} = \sqrt{\int_{-1/a^2}^{1/a^2} a^2(t)\, dt} = \sqrt{2}$$

für jedes $a \neq 0$, aber

$$\Delta_0(g_a) = g_a(0) = a$$

kann trotzdem unbeschränkt wachsen. Hier kann $|\Delta_0(g)|$ also nicht durch $\|g\|_2$ abgeschätzt werden.

Definition: Eine lineare Abbildung $T\colon L^2(\mathbb{R},\,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ heißt *beschränkt,* wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, so daß

$$|T(g)| \le c\,\|g\|_2 \quad \text{für alle } g \in L^2(\mathbb{R},\,\mathbb{C})\,.$$

Das Infimum aller Zahlen c, die diese Eigenschaft haben, bezeichnen wir dann als die *Norm* $\|T\|$ von T.

Für $f \in L^2(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ ist $\widetilde{T}_f$ also beschränkt und hat die Norm $\|f\|_2$.

Das Schöne an quadratintegrierbaren Funktionen ist, daß sich diese Aussage auch umkehren läßt:

Satz von Riesz: Zu jeder beschränkten und stetigen linearen Abbildung $T\colon L^2(\mathbb{R},\,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ gibt es eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$, so daß $T = \widetilde{T}_f$ ist und $\|f\|_2 = \|T\|$. Die Funktion f ist bis auf Nullfunktionen eindeutig bestimmt.

Der *Beweis* ist etwas langwierig, aber seine Grundidee ist einfach:

Angenommen, wir betrachteten anstelle von $L^2(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ den endlichdimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ und eine lineare Abbildung $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Dann wissen wir natürlich, daß sich $T\big(\vec{x}\big)$ schreiben läßt als

$$T\big(\vec{x}\big) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

mit geeigneten reellen Zahlen a_1, a_2 und a_3. Diese können wir zusammenfassen zu einen Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, für den

$$T\big(\vec{x}\big) = \vec{a} \cdot \vec{x}$$

ist. Dieser Vektor $\vec{a}$ entspricht der gesuchten Funktion f; er steht offensichtlich senkrecht auf dem Untervektorraum

$$E = \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; T\big(\vec{x}\big) = 0\big\}\,,$$

der außer für $\vec{a} = \vec{0}$ eine Ebene beschreibt, und er ist dadurch bis auf eine Proportionalitätskonstante endeutig bestimmt.

In Analogie dazu betrachten wir für den Satz von RIESZ den Untervektorraum

$$N \underset{\text{def}}{=} \big\{g \in L^2(\mathbb{R},\,\mathbb{C}) \;\big|\; T(g) = 0\big\}\,.$$

Falls $N = L^2(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ ist, sind wir fertig: Dann verschwindet $T(g)$ überall, und $f \equiv 0$ erfüllt alle Behauptungen.

Andernfalls gibt es eine Funktion $h \in L^2(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$, die nicht in N liegt.

Der erste und umständlichste Beweisschritt besteht darin, daß wir uns überlegen, daß es auch eine Funktion

$$\widetilde{f} \in L^2(\mathbb{R},\,\mathbb{C}) \setminus N \quad \text{mit} \quad \big(\widetilde{f}, g\big) = 0 \quad \text{für alle } g \in L^2(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$$

gibt, die orthogonal zu N ist.

Dazu betrachten wir den Abstand

$$d \underset{\text{def}}{=} \inf_{g \in N} \|h - g\|_2$$

von g und h.

(Zur Erinnerung: In der Schule definiert man den Abstand eines Punkts von einer Ebenen als den Abstand zum nähesten Punkt auf Ebenen; dieser näheste Punkt ist der Lotfußpunkt; der Verbindungsvektor dorthin steht also senkrecht auf der Ebenen. Bei einem unendlichdimensionalen Raum wie N können wir nicht sicher sein, daß es so etwas wie einen „Lotfußpunkt“ gibt – in der Tat besteht die Hauptarbeit des ersten Beweisschritts genau darin, dies zu zeigen. Deshalb können wir (noch) nicht von einem minimalen Abstand reden, sondern müssen uns zunächst mit einem Infimum begnügen. Wir hoffen aber (zu recht, wie sich bald zeigen wird, daß der „Lotfußpunkt“ auch in unserem Fall existiert und daß der „Lotvektor“ senkrecht auf N steht.)

Obwohl h nicht in N liegt, können wir zumindest *a priori* nicht sicher sein, daß obiges Infimum positiv ist – wenn wir anstelle einer *beschränkten* stetigen linearen Abbildung T beispielsweise die stetige lineare Abbildung $\widetilde{\Delta}_0$ betrachten würden, wäre $d = 0$.

Da unser T aber beschränkt ist, haben wir eine Konstante $c > 0$, so daß

$$|T(g)| \le c\,\|g\|_2 \quad \text{für alle } g \in L^2(\mathbb{R},\,\mathbb{C})\,.$$

Insbesondere ist für jedes $g \in N$

$$|T(h)| = |T(h) - T(g)| = |T(h - g)| \le c\,\|h - g\|_2\,.$$

$T(h)$ verschwindet nicht, da h nicht in N liegt; folglich ist

$$\|h-g\|_2 \geq \left|\frac{T(h)}{c}\right| \quad \text{für alle } g \in L^2(\mathbb{R},\,\mathbb{C})\,.$$

Damit ist auch das Infimum d aller dieser Werte größer oder gleich $|T(h)|\,/c$, also positiv.

Ein Infimum muß nicht angenommen werden, man kann ihm aber beliebig nahekommen. Somit gibt es eine Folge (g_n) von Funktionen aus N, so daß $\lim_{n\to\infty}\|h-g_n\|_2 = d$ ist.

Eine (ziemlich langweilige) Abschätzung zeigt, daß diese Folge eine CAUCHY-Folge ist, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n_0, so daß

$$\|g_m - g_n\|_2 \leq \varepsilon \quad \text{für } n, m > n_0\,.$$

Die Einzelheiten seien zum leichteren Überlesen im Kleindruck angegeben:

Zunächst ist für beliebige Funktionen p und q

$$\|p+q\|_2^2 = (p+q,\,p+q) = (p,\,p)+(p,\,q)+(q,\,p)+(q,\,q)$$

und

$$\|p-q\|_2^2 = (p-q,\,p-q) = (p,\,p)-(p,\,q)-(q,\,p)+(q,\,q)\,,$$

also

$$\|p+q\|_2^2 + \|p-q\|_2^2 = 2\left(\|p\|_2^2 + \|q\|_2^2\right)\,.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\|g_m-g_n\|_2^2 &= \|(h-g_m)-(h-g_n)\|_2^2\\ &= 2\left(\|h-g_m\|_2 + \|h-g_n\|_2^2\right) - \|2h-g_m-g_n\|_2^2\\ &= 2\left(\|h-g_m\|_2 + \|h-g_n\|_2^2\right) - 4\left\|h-\frac{g_m-g_n}{2}\right\|_2^2\\ &\leq 2\left(\|h-g_m\|_2 + \|h-g_n\|_2^2\right) - 4d^2\,,\end{aligned}$$

denn mit g_m und g_n liegt auch $(g_m+g_n)/2$ in N, hat also mindestens Abstand d von h.

Da für die Folge der g_n die Abstände $\|h-g_n\|_2$ gegen d konvergiert, konvergiert auch die Folge der Abstandsquadrate gegen d^2, und es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0, so daß

$$\|h-g_n\|_2^2 \leq d^2 + \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für } n > n_0\,.$$

Für $n, m > n_0$ ist daher

$$\|g_m-g_n\|_2^2 \leq 2\left(d^2+\frac{\varepsilon}{4}+d^2+\frac{\varepsilon}{4}\right) - 4d^2 = \varepsilon\,,$$

wie behauptet.

Als nächstes müssen wir uns überlegen, daß in $L^2(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ jede CAUCHY-Folge konvergiert; auch dazu sei wieder Kleindruck ausreichend:

Offensichtlicher Kandidat für eine Grenzfunktion ist die Funktion, die jedem Wert t den Limes der $g_n(t)$ zuordnet; leider gibt es aber zunächst keinen Grund, warum diese Folge von Funktionswerten für jedes t konvergieren sollte. Wir müssen daher etwas härter arbeiten.

Wir verschaffen uns zunächst eine Folge von Werten $\varepsilon_\nu > 0$, für die

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon_\nu < \infty$$

konvergiert – beispielsweise können wir $\varepsilon_\nu = \frac{1}{\nu^2}$ setzen. Da (g_n) eine CAUCHY-Folge ist, gibt es zu jedem dieser ε_ν ein n_ν, so daß

$$\|g_n - g_m\|_2 \leq \varepsilon_\nu \quad \text{für alle } n, m > n_\nu\,.$$

Insbesondere ist also

$$\|g_{n_{\nu+1}} - g_{n_\nu}\|_2 \leq \varepsilon_\nu\,.$$

Damit ist für jede natürliche Zahl k

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=k}^{\infty}\varepsilon_\nu &\geq \lim_{\ell\to\infty}\sum_{\nu=k}^{\ell}\|g_{n_{\nu+1}} - g_{n_\nu}\|_2 \geq \lim_{\ell\to\infty}\left\|\sum_{\nu=k}^{\ell}(g_{n_{\nu+1}} - g_{n_\nu})\right\|_2\\ &= \lim_{\ell\to\infty}\|g_{n_{\ell+1}} - g_{n_k}\|_2\,.\end{aligned}$$

Da die linke Seite für $k\to\infty$ wegen der Konvergenz der Summe der ε_ν gegen null geht, gilt dies auch für die rechte. Daher muß es eine Funktion $\widetilde{g}$ geben, die fast überall mit

$$t \mapsto \lim_{\nu\to\infty} g_{n_\nu}(t)$$

übereinstimmt und für die

$$\lim_{\nu\to\infty}\|\widetilde{g} - g_{n_\nu}\|_2 = 0$$

ist. Da alle g_{n_ν} in $L^(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ liegen, zeigt die Dreiecksungleichung, daß auch $\widetilde{g}$ dort liegen muß, und eine letzte Anwendung der Dreiecksungleichung zeigt auch, daß nicht nur die Teilfolge der g_{n_k}, sondern die Folge aller g_n in der L^2-Norm gegen $\widetilde{g}$ konvergiert.

Damit wissen wir also, daß der Grenzwert

$$\widetilde{g} = \lim_{n\to\infty} g_n$$

in $L^2(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ existiert. Da

$$T\big(\widetilde{g}\big) = T\Big(\lim_{n\to\infty} g_n\Big) = \lim_{n\to\infty} T(g_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

ist, liegt $\widetilde{g}$ in N.

Die Funktion $\widetilde{g}$ entspricht dem „Lotfußpunkt“; der „Lotvektor“

$$\widetilde{f} = h - \widetilde{g}\,,$$

von dem wir bislang nur wissen, daß $\left\|\widetilde{f}\right\|_2 = d$ ist, sollte also orthogonal zu N sein.

Für eine beliebige Funktion $g \in N$ und eine reele Zahl $\lambda \neq 0$ betrachten wir den Abstand

$$\left\|h - \left(\widetilde{g} + \lambda g\right)\right\|_2 .$$

Da $\widetilde{g} + \lambda g$ in N liegt, ist dieser Abstand mindestens gleich d, d.h.

$$\begin{aligned} d^2 &\leq \left\|h - \left(\widetilde{g} + \lambda g\right)\right\|_2^2 = \left\|\left(h - \widetilde{g}\right) - \lambda g\right\|_2^2 = \left\|\widetilde{f} - \lambda g\right\|_2^2 \\ &= \left(\widetilde{f} - \lambda g,\, \widetilde{f} - \lambda g\right) = \left\|\widetilde{f}\right\|_2^2 + \lambda^2 \left\|g\right\|_2^2 - \lambda\left(g,\, \widetilde{f}\right) - \overline{\lambda}\left(\widetilde{f},\, g\right) . \end{aligned}$$

Da $\left\|\widetilde{f}\right\|_2^2 = d^2$ und $\overline{\lambda} = \lambda$ ist, folgt nach Division durch λ, daß

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lambda \left\|g\right\|_2 - \left(\left(g,\, \widetilde{f}\right) + \left(\widetilde{f},\, g\right)\right) = \lambda \left\|g\right\|_2 - \left(\left(g,\, \widetilde{f}\right) + \overline{\left(g\, \widetilde{f}\right)}\right) \\ &= \lambda \left\|g\right\|_2 - 2\,\mathfrak{Re}\left(g,\, \widetilde{f}\right) \end{aligned}$$

für alle reellen $\lambda \neq 0$. Lassen wir λ, sowohl von links, als auch von rechts, gegen null gehen, folgt also

$$\mathfrak{Re}\left(g,\, \widetilde{f}\right) = 0\,.$$

Die Funktion $g \in N$ war beliebig; da mit g auch ig in N liegt, ist also auch

$$\mathfrak{Re}\left(ig,\, \widetilde{f}\right) = \mathfrak{Re}\left(i \cdot \left(ig,\, \widetilde{f}\right)\right) = -\,\mathfrak{Im}\left(ig,\, \widetilde{f}\right) = 0\,,$$

insgesamt also

$$\left(ig,\, \widetilde{f}\right) = 0\,.$$

$\widetilde{f}$ steht also in der Tat senkrecht auf allen $g \in N$.

Wir wollen uns überlegen, daß

$$f \underset{\text{def}}{=} \frac{T\left(\widetilde{f}\right)}{\left\|\widetilde{f}\right\|_2^2} \cdot \overline{\overline{\widetilde{f}}}$$

alle gewünschten Eigenschaften hat: Für $g \in L^2(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$ ist

$$\begin{aligned} \widetilde{T}_f(g) = \left(g,\, \overline{f}\right) &= \left(g,\, \overline{\frac{T\left(\widetilde{f}\right)}{\left\|\widetilde{f}\right\|_2^2} \cdot \overline{\overline{\widetilde{f}}}}\right) = \left(g,\, \overline{\frac{T\left(\widetilde{f}\right)}{\left\|\widetilde{f}\right\|_2^2}} \cdot \widetilde{f}\right) \\ &= \frac{T\left(\widetilde{f}\right)}{\left\|\widetilde{f}\right\|_2^2}\left(g,\, \widetilde{f}\right) . \end{aligned}$$

Insbesondere ist also $\widetilde{T}_f(g) = 0$ für alle $g \in N$ nach Konstruktion von $\widetilde{f}$.

Für ein Vielfaches $\lambda\widetilde{f}$ von $\widetilde{f}$ ist

$$\widetilde{T}_f\left(\lambda\widetilde{f}\right) = \frac{T\left(\widetilde{f}\right)}{\left\|\widetilde{f}\right\|_2^2}\left(\lambda\widetilde{f},\, \overline{\widetilde{f}}\right) = \frac{T\left(\widetilde{f}\right)}{\left\|\widetilde{f}\right\|_2^2}\lambda \left\|\overline{f}\right\|_2^2 = \lambda T\left(\widetilde{f}\right) = T\left(\lambda\widetilde{f}\right) ,$$

auch in diesem Fall stimmen T_f und T somit überein. Wegen der Linearität von T und von $\widetilde{T}_f$ ist daher

$$\widetilde{T}_f\left(g + \lambda\widetilde{f}\right) = T\left(g + \lambda\widetilde{f}\right) \quad \text{für alle } g \in \mathbb{N},\ \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

Eine beliebige Funktion $h \in L^2(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$ können wir in der Form

$$h = \left(h - \frac{T(h)}{T\left(\widetilde{f}\right)}\widetilde{f}\right) + \frac{T(h)}{T\left(\widetilde{f}\right)}\widetilde{f}$$

darstellen. Da

$$T\left(h - \frac{T(h)}{T\left(\widetilde{f}\right)}\widetilde{f}\right) = T(h) - \frac{T(h)}{T\left(\widetilde{f}\right)}T\left(\widetilde{f}\right) = T(h) - T(h) = 0$$

verschwindet, liegt der erste Summand in N, und der zweite ist natürlich ein Vielfaches von $\widetilde{f}$. Also läßt sich jede quadratintegrierbare Funktion

darstellen als Summe einer Funktion aus N und einem Vielfachen von $\widetilde{f}$, die linearen Abbildungen T und $\widetilde{T}_f$ stimmen also überein.

Damit sind wir fast fertig: Wenn $T = \widetilde{T}_f$ ist, haben beide Abbildungen natürlich auch dieselbe Norm, und wir wissen bereits, daß $\widetilde{f}$ dieselbe Norm hat wie $\widetilde{f}$, d.h.

$$\|T\| = \left\|\widetilde{T}_f\right\| = \|f\|_2 \ .$$

■

FRIGYES RIESZ (1880–1956) studierte Mathematik in Budapest, Göttingen und Zürich. 1902 promovierte er in Budapest mit einer Arbeit über Geometries, 1911 wurde er Professor an der damals ungarischen Universität Kolozsvár. Nachdem Kolozsvár 1920 rumänisch wurde, zog er mit der Universität um nach Szeged. 1945 bekam er einen Lehrstuhl an der Universität Budapest.

RIESZ ist einer der Väter der *Funktionalanalysis,* jener mathematischen Disziplin also, die Funktionenräume mit analytischen Methoden untersucht. Den obigen Satz bewies er 1907.

FOURIER-Transformationen im Distributionensinn mit schönen Eigenschaften kennen wir nur auf dem SCHWARTZ-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$; wir wollen uns als nächstes überlegen, daß wir solche Distributionen auf $L^2(\mathbb{R},\ C)$ fortsetzen können.

Lemma: Zu jeder Funktion $f \in L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ gibt es eine Folge von Funktionen $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, so daß

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \varphi_n\|_2 = 0$$

ist; f läßt sich also bezüglich der L^2-Norm beliebig gut durch stark abfallende Funktionen annähern.

Beweis: In einem ersten Schritt wollen wir uns überlegen, daß f bezüglich der L^2-Norm als Grenzwert einer Folge von Treppenfunktionen τ_n mit jeweils nur endlich vielen Sprungstellen dargestellt werden kann. Dieser Schritt hängt mit dem Begriff der *Integrierbarkeit* zusammen; da Integrierbarkeit im Rahmen der Vorlesung *Höheren Mathematik*

nie sorgfältig definiert wurde, müssen wir leider auch hier schlampen und diesem wichtigen Schritt einfach auslassen *bzw.* glauben.

Jede dieser Treppenfunktionen τ_n ist eine Summe von endlich vielen Rechteckimpulsen R_{ni}, von denen wiederum jeder als Grenzwert einer Folge $(\psi_{nij})_{j\in\mathbb{N}}$ stark abfallender Funktionen geschrieben werden kann. Mit

$$\varphi_{nj} = \sum_i \psi_{nij}$$

ist dann auch

$$\lim_{j\to\infty} \varphi_{nj} = \lim_{j\to\infty} \sum_i \psi_{nij} = \sum_i R_{ni} = \tau_n \ ,$$

denn die Summen über i sind endlich. Genau deshalb liegen die Funktionen φ_{ni} auch in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, und damit ist

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{nn} = \lim_{n\to\infty} \tau_n = f \ ,$$

wie behauptet.

■

Korollar: Zu jeder Distribution $T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ gibt es eine stetige lineare Abbildung $\widetilde{T}\colon L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, die auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ mit T übereinstimmt.

Beweis: Jede Funktion $f \in L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ läßt sich als Limes einer Folge φ_n stark abfallender Funktionen schreiben; wir setzen einfach

$$\widetilde{T}(f) = \lim_{n\to\infty} T(\varphi_n) \ .$$

■

Damit haben wir alle Vorbereitungen zusammen und können endlich beweisen, worauf es wirklich ankommt:

Satz von Plancherel: Zu jeder Funktion $f \in L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ gibt es eine Funktionen $\widehat{f}$ und $\check{f}$ in $L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$, so daß

$$\widehat{T}_f = T_{\widehat{f}} \quad \text{und} \quad \check{T}_f = T_{\check{f}}$$

ist; FOURIER-Transformierte und inverse FOURIER-Transformierte von f existieren also als Funktionen. $\overset{\times}{f}$ und f unterscheiden sich höchstens

durch eine Nullfunktion. Außerdem ist

$$\left\|\widehat{f}\right\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2 \quad \text{und} \quad \left\|\check{f}\right\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\|f\|_2 \ .$$

Beweis: Nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung ist für jede stark abfallende Funktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\left|\widehat{T}_f(\varphi)\right| = \left|T_f\left(\widehat{\varphi}\right)\right| = \left|\left(f, \overline{\widehat{\varphi}}\right)\right| \le \|f\|_2\,\|\widehat{\varphi}\|_2 \ .$$

Wie wir aus §5*d)* wissen, ist $\|\widehat{\varphi}\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|\varphi\|_2$, also

$$\left|\widehat{T}_f(\varphi)\right| \le \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2\,\|\varphi\|_2 \ .$$

Nach dem Satz von RIESZ gibt es daher eine Funktion $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, für die

$$\widehat{T}_f = T_{\widehat{f}}$$

ist. Ihre Norm ist gleich der von $\widehat{T}_f$, also ist nach obiger Abschätzung

$$\left\|\widehat{f}\right\|_2 \le \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2 \ .$$

Genauso zeigt man auch die Existenz von $\check{f}$ und daß gilt

$$\left\|\check{f}\right\|_2 \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\|f\|_2 \ .$$

Da die Distributionen $\overset{\times}{T}$ und T übereinstimmen, unterscheiden sich $\overset{\times}{f}$ und f höchstens durch eine Nullfunktion, haben also insbesondere dieselbe Norm. Nach den bislang bewiesenen Ungleichungen ist

$$\left\|\overset{\times}{f}\right\|_2 \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\|\widehat{f}\right\|_2 \le \|f\|_2 \ ;$$

da links und rechts dieselbe Zahl steht, muß in beiden Ungleichungen das Gleichheitszeichen gelten, und der Satz ist bewiesen. ∎

MICHEL PLANCHEREL (1885–1967) war Professor für höhere Mathematik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, publizierte seine Arbeiten aber in französischer Sprache. Diese befassen sich nicht nur mit der der FOURIER-Theorie einer und mehrerer Verränderlicher, sondern enthalten beispielsweise auch wichtige Sätze aus der sogenannten Ergodentheorie, der allgemeinen Theorie dynamischer Systeme. Seine letzte, 1962 erschienene Arbeit, befaßt sich mit dem Einfluß der Steuergesetze auf die Stabilität einer Volkswirtschaft. Den obigen Satz bewies er 1910; oft wird auch nur dessen letzte Aussage als PLANCHEREL-Formel bezeichnet.

g) Mehrdimensionale Faltungen und Fourier-Integrale

In völliger Analogie zum eindimensionalen Faltungsintegral läßt sich auch ein n-dimensionales definieren: Für zwei Funktionen

$$f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}\,,$$

definieren wie die Faltung als

$$f \star g = \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int f(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n) g(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n$$

– sofern dieses Integral existiert.

Auch die anschauliche Interpretation ist dieselbe wie im eindimensionalen Fall: Wenn wir f als eine Gewichtsfunktion auffassen, ist $f \star g$ ein gewichtetes Mittel über Werte von g; für

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\pi^{n/2}\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^n x_i^2}$$

etwa, die n-dimensionale GAUSS-Funktion, entspricht das im Fall $n = 2$ einem je nach Größe von σ mehr oder weniger defokusierten Bild.

Durch mehrdimensionale Faltungen mit δ-Distributionen lassen sich Verschiebungungen realisieren: Beispielsweise wäre, wenn der Sazu von FUBBINI in einer solchen Situation anwendbar wäre,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \delta(x-a)\delta(y-b) f(x,y)\, dx\, dy = f(x-a, y-b)\,,$$

und genau so *definieren* wir die Interpretation der *a priori* sinnlosen linken Seite.

(Man beachte, daß Ausdrücke wir $\delta(x-a)\delta(x-b)$ oder $\delta(x)^2$ weiterhin sinnlos bleiben, egal ob sie unter einem oder mehreren Integralzeichen stehen.)

Ist also $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die (z.B. durch Grauwerte) ein Bild definiert und die außerhalb des Bereichs $0 \le x, y \le 1$ verschwindet, so ist mit der Distribution

$$\eta(x,y) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{M} \delta(x-k)\delta(y-\ell)$$

die Faltung $\eta \star f$ ein Bilderbogen aus NM Exemplaren dieses Bildes. Abbildung 19 zeigt dies für den Graph einer zweidimensionalen Normalverteilung.

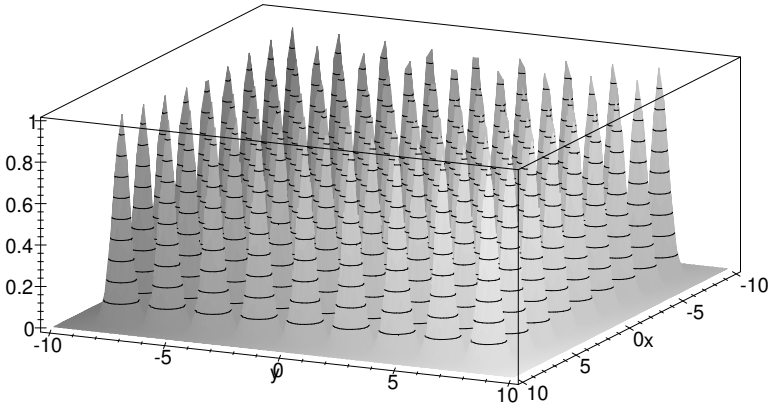


Abb. 19: Eine zweidimensionale Faltung

Auch die FOURIER-Transformation läßt sich in völliger Analogie zum eindimensionale Fall auf beliebige Dimensionen verallgemeinern: Für

$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definieren wir

$$\widehat{f}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \\ (\omega_1,\dots,\omega_n) \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^n}\!\cdots\!\int f(x_1,\dots,x_n) e^{-i\sum_{k=1}^{n}\omega_i x_i}\, dx_1\cdots dx_n \end{cases}.$$

Da es nur eine Zeit gibt, läßt sich dies nicht als Zerlegung eines zeitlichen Signals in seine Frequenzen interpretieren; die x_i sollte man sich hier als *räumliche* Koordinaten vorstellen. Beispiele dazu folgen im nächsten Abschnitt, wo wir eine Anwendung solcher räumlicher FOURIER-Transformationen betrachten.

Wenigsten kurz sei noch angedeutet, wie man auch die mehrdimensionale FOURIER-Theorie über stark abfallende Funktionen mehrerer Veränderlicher exakt begründen kann:

Eine Funktion $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt *stark abfallend,* wenn *alle* Ausdrücke der Form

$$x_1^{e_1}\cdots x_n^{e_n}\,\frac{\partial^{r_1+\cdots+r_n}}{\partial x_1^{r_1}\cdots\partial x_n^{r_n}}\varphi(x_1,\dots,x_n)$$

auf ganz $\mathbb{R}^n$ beschränkt sind. Der Vektorraum aller dieser Funktionen ist der SCHWARTZ-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Für Funktionen auf diesem Raum ist wieder alles relativ problemlos; zur Verallgemeinerungen auf interessantere Funktionen geht man wieder den Umweg über Distributionen

$$T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}\,,$$

die in der naheliegenden Weise als Verallgemeinerungen eindimensionaler Distribibutionen definiert werden. Beispielsweise kann man dem gerade *ad hoc* betrachteten Produkt $\delta(x-a)\delta(y-b)$ über die Distribution

$$\Delta_{a,b}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \varphi(a,b) \end{cases}$$

einen präzisen Sinn geben – solange es in einem sinnvollen Kontext unter zwei Integralzeichen steht.

h) Fraunhofer-Beugung

Wenn Licht auf Strukturen trifft, in Vergleich zu deren Größe seine Wellenlänge nicht mehr vernachlässigbar klein ist, lassen sich die Gesetze der geometrischen Optik bekanntlich nicht mehr anwenden; man beobachtet dann Beugungsphänomene.

Beugung ist ein sehr komplexes Gebiet; für ein Beispiel im Rahmen einer Vorlesung über Höhere Mathematik müssen wir uns auf den allereinfachsten Fall beschränken. Wir gehen daher aus von einem Lichtstrahl, der aus sehr großer Entfernung kommt oder der zumindest (z.B. dank einer Linse, aus deren Brennpunkt er kommt) so aussieht, und beobachten auch die Beugungsfigur in großer Entfernung. Diese Situation bezeichnet man als FRAUNHOFER-Beugung.

JOSEPH VON FRAUNHOFER (1787–1826) wurde in Straubing als elftes und letztes Kind eines Glasermeisters geboren; er machte auch selbst eine Lehre als Glasschleifer und Spiegelmacher. Daneben besuchte er die Feierabendschule, wo er zumindest primitive Grundkenntnisse im Rechnen erwarb. 1806 kam er an das optische Institut von UTZSCHNEIDER, der ihm Bücher über Optik und Mathematik besorgte. FRAUNHOFER entwickelte Präzisionsmaschinen zur Fertigung optischer Instrumente von bis dahin nicht gekannter Qualität und erfand auch das optische Gitter. Durch seine Versuche zur Lichtbeugung bewies er die Wellennatur des Lichts. 1824 wurde er zum Professor ernannt; er berichtete unter anderem in öffentlichen Sonntagsvorlesungen über seine Arbeit. Im gleichen Jahr wurde er vom bayrischen König LUDWIG I. in den Adelsstand erhoben. Zwei Jahre später starb er an Tuberkulose.

Zur mathematischen Behandlung der optischen Beugung brauchen wir zunächst ein physikalisches Modell für Lichtwellen. Für eine physikalisch korrekte Beschreibung müssen wir Licht als zeitlich veränderliches elektromagnetisches Feld betrachten, d.h. wir brauchen zwei räumlich und zeitlich variable Vektorfelder $\vec{E}(x,y,z;t)$ und $\vec{B}(x,y,z;t)$, die den MAXWELLschen Gleichungen genügen. Glücklicherweise muß man in der Optik aber nur selten so weit gehen: Zwar hängt die Beugung an einem Spalt theoretisch durchaus von der Leitfähigkeit des verwendeten Materials ab, aber diese Abhängigkeit

ist so gering, daß man sie für alle praktischen Zwecke vernachlässigen kann.

Man arbeitet daher in der Wellenoptik gerne mit einer sogenannten *skalaren Welle,* über deren physikalische Bedeutung man sich keine sonderlichen Gedanken macht. Aus rechnerischen Gründen betrachtet man sie als komplexwertige Funktion; falls man sich unbedingt etwas darunter vorstellen will, kann man beispielsweise den Realteil dieser Funktion als die x-Komponente des elektrischen Felds interpretieren, muß dann aber beachten, daß eine skalare Welle im Gegensatz zu einem elektrischen Feld *keine* Wechselwirkung mit Materie egal welcher Leitfähigkeit zeigt – das ist eine der Idealisierungen hinter dem Konzept der skalaren Welle. Wichtig für uns ist nur, daß die Intensität der Welle (also z.B. die Intensität der Beugungslinien, die wir auf einem Schirm beobachten) gleich dem Betragsquadrat der Wellenfunktion sein soll.

Eine Welle hat eine räumliche wie auch zeitliche Periodizität. Zeitlich periodische Vorgänge kennen wir bereits: Das sind Schwingungen, die mathematisch durch Funktionen der Art

$$f(t) = A_0 e^{i\omega t} \quad \text{oder etwas allgemeiner} \quad f(t) = A_0 e^{i(\omega t+\varphi)}$$

beschrieben werden, wobei die Phasenverschiebung φ dafür sorgt, daß wir auch Schwingungen behanden können, die ihre maximale Auslenkung nicht zur Zeit $t = 0$ erreichen. Wir wollen dies jedoch im folgenden ignorieren und mit der einfacheren ersten Funktion arbeiten.

Für räumlich periodische Vorgänge haben wir entsprechend zur Periode T einer Schwingung eine Wellenlänge λ; das Analogon zur Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ bezeichnen wir als

$$\textit{Wellenzahl} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} .$$

Ein eindimensionaler periodischer Vorgang kann somit beschrieben werden durch eine Funktion

$$g(x) = A_0 e^{ikx} .$$

Im Mehrdimensionalen müssen wir die Wellenzahl k ersetzen durch einen Vektor $\vec{k}$ der Länge k, den *Wellenzahlvektor,* und betrachten die

Funktion

$$g(\boldsymbol{x}) = A_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} .$$

(Die Wellenlänge betrachten wir weiterhin nur als Skalar.)

Eine Welle soll zeitlich *und* räumlich periodisch sein; dies leistet die Funktion

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = A_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$$

oder natürlich auch die entsprechende Funktion mit einem Pluszeichen im Exponenten. Der Grund, warum wir das Minuszeichen bevorzugen, ist folgender:

Im eindimensionalen Fall ist

$$\psi(x,t) A_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} = A_0 e^{ik\left(\frac{\omega}{k}t - x\right)} ,$$

$\psi(x,t)$ hängt also nur ab von $x - \frac{\omega}{k}t$. Dies können wir auch so interpretieren, daß

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda\omega}{2\pi}$$

die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ist; denn eine Änderung der Zeit um Δt hat denselben Effekt wie eine Änderung des Orts um $v \cdot \Delta t$.

Im Falle mehrerer räumlicher Dimensionen ist alles grundsätzlich genauso, nur die Schreibweise ist etwas komplizierter: Ist $\vec{k}_0$ ein Einheitsvektor in Richtung von $\vec{k}$, d.h. $\vec{k} = k \cdot \vec{k}_0$, so ist

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = A_0 e^{ik\left(\frac{\omega}{k}t - \vec{k}_0\cdot\vec{x}\right)} ;$$

dabei ist $\vec{k}_0 \cdot \vec{x}$ die $\vec{x}$-Komponente in Richtung von $\vec{k}$. Damit ist $\vec{k}_0$ die *Richtung* des Geschwindigkeitsvektors; der Wellenzahlvektor zeigt also in Richtung der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, und der Betrag v des Geschwindigkeitsvektors ist durch obige Formel gegeben.

Die Annahme einer konstanten Amplitude A_0 in obigen Formeln ist nur in seltenen Fällen realistisch: Licht kommt meist aus einer (zumindest in erster Näherung) punktförmigen Lichtquelle, und seine Intensität nimmt mit dem Quadrat der Entfernung ab. Da die Intensität das Betragsquadrat

der Wellenfunktion sein soll, müssen wir eine solche Kugelwelle also in der Form

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \frac{A_0}{|\vec{x}|} e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$$

ansetzen, sofern die Lichtquelle im Nullpunkt des Koordinatensystems sitzt.

Im Falle einer weit entfernten Lichtquelle, wie wir sie bei der FRAUNHOFER-Beugung annehmen und auch von der Sonne her kennen, spielt allerdings die Ortsabhängigkeit der Amplitude praktisch keine Rolle, so daß wir keinen nennenswerten Fehler machen, wenn wir sie als konstant annehmen. In diesem Fall sprechen wir von einer *ebenen* Welle.

Ausgangspunkt für die Berechnung von Beugungsbilder ist das HUYGENSsche Prinzip: Jeder Punkt des Hindernisses ist Quelle einer Kugelwelle, deren Amplitude gleich der Amplitude der einfallenden Welle mal der Durchlässigkeitsfunktion α des Hindernisses im betrachteten Punkt ist. Letztere gibt an, welcher Teil des Lichts durchgelassen wird; sie ist also eins an den Stellen, an denen alles Licht durchkommt, und null dort, wo nichts durchkommt. An Stellen, an denen ein Teil des Lichts durchgelassen wird, kann sie auch Zwischenwerte annehmen.

CHRISTIAAN HUYGENS (1629–1695) kam aus einer niederländischen Diplomatenfamilie. Dadurch und später auch durch seine Arbeit hatte er Kontakte zu führenden europäischen Wissenschaftlern wie DESCARTES und PASCAL. Nach seinem Studium der Mathematik und Jura arbeitete er teilweise auch selbst als Diplomat, interessierte sich aber bald vor allem für Astronomie und den Bau der dazu notwendigen Instrumente. Er entwickelte eine neue Methode zum Schleifen von Linsen und erhielt ein Patent für die erste Pendeluhr. Trotz des französisch-niederländischen Kriegs arbeitete er einen großen Teil seines Lebens an der *Académie Royale des Sciences* in Paris, wo beispielsweise LEIBNIZ viel Mathematik bei ihm lernte. HUYGENS war ein scharfer Kritiker sowohl von NEWTONs Theorie des Lichts als auch seiner Gravitationstheorie, die er für absurd und nutzlos hielt. Gegen Ende seines Lebens beschäftigte er sich mit der Möglichkeit außerirdischen Lebens.

Bei der FRAUNHOFER-Beugung betrachten wir auch die gebeugten

Wellen nur aus sehr großer Entfernung und können daher statt von Kugelwellen von ebenen Wellen ausgehen. Außerdem können wir die Zeitabhängigkeit der Welle ignorieren, denn die Frequenzen, mit denen das sichtbare Licht schwingt, liegen um Größenordnungen jenseits sowohl unserer Reaktionszeit als auch der unserer Meßinstrumente, so daß wir nur die Amplituden messen können. Schreiben wir die einfallende Welle als $\psi(\boldsymbol{x}, t) = A_0 e^{-i\vec{k}\vec{x}} \cdot e^{i\omega t}$, ist also der zweite Faktor eine zeitabhängige Phasenvariation, die wir bei der Berechnung des räumlichen Intensitätsverteilung des Beugungsbilds ignorieren können.

Eine weitere Konsequenz des (auch im Vergleich zur Größe des Hindernisses) weit entfernten Betrachtungspunkts ist, daß wir das Hindernis vom Schirm aus praktisch nur als Punkt sehen; was an einer gegebenen Stelle des Schirms ankommt, hängt also im wesentlichen nur ab vom Winkel θ oder (im Zweidimensionalen) den Winkeln θ und φ, unter dem (oder denen) die Strahlen von diesem „Punkt“ ausgehen.

Um die Intensität des Beugungsbilds in einem gegebenen Punkt zu berechnen, müssen wir also alle vom Hindernis in einem festen Winkel ausgehenden Strahlen aufsummieren, und *hierbei* müssen wir auch die Phasen berücksichtigen, da diese Strahlen miteinander interferieren. Abbildung 20 zeigt, wie sich die Laufwege zweier benachbarter Strahlen unterscheiden, und diese Differenzen können wir nicht vernachlässigen, da sie in der Größenordnung des Hindernisses und damit auch der Wellenlänge des Lichts liegen.

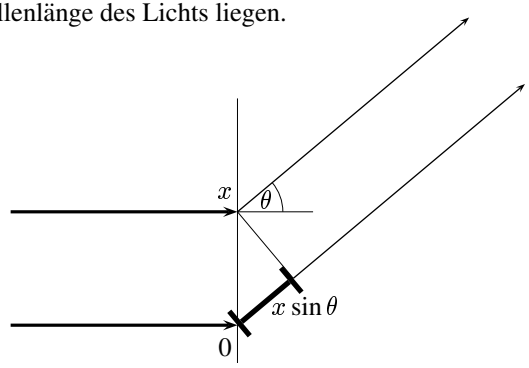


Abb. 20: Laufwegunterschied zweier paralleler Strahlen

Betrachten wir zunächst den (in Abbildung 20 dargestellten) eindimensionalen Fall. Verglichen mit dem Strahl, der von einem (irgendwie gewählten) Nullpunkt des Hindernisses ausgeht, hat der Strahl mit Ausgangspunkt in Entfernung x einen Laufwegunterschied von $x \sin\theta$; dies entspricht einem Phasenfaktor von $e^{-ik \sin\theta}$. Wählen wir also die Phase im Nullpunkt als Referenz (die wir in den zu ignorierenden Phasenfaktor der einfallenden Welle hineinziehen können), ist die Summe aller unter dem Winkel θ abgehenden Strahlen gleich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) e^{-ik \sin\theta}\, dx\,;$$

das ist gleich der FOURIER-Transformierten von $\alpha(x)$, ausgewertet im Punkt $u = k \sin\theta$.

Bei einem zweidimensionalen Hindernis müssen entsprechend zwei Winkelvariablen θ und ϕ berücksichtigt werden, und auch die Durchlässigkeitsfunktion α hängt von zwei Variablen x, y ab; außerdem müssen wir nun vom Wellenzahlvektor sowohl die x- als auch die y-Komponente berücksichtigen. Wir erhalten daher als Summe aller Strahlen unter den beiden gegeben Winkeln das Integral

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \alpha(x, y) e^{-i(k_1 \sin\theta + k_2 \sin\phi)}\, dx\, dy\,,$$

d.h. die zweidimensionale FOURIER-Transformierte von α, ausgewertet im Punkt $(u,\ v) = (k_1 \sin\theta,\ k_2 \sin\varphi)$.

Zur Vereinfachung der Schreibweise drückt man das Beugungsbild meist einfach in der Variablen u *bzw.* den Variablen u und v aus statt in den Winkelvariablen; dann ist das Beugungsbild eines Hindernisses mit Durchlässigkeitsfunktion α somit einfach die FOURIER-Transformierte von α. Allerdings muß man dabei beachten, daß u und v, obwohl man sie als Strecken interpretieren kann, *nicht* proportional zu den Strecken sind, die man auf einem ebenen Schirm messen kann: Deren Längen sind proportional zu $\tan\theta$ und $\tan\varphi$.

Dies wollen wir anwenden, um als erstes das Beugungsbild eines Spalts zu berechnen. Dieser habe die Breite a; seine Durchlässigkeitsfunktion

kann also beispielsweise geschrieben werden als

$$\alpha\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } -\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) e^{-uix}\, dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-iux} dx \\ &= \frac{e^{-\frac{iau}{2}} - e^{\frac{iau}{2}}}{-iu} = \frac{2\sin\frac{au}{2}}{u} = a\frac{\sin\frac{au}{2}}{\frac{au}{2}} = a\,\operatorname{sinc}\frac{au}{2}\,. \end{aligned}$$

Dies erklärt, warum die Funktion $\operatorname{sinc} x$ auch als *Spaltfunktion* bezeichnet wird.

Die Lichtintensitäten, die man im Beugungsbild beobachtet, sind allerdings *nicht* durch diese Funktion gegeben: $\widehat{\alpha}(u)$ ist die Amplitude einer skalaren Welle; die Intensität ist gleich dem Betragsquadrat davon, bei einer reellen Funktion wie hier also einfach das Quadrat

$$\widehat{\alpha}(u)^2 = 4\frac{\sin^2\frac{au}{}}{u^2} = a^2\operatorname{sinc}^2\frac{au}{2}\,.$$

Als nächstes Beispiel betrachten wir Beugung an einem regelmäßigen Strichgitter. Der Abstand zweier Striche sei d und es gebe insgesamt $2N+1$ Striche. Wenn wir in erster Näherung die Breite der Striche vernachlässigen, können wir die Durchlässigkeitsfunktion α als Summe von δ-Distributionen schreiben:

$$\alpha(t) = \sum_{k=-N}^{N} \delta(x - kd)\,.$$

Das Beugungsbild ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) e^{-iux}\, dx = \sum_{k=-N}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-kd) e^{-iux}\, dx \\ &= \sum_{k=-N}^{N} e^{-iudk} = \sum_{k=-N}^{N} e^{iukd} = e^{-iuNd} \sum_{k=0}^{2N} e^{iukd} \\ &= e^{-iuNd}\frac{1-e^{iu(2N+1)d}}{1-e^{iud}} = \frac{e^{-iuNd} - e^{iu(N+1)d}}{1-e^{iud}} \\ &= \frac{e^{iu(N+\frac{1}{2})d} - e^{-iu(N+\frac{1}{2})d}}{e^{iu\frac{d}{2}} - e^{-iu\frac{d}{2}}} = \frac{\sin u\left(N+\frac{1}{2}\right)d}{\sin\frac{ud}{2}}\,. \end{aligned}$$

Abbildung 21 zeigt diese Funktion; man sieht ihr das charakteristische Linienmuster an, das man bei der Beugung am Gitter beobachtet.

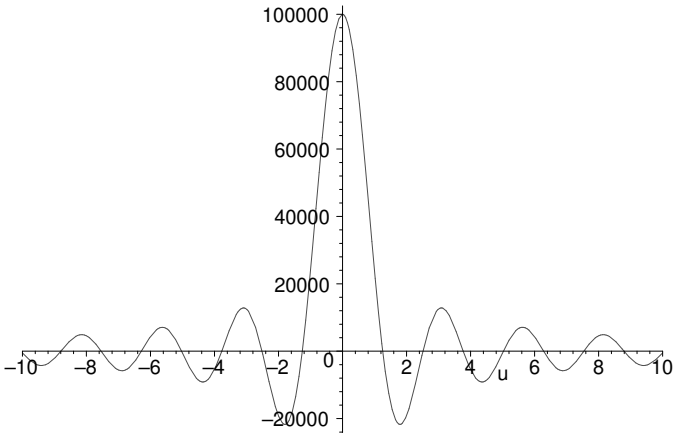


Abb. 21: Beugung am Gitter

Trotzdem wird vielleicht einigen Lesern unwohl sein beim Gedanken an eine Summe von δ-Distributionen als Durchlässigkeitsfunktion. Deshalb wollen wir zur Sicherheit nachrechnen, was sich ändert, wenn wir stattdessen die Striche als Spalte der Breite a annehmen.

Für einen einzelnen solchen Spalt haben wir dann die oben betrachtete Durchlässigkeitsfunktion

$$\alpha_a\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } -\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

eines Spalts der Breite a, und die Durchlässigkeitsfunktion des gesamten Strichgitters ist die Faltung $\alpha \star \alpha_a$ dieser Funktion mit der gerade betrachteten Funktion ψ. Das Beugungsbild ist somit gegeben durch das Produkt des gerade berechneten Beugungsbilds mit dem Beugungsbild eines Spalts, also durch

$$\frac{\sin u\left(N+\frac{1}{2}\right)d}{\sin \frac{ud}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{au}{2}}{\frac{u}{2}} .$$

Da der Abstand zwischen zwei Spaltmitten gleich d ist, muß die Spaltbreite a echt kleiner als d sein, und die Anzahl N der Striche im Gitter liegt typischerweise bei mindestens einigen Zehntausend. Somit hat der Sinus im zweiten Term eine Kreisfrequenz, die um einen mindestens fünfstelligen Faktor gröser ist als die im ersten; der zweite Term zeigt also erst dann eine nennenswerte Variation, wenn wir im ersten Faktor mehrere Tausend Linien betrachten. In dem Bereich, den wir realistischerweise beobachten können, ist der zweite Term somit für alle praktischen Zwecke konstant. Der Betrag dieser Konstanten ist irrelevant, denn da wir bei der FRAUNHOFER-Beugung das Beugungsbild in „sehr großer“ Entfernung vom Gitter betrachten, können wir sinnvollerweise ohnehin nur von relativen, nicht aber von absoluten Helligkeiten reden.

Als letztes Beispiel zur eindimensionalen Beugung möchte ich eines betrachten, bei dem das Licht nicht als konstante Wellenfront einfällt: Je nach Wahl der Randbedingungen im optischen Resonator entsteht nicht immer ein Strahl, der näherungsweise als ebene Welle betrachtet werden kann (die sogenannte TEM_{00}-Mode); bringt man Hindernisse in den Strahlengang, können auch höhere TEM-Moden angeregt werden (TEM = *transversal elektromagnetisch*). Bei einem dünnen Hindernis wie etwa einem Haar genau in der Mitte des Strahls beispielsweise entsteht die TEM_{01}-Mode, die aus einem linken und einem rechten Halbstrahl besteht, deren Phasen sich um 180° unterscheiden, und die man

ansonsten wieder näherungsweise als ebene Wellen betrachten kann. Trifft ein solcher Strahl auf einen Spalt, dessen Mitte mit der Grenze zwischen den beiden Halbstrahlen zusammenfällt, müssen wir also die Funktion, die etwa links der Null gleich +1 und rechts der Null gleich -1 ist mit der Durchlässigkeitsfunktion des Spalts multiplizieren; für einen Spalt der Breite a erhalten wir als Beugungsbild

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{0} e^{-iux}\,dx + \int_{0}^{\frac{a}{2}} -e^{-iux}\,dx = \frac{1 - e^{iua/2} - e^{-iua/2} + 1}{-iu}$$

$$= \frac{2i}{u}\left(1 - \cos\frac{ua}{2}\right) .$$

Alternativ läßt sich dies auch über die Beziehung

$$e^{iua/2} + e^{-iua/2} - 2 = (e^{iua/4} - e^{-iua/4})^2 = -4\sin^2\frac{ua}{4}$$

als

$$\frac{4i}{u}\sin^2\frac{ua}{4}$$

schreiben. Daß hier imaginäre Größen auftreten, braucht uns natürlich nicht zu stören: Die beobachteten Intensitäten sind bekanntlich die Betragsquadrate der hier berechneten Funktionen, also reell und positiv.

Zum Abschluß möchte ich noch zumindest ein Beispiel eines zweidimensionalen Beugungsbilds betrachten. Leider sind die zugehörigen FOURIER-Integrale schon in so einfachen Fällen wie dem einer scheibenförmigen Blende nicht mehr elementar auswertbar; wir beschränken uns daher auf den extrem einfachen Fall einer rechteckigen Blende. Deren Durchlässigkeitsfunktion ist

$$\alpha\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } -\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2} \text{ und } -\frac{b}{2} \le y \le \frac{b}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases} ,$$

die Beugungsfigur ist also gegeben durch

$$\widehat{\alpha}(u,v) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \alpha(x,y) e^{-i(ux+vy)}\,dx\,dy = \iint\limits_{\substack{-\frac{a}{2}\le x\le\frac{a}{2}\\ -\frac{b}{2}\le y\le\frac{b}{2}}} e^{-i(ux+vy)}\,dx\,dy$$

$$= \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-iux} e^{-ivy}\,dx\,dy = \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-iux} \left(\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-ivy}\,dy \right) dx$$

$$= \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-iux} \cdot \frac{\sin\frac{bv}{2}}{v}\,dx = 4 \cdot \frac{\sin\frac{au}{2}}{u} \cdot \frac{\sin\frac{bv}{2}}{v},$$

da wir das Rechteck als Normalbereich betrachten können und somit das zweidimensionale Integral über zwei eindimensionale Integrationen berechnen können.

Als Beugungsfigur erhalten wir, nicht gerade überraschenderweise, das Produkt einer vertikalen und einer horizontalen Beugungsfigur eines Spalts.

h) Der Abtastsatz von Nyquist

Egal ob es um die automatische Erfassung von Meßwerten geht oder um die Aufzeichnung von Musik: Die digitale Darstellung analoger Daten ist wesentlicher Bestandteil der Informationsverarbeitung. Nun ist aber eine beliebige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sicherlich nicht durch ihre Funktionswerte an endlich vielen Stellen oder auch an ein einer diskreten Menge von Stellen bestimmt: Auch wenn wir wissen, daß $f(t) = 0$ ist für jedes ganzzahlige Vielfache von 0,001, wissen wir noch nicht, daß f die Nullfunktion ist: Auch die Funktionen $f(t) = \sin(1000\pi t)$ und $f(t) = -3\sin(5000\pi t)$ haben diese Eigenschaft. Auch bei von null verschiedenen Abtastwerten tritt dieses Problem auf: Beispielsweise stimmen auch die Funktionen

$$f(t) = \cos(500\pi t) \quad \text{und} \quad g(t) = \cos(1500\pi t)$$

für alle ganzzahligen Vielfachen von 0,001 überein, aber sie nehmen hier abwechselnd die Werte $1, 0, -1, 0$ an; siehe Abbildung 22. Da

der Frequenzunterschied zwischen den beiden Schwingungen fast dem zwischen Baß und Sopran entspricht, ist klar, daß man die beiden Schwingungen zumindest auf einer Musik-CD nicht miteinander verwechseln darf.

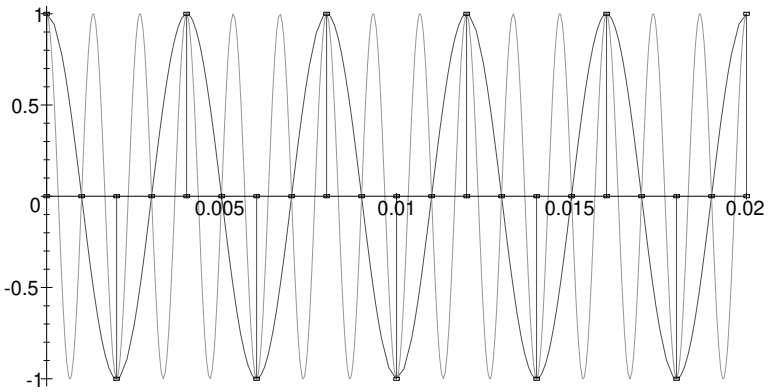


Abb. 22: Abtastung zweier Schwingungen

Die Probleme bei den obigen Beispielen beruhen offensichtlich darauf, daß es zu jedem gegebenen Signal auch höherfrequente Signale gibt, die an vorgegebenen Abtastpunkten mit ihm übereinstimmen; eine eindeutige Rekonstruktion ist höchstens dann möglich, wenn man eine Grenze festlegt, oberhalb derer Frequenzen nicht mehr berücksichtigt werden sollen. Der Abtastsatz von NYQUIST sagt, daß dann in der Tat eine Rekonstruktion möglich ist, und er sagt auch, wo die Grenze liegen soll, oberhalb derer man die Frequenzen abscheiden muß: Die Abtastfrequenz muß mehr als doppelt so hoch sein als die höchste im Signal vorkommende Frequenz.

Die genaue Formulierung des Satzes ist etwas technischer; insbesondere müssen wir berücksichtigen, daß die Kreisfrequenz ω, mit der wir immer arbeiten, etwas anderes ist, als die Frequenz: Eine reine Schwingung mit einer Frequenz von 1000 Hz ist nicht gegeben durch eine Funktion wie $\sin 1000t$, sondern – bei in Sekunden gemessener Zeit – durch

sin $2000\pi t$. Entsprechend kommt auch jetzt bei der Formulierung des Abtastsatzes von NYQUIST ein Faktor 2π ins Spiel:

Satz: $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ habe die Eigenschaft, daß $\widehat{f}(\omega)$ außerhalb eines Intervalls der Länge Ω verschwinde. Dann ist f eindeutig bestimmt durch die Werte $f(2k\pi/\Omega)$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis: (ω_1, ω_2) sei ein Intervall der Länge Ω derart, daß $\widehat{f}(\omega)$ außerhalb dieses Intervalls verschwindet. Dann ist bis auf eine Nullfunktion

$$f(t) = \overset{\vee}{\widehat{f}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega \,.$$

Indem wir f durch die rechte Seite ersetzen (was nichts wesentliches ändert) können wir annehmen, daß diese Gleichung wirklich gilt. Also ist insbesondere

$$f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \widehat{f}(\omega) e^{2k\pi i\omega/\Omega}\, d\omega \,. \qquad (*)$$

Nun betrachten wir jene Funktion $g(\omega)$, die auf dem Intervall $[\omega_1, \omega_2)$ mit $\widehat{f}(\omega)$ übereinstimmt und die periodisch mit Periode Ω in ω auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt ist. Für diese Funktion ist natürlich auch

$$f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} g(\omega) e^{2k\pi i\omega/\Omega}\, d\omega \,,$$

denn im Integrationsintervall stimmen $\widehat{f}$ und g überein.

g als periodische Funktion in ω mit Periode Ω hat eine Darstellung als FOURIER-*Reihe*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\lambda\omega} \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\Omega} \,;$$

der k-te FOURIER-Koeffizient ist

$$c_k = \frac{1}{\Omega} \int_{\omega_1}^{\omega_2} g(\omega) e^{-ik\lambda\omega}\, d\omega = \frac{1}{\Omega} \int_{\omega_1}^{\omega_2} g(\omega) e^{-2\pi i\omega k/\Omega}\, d\omega$$
$$= \frac{2\pi}{\Omega} f\left(\frac{-2k\pi}{\Omega}\right) \,,$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen wegen $(*)$ gilt.

Durch die Werte $f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right)$ sind also alle FOURIER-Koeffizienten von g bestimmt, damit auch (fast überall) die Funktion $g(\omega)$, und damit auch die Funktion $\widehat{f}(\omega)$, die im Intervall $[\omega_1, \omega_2)$ mit $g(\omega)$ übereinstimmt und außerhalb (außer eventuell im Punkte ω_2) verschwindet. Damit ist auch $f(t) = \overset{\vee}{\widehat{f}}(t)$ fast überall durch diese Werte bestimmt. ∎

HARRY NYQUIST (1889–1976) wurde in Schweden geboren, arbeitete aber ab Anfang der zwanziger Jahre bei den Bell Labaratories; das Bild zeigt ihn um 1960 mit seinen dortigen Kollegen JOHN PIERCE *(links)* und RUDOLF KOMPFNER *(Mitte)*. Seine Arbeit von 1924 über die Übertragungsgeschwindigkeit von Telegraphen gilt als eine der Begründungen der Informationstheorie. Den Abtastsatz, den CAUCHY bereits 1841 postuliert hatte, bewies er 1928. Weitere wichtige Arbeiten befassen sich mit der quantitativen Erforschung des thermischen Rauschens und der Stabilität von Verstärkern.

Bei praktischen Anwendungen dieses Satzes wird $f(t)$ im allgemeinen eine reelle Funktion sein; dann verschwindet

$$\widehat{f}(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(-\omega)t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t) e^{-i\omega t}}\, dt$$
$$= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt} = \overline{\widehat{f}(\omega)}$$

genau dann, wenn auch $\widehat{f}(\omega)$ verschwindet. Daher wird in diesem Fall alles einfacher, wenn man das Intervall, außerhalb dessen $\widehat{f}(\omega)$ ver-

schwindet, symmetrisch zum Nullpunkt wählen kann, also von der Form

$$(-\omega_0,\, \omega_0)\,.$$

Die zur Kreisfrequenz ω_0 gehörende Frequenz $2\pi\omega_0$ wird in diesem Zusammenhang oft als *Bandbreite* bezeichnet. Hier ist $\Omega = 2\omega_0$, zur Rekonstruktion der Funktion f brauchen wir also die Funktionswerte

$$f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right) = f\left(\frac{k\pi}{\omega_0}\right) \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Ein Signal der Bandbreite ν_0 muß also mit einer Frequenz von mindestens $2\nu_0$ abgetastet werden, damit man es eindeutig rekonstruieren kann.

Bekanntestes Beispiel hierfür sind Musik-CDs: Praktisch niemand kann Töne mit Frequenzen von mehr als 20kHz hören; für Aufnahmen auf CD wird 44 100 Mal pro Sekunde der Schalldruck gemessen und gespeichert, für Signale die nicht allzuweit oberhalb von 20kHz abgeschnitten werden, ist also eine perfekte Rekonstruktion möglich.

Auch in der Computergraphik spielt der Satz von NYQUIST eine wichtige Rolle, denn Pixelgraphik ist schließlich nichts anderes als die (zweidimensionale) diskrete Abtastung eines kontinuierlichen Bilds. Falls das Bild zu hochfrequente Anteile enthält, entstehen sogenannte *alias-Effekte,* da das Auge diese Anteile anhand des Pixelbilds als niedrigerfrequente Strukturen mit gleichen Abtastwerten interpretiert. Vor der Abtastung muß das Bild daher tiefpaßgefiltert werden; da die Funktion $\frac{\sin ax}{ax}$, die FOURIER-Transformierte des Rechteckimpulses, einigermaßen schnell abfällt, wendet man dazu meist das Lemma aus dem letzten Abschnitt an und faltet mit einer geeigneten solchen Funktion. Falls das Ursprungsbild auch schon als (höher aufgelöste) Pixelgraphik gegeben war, wird die Faltung hier einfach zu einer Summation über nicht garzu viele Nachbarpixel, was sehr effizient durchgeführt werden kann.

§7: Die Laplace-Transformation

Im letzten Paragraphen haben wir gesehen, daß die FOURIER-Transformation Ableitungen in Produkte überführt; wenn wir also beide Seiten

einer Differentialgleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = b(t)$$

FOURIER-transformieren, erhalten wir eine algebraische Gleichung für $\widehat{y}(\omega)$, die im allgemeinen einfacher zu lösen sein sollte als die Differentialgleichung.

Der Haken an der Sache ist, daß die FOURIER-Transformierte in vielen interessanten Fällen wie etwa bei Schwingungen nicht existiert – zumindest nicht als Funktion. Deshalb arbeitet man nur selten mit dieser Methode. Eine leichte Modifikation führt aber häufig ans Ziel.

a) Definition und erste Eigenschaften

Das FOURIER-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

hat Konvergenzprobleme sowohl an der oberen als auch an der unteren Grenze. Bei der Anwendung von Differentialgleichungen geht es meist um die Vorhersage der Zukunft, so daß das Verhalten für $t \to -\infty$ nicht interessiert; wir setzen daher die Funktion f für $t < 0$ auf null.

Für positive t dürfen wir nicht so radikal vorgehen; hier dämpfen wir die Funktion einfach durch eine Exponentialfunktion. Insgesamt betrachten wir also anstelle von $f(t)$ die Funktion

$$g_r(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ f(t)e^{-rt} & \text{für } t > 0 \end{cases}.$$

Den Funktionswert an der Stelle 0 legen wir so fest, daß die Funktion dort rechtsseitig stetig ist, d.h.

$$g(0) = \lim_{t \to 0+} f(t)\,,$$

wobei $t \to 0+$ bedeuten soll, daß wir nur Nullfolgen aus positiven Zahlen betrachten. Wir wollen der Einfachheit halber im folgenden annehmen, daß f bereits rechtsseitg stetig ist, so daß wir an der Stelle null einfach den Wert $f(0)$ nehmen können.

Die FOURIER-Transformierte dieser Funktion g_r bezeichnen wir, wenn sie existiert, als LAPLACE-Transformierte von f an der Stelle $s = r + i\omega$, d.h.

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \underset{\text{def}}{=} \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt\,.$$

Für gängige Funktionen f ist $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ ist den meisten Formelsammlungen zu finden; es gibt auch umfangreiche Tabellenwerke, die ausschließlich der LAPLACE-Transformation gewidmet sind. Im allgemeinen wird sie nur für hinreichend große Werte von $r = \Re\mathfrak{e}\, s$ existieren.

Die Umkehrung der LAPLACE-Transformation folgt aus der inversen FOURIER-Transformation: Da fast überall $\mathcal{L}\{f(t)\}(r + i\omega) = \widehat{g}_r(t)$ ist, ist $g_r(t)$ die inverse FOURIER-Transformierte von $\mathcal{L}\{f(t)\}(r + i\omega)$; für $t > 0$ ist also fast überall

$$f(t) = e^{rt}g_r(t) = \frac{e^{rt}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}\{f(t)\}(r + i\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\,.$$

Da die Funktionswerte von f auf der negativen Achse bei der LAPLACE-Transformation ignoriert werden, lassen sie sich natürlich auch nicht aus der LAPLACE-Transformierten rekonstruieren.

Wir betrachten die LAPLACE-Transformation in diesem Paragraphen, da sie wie die FOURIER-Transformation die Differentiation in Multiplikation überführt: Nach der Regel über partielle Integration ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\}(s) &= \int_0^\infty \dot{f}(t)e^{-st}\,dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt\\ &= -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}(s)\end{aligned}$$

und damit induktiv

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\dot{f}(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)\,.$$

Dies ist etwas komplizierter als bei der FOURIER-Transformation, wo wir keine Funktionswerte an der Stelle null berücksichtigen mußten,

aber für die Anwendung auf Differentialgleichungen ist das meist ein *Vorteil:*

In der Praxis hat man es fast immer mit Anfangswertproblemen zu tun, wobei man den Anfangszeitpunkt ohne großen Aufwand als Nullpunkt wählen kann. Dann geht es also um die Bestimmung einer Funktion $y(t)$ mit den Eigenschaften, daß

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = b(t)$$

ist und

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1, \quad \ldots, \quad y^{n-1}(0) = y_{n-1}\,.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation macht daraus die algebraische Gleichung

$$\begin{aligned}&s^n\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - s^{n-1}y_0 - s^{n-2}y_1 - \cdots - y_{(n-1)}\\ &+ a_{n-1}s^{n-1}\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - s^{n-2}y_0 - s^{n-3}y_1 - \cdots - y_{(n-2)}\\ &\qquad\vdots\\ &+ a_1 s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - y_0\\ &+ a_0\mathcal{L}\{y(t)\}(s) \qquad = \qquad \mathcal{L}\{b(t)\}(s)\end{aligned}$$

für $\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, die man – so die rechte Seite existiert – leicht nach $\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ auflösen kann. Rücktransformation (meist anhand einer Tabelle) führt dann auf die Lösung $y(t)$ des Anfangswertproblems. Bevor wir dazu Beispiele betrachten, sollten wir zunächst die LAPLACE-Transformierten einiger wichtiger Funktionen kennen.

b) Rechenregeln und Beispiele zur Laplace-Transformation

Die FOURIER-Transformation existiert (als Funktion) weder für reine Schwingungen noch für Polynome, und selbst für e^{-t} gibt es Probleme amunteren Rand des Integrationsbereichts. Wir wollen uns überlegen, daß für alle diese Funktionenklassen die LAPLACE-Transformierte existiert.

Beginnen wir mit $\mathcal{L}\{\sin t\}(s)$. Dieses Integral läßt sich durch partielle Integration relativ leicht ausrechnen, noch einfacher geht es aber, wenn

wir die Rechenregeln für die LAPLACE-Transformation der Ableitung anwenden: Da der Cosinus Ableitung des Sinus ist, haben wir einerseits

$$\mathcal{L}\{\cos t\}(s) = s \cdot \mathcal{L}\{\sin t\}(s) - \sin 0 = s \cdot \mathcal{L}\{\sin t\}(s)\,,$$

andererseit ist der Sinus die negative Ableitung des Cosinus und deshalb

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = -\big(s \cdot \mathcal{L}\{\cos t\}(s) - \cos 0\big) = 1 - s \cdot \mathcal{L}\{\cos t\}(s)\,.$$

Also ist

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = 1 - s^2 \cdot \mathcal{L}\{\sin t\}(s) \quad \text{oder} \quad (1+s^2)\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = 1$$

und damit

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{1+s^2}\,.$$

Die LAPLACE-Transformierte

$$\mathcal{L}\{\cos t\}(s) = s \cdot \mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{s}{1+s^2}$$

des Cosinus wird bei dieser Vorgehensweise gleich mitgeliefert.

Genauso können wir $\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s)$ ausrechnen: Hier ist

$$\omega\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = s \cdot \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s)$$

und

$$\omega\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = 1 - s \cdot \mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s)\,,$$

also

$$\omega\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = 1 - \frac{s^2}{\omega}\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s)$$

oder

$$\left(\omega + \frac{s^2}{\omega}\right)\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = 1\,,$$

d.h.

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{1}{\omega + \frac{s^2}{\omega}} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

und

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{\omega}\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}\,.$$

Für die reine Schwingung $f(t) = a\cos \omega t + b \sin \omega t$ ist also

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = a\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) + b\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{as + b\omega}{s^2+\omega^2}\,.$$

Auch gedämpfte Schwingungen sind kein Problem, denn für jede Funktion f ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)e^{-\lambda t}\}(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-\lambda t}e^{-st}\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+\lambda)t}\,dt \\ &= \mathcal{L}\{f(t)\}(s+\lambda)\,,\end{aligned}$$

also

$$\mathcal{L}\{e^{-\lambda t}\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{(s+\lambda)^2+\omega^2}$$

und

$$\mathcal{L}\{e^{-\lambda t}\cos \omega t\}(s) = \frac{s+\lambda}{(s+\lambda)^2+\omega^2}\,.$$

Betrachten wir als nächstes Polynome: Für eine reine Potenz ist

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \int_0^\infty t^n e^{-st}\,dt\,.$$

Dieses Integral können wir durch die sogenannte *Gammafunktion*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

ausdrücken: mit der Substitution $u = st$ wird

$$\int_0^\infty t^n e^{-st}\,dt = \int_0^\infty \frac{u^n}{s^n}e^{-u}\,\frac{du}{s} = \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty u^n e^{-u}\,du = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}\,.$$

Dies können wir noch weiter ausrechnen, denn offensichtlich ist

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1\,,$$

und partielle Integration zeigt, daß für $x > 0$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt = -t^x e^{-t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty x t^{x-1} e^{-t}\,dt = x\Gamma(x)$$

ist. Somit folgt für natürliche Zahlen n induktiv

$$\Gamma(n+1) = n!\,,$$

und

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}\,.$$

Für ein Polynom

$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

ist damit

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \frac{n!a_n}{s^{n+1}} + \frac{(n-1)!a_{n-1}}{s^n} + \cdots + \frac{2a_1}{s^2} + \frac{a_0}{s} \\ &= \frac{n!a_n + (n-1)!a_{n-1}s + \cdots + 2a_1 s^{n-1} + a_0 s^n}{s^{n+1}}\,.\end{aligned}$$

Insbesondere ist die LAPLACE-Transformierte einer konstanten Funktion $f(t) = a$ gleich a/s. Genau dieselbe Transformierte hat natürlich auch die Sprungfunktion

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases},$$

denn auf Werte an negativen Stellen kommt es bei der LAPLACE-Transformation nicht an.

Kapitel 4
Differentialgleichungen

Differentialgleichungssysteme sind so ziemlich *das* wichtigste mathematischen Hilfsmittel der Naturwissenschaften und der Technik. Die dahinterstehende Grundidee ist einfach: Man kann zwar nur selten *a priori* sagen, wie sich ein System über einen längeren Zeitraum hinweg entwickeln wird, aber man hat oft aufgrund von Naturgesetzen eine klare Vorstellung über die Zustandsänderung *im nächsten Augenblick,* d.h. also über den Wert der zeitlichen Ableitung der Zustandsgrößen in Abhängigkeit vom gegenwärtigen Zustand des Systems. Ein einfaches Beispiel hierfür liefert das zweite NEWTONsche Gesetz, wonach die zeitliche Ableitung des Impuls eines Teilchens gleich der auf das Teilchen wirkenden Kraft ist.

§ 1: Anfangswertprobleme und ihre Lösung via Laplace-Transformation

a) Ein einfaches Beispiel

Beginnen wir mit einem einfachen Beispiel, das wahrscheinlich den meisten schon aus der Schule bekannt: Ein in die Luft geworfener Gegenstand bewegt sich unter gewissen Bedingungen näherungsweise auf einer parabelförmigen Bahn. Wir wollen diese etwas vage Aussage präzisieren und mathematisch herleiten.

Es gibt viele Wurftechniken, und nur wenige davon können auf einfache Weise durch ein mathematisches Modell beschrieben werden; wir ignorieren daher den genauen Vorgang des Abwurfs und gehen davon

aus, daß der Gegenstand *irgendwie* eine Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}$ erreicht hat im Abwurfpunkt mit Koordinaten (x_0, y_0, z_0); den Zeitpunkt des Abwurfs bezeichnen wir mit t_0.

Als nächstes nehmen wir an, daß wir den Luftwiderstand vernachlässigen können, eine Annahme, die beim Kugelstoßen kaum zu Fehlern führt, die aber beispielsweise für einen Fallschirmspringer (auch mit geschlossenem Fallschirm) oder einen Papierflieger völlig unrealistisch ist. Als nächstes wollen wir auch noch annehmen, daß wir nur relativ geringe Wurfhöhen erreichen, so daß die Erdanziehung als konstant angenommen werden kann.

Die Bewegung des Gegenstandes wird dann durch zwei Naturgesetze bestimmt: Das Gravitationsgesetz beschreibt den Effekt der Erdanziehung, und das zweite NEWTONsche Gesetz sagt uns, wie sich diese Kraft auf die Bewegung des Gegenstands auswirkt. Die Gravitation können wir aufgrund der gemachten Annahmen als konstant annehmen, d.h. auf einen Körper der Masse m wirkt die Kraft gm, wobei $g \approx 9{,}8\, m/s^2$ die Gravitationsbeschleunigung an der Erdoberfläche ist; bei „üblicher“ Ausrichtung des Koordinatensystems wirkt sie in Richtung der negativen z-Achse. Diese Gravitationskraft ist nach dem zweiten NEWTONschen Gesetz gleich der Ableitung des Impulses nach der Zeit; wenn wir die Masse m als konstant voraussetzen, ist das also gleich m mal der Ableitung der Geschwindigkeit oder m mal der zweiten Ableitung des Orts. Wir haben somit das Differentialgleichungssystem

$$\ddot{x}(t) = 0, \quad \ddot{y}(t) = 0 \quad \text{und} \quad \ddot{z}(t) = -g\,.$$

Diese Gleichungen sind erfüllt, wann immer $x(t)$ und $y(t)$ lineare Funktionen von t sind und $z(t)$ eine quadratische Funktion mit führendem Koeffizienten $-g$. Die sechs noch fehlenden Koeffizienten dieser drei Polynomfunktionen geben uns die Anfangsbedingungen: Zum Zeitpunkt $t = t_0$ ist

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0 \quad \text{und} \quad z(t_0) = z_0\,,$$

und die Geschwindigkeit ist $\vec{v}$, d.h.

$$\dot{x}(t_0) = v_1, \quad \dot{y}(t_0) = v_2 \quad \text{und} \quad \dot{z}(t_0) = v_3\,.$$

Also ist

$$x(t) = v_1(t - t_0) + x_0, \quad y(t) = v_2(t - t_0) + y_0$$

und

$$z(t) = -g(t - t_0)^2 + v_3(t - t_0) + z_0\,.$$

Diese Gleichungen beschreiben in der Tat fast immer eine Parabel: Falls wir die x-Achse des Koordinatensystems so wählen, daß die Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}$ in der (x, z)-Ebene liegt, ist $v_2 = 0$. Falls auch v_1 verschwindet, falls wir den Gegenstand also senkrecht nach oben (oder gar unten) werfen, sind $x(t) = x_0$ und $y(t) = y_0$ konstant und nur

$$z(t) = -g(t - t_0)^2 + v_3(t - t_0) + z_0$$

hängt von der Zeit ab. Andernfalls können wir durch v_1 dividieren; wir erhalten

$$t - t_0 = \frac{x(t) - x_0}{v_1} \quad \text{und} \quad z(t) = \frac{-g}{v_1}\big(x(t) - x_0\big)^2 + \frac{v_3}{v_1}\big(x(t) - x_0\big) + z_0\,,$$

die Punkte $\big(x(t), z(t)\big)$ liegen also in der Tat auf einer Parabel.

Das gerade durchgerechnete Beispiel war insofern untypisch für Differentialgleichungen, als auf den rechten Seite der Gleichungen nur Konstanten standen; üblicherweise wird man dort Funktionen erwarten, die nicht nur von t abhängen (so daß man einfach integrieren kann), sondern auch noch von den gesuchten Funktionen. Beim radioaktiven Zerfall etwa ist die pro (kleiner) Zeiteinheit zerfallende Masse proportional zur noch vorhandenen Masse, es gibt also eine Konstante $\lambda > 0$, die sogenannte Zerfallskonstante, so daß die zum Zeitpunkt t vorhandene Masse $m(t)$ der Gleichung

$$\dot{m}(t) = -\lambda m(t)$$

genügt – zumindest, wenn diese Masse hinreichend groß ist. (Im atomaren Bereich muß man auch statistische Effekte berücksichtigen, aber ab etwa 10^{10} Atomen können die für alle praktischen Fälle vernachlässigt werden.)

Wir kennen bereits eine Funktion, die sich so verhält, wie es die obige Differentialgleichung angibt, nämlich die Exponentialfunktion $e^{-\lambda t}$,

und natürlich entspricht auch für jedes konstante Vielfache dieser Funktion die Differentiation einfach der Multiplikation mit $-\lambda$. Das sind dann aber bereits alle Funktionen mit dieser Eigenschaft, denn der Quotient

$$q(t) = \frac{m(t)}{e^{-\lambda t}} = m(t) \cdot e^{\lambda t}$$

einer Lösungsfunktion und der Funktion $e^{-\lambda t}$ hat die Ableitung

$$\dot{q}(t) = \dot{m}(t) \cdot e^{\lambda t} + m(t) \cdot \lambda e^{\lambda t} = -\lambda m(t) \cdot e^{\lambda t} + \lambda m(t) \cdot e^{\lambda t} = 0\,,$$

ist also gleich einer Konstanten c, so daß

$$m(t) = c \cdot e^{-\lambda t}$$

ist. Indem wir $t = 0$ setzen, sehen wir, daß die Konstante $c = m(0)$ gleich der zum Zeitpunkt 0 vorhandenen Masse ist; falls wir stattdessen die Masse $m_0 = m(t_0)$ zu einem anderen Zeitpunkt t_0 kennen, können wir analog zum obigen Beispiel auch schreiben

$$m(t) = m_0 e^{-\lambda(t-t_0)} = (m_0 e^{\lambda t_0}) \cdot e^{-\lambda t}\,.$$

b) Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme

Wir betrachten ein System, das durch n zeitlich veränderliche Größen $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ beschrieben wird; unter einem System von Differentialgleichungen oder kurz einer Differentialgleichung verstehen wir eine Vorschrift, die die zeitlichen Ableitungen $\dot{y}_1(t), \ldots, \dot{y}_n(t)$ aus den Funktionswerten berechnet:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1(t) &= f_1\big(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)\big)\\
\dot{y}_2(t) &= f_2\big(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)\big)\\
&\;\;\vdots \quad \vdots\\
\dot{y}_n(t) &= f_n\big(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)\big)\,.
\end{aligned}$$

Falls die Funktionen f_i nur von $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ abhängen und nicht auch noch direkt von der Zeit t spricht man von einem *autonomen* System. Da Naturgesetze nicht von der Zeit abhängen, hat man es in wissenschaftlich-technischen Anwendungen meist mit autonomen

Systemen zu tun; man kann allerdings auch den Einfluß von Umgebungsgrößen in einem zeitabhängigen Term zusammenfassen und so ein nichtautonomes System erhalten.

Falls wir, wie im obigen Beispiel die Werte der beteiligten Funktionen zu einem festen Zeitpunkt $t = t_0$ kennen, reden wir von einem *Anfangswertproblem;* die meisten Anwendungen gewöhnlicher Differentialgleichungen sind Anfangswertprobleme.

Auch Differentialgleichungen, in denen wie dort im Beispiel höhere Ableitungen vorkommen, lassen sich so interpretieren: Wenn wir dort die drei Komponenten des Geschwindigkeitsvektors als neue Funktionen

$$u(t) = \dot{x}(t), \quad v(t) = \dot{y}(t) \quad \text{und} \quad w(t) = \dot{z}(t)$$

eingeführt hätten, wäre das System

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= u(t)\\
\dot{y}(t) &= v(t)\\
\dot{z}(t) &= w(t)\\
\dot{u}(t) &= 0\\
\dot{v}(t) &= 0\\
\dot{w}(t) &= -g
\end{aligned}$$

von obiger Form, und wir hätten für jede der sechs beteiligten Funktionen den Wert an der Stelle $t = t_0$ gekannt.

Ein für die Informationstechnik wichtiger Spezialfall sind Gleichungen der Form

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b(t)\,,$$

die sogenannten linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Auch diese Gleichungen lassen sich leicht auf die obige Form bringen: Wir betrachten n neue Funktionen

$$y_0(t), y_1(t), \ldots, y_{n-1}(t)$$

mit der Idde, daß sich $y_i(t)$ so verhalten soll wie die i-te Ableitung von $y(t)$. Dann betrachten wir das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}
\dot{y}_0(t) &= y_1(t)\\
\dot{y}_1(t) &= y_2(t)\\
&\vdots\ \ \vdots\\
\dot{y}_{n-2}(t) &= y_{n-1}(t)\\
\dot{y}_{n-1}(t) &= b(t) - a_{n-1}y^{(n-1)}(t) - \cdots - a_1\dot{y}(t) - a_0 y(t)\,.
\end{aligned}$$

Für jede Lösung $y(t)$ der obigen Gleichung ist dann das n-tupel

$$\big(y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\big)$$

eine Lösung des Systems, und für jede Lösung

$$\big(y_0(t), y_1(t), y_2(t), \ldots, y_{n-1}(t)\big)$$

des Differentialgleichungssystems ist $y_0(t)$ eine Lösung der obigen Gleichung.

Auch wenn das Differentialgleichungssystem als Anfangswertproblem gegeben ist, läßt sich das leicht in Anfangswerte für die Gleichung höherer Ordung umschreiben: Hier werden die Werte $y(t_0)$, $\dot{y}(t_0)$ *usw.* bis $y^{(n-1)}(t_0)$ vorgegeben.

Da diese Gleichungen so wichtig sind und der häufigste Ansatz für die Lösung entsprechender Anfangswertprobleme unmittelbar an den vorigen Paragraphen anschließt, wollen wir hiermit beginnen:

c) Anwendung der Laplace-Transformation

Aus §6 des vorigen Kapitels kennen wir die LAPLACE-Transformierten einiger wichtiger Funktionen; damit können wir nun darangehen, erste Differentialgleichungen zu lösen. Wir beginnen mit der extrem einfachen Gleichung für eine Masse an einer Feder, die sich reibungsfrei in x-Richtung bewegen kann:

Nach dem HOOKEschen Gesetz wirkt auf diese Masse eine Rückstellkraft $\lambda x(t)$, die proportional ist zur Auslenkung $x(t)$ aus der Ruhelage;

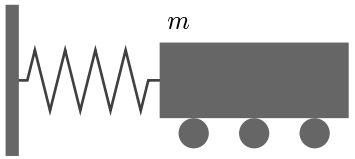


Abb. 23: Eine schwingende Masse

nach dem zweiten NEWTONschen Gesetz ist diese Kraft (eine zeitlich konstante Masse m vorausgesetzt) gleich $m\ddot{x}(t)$. Insgesamt ist also

$$m\ddot{x}(t) + \lambda x(t) = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{x}(t) + \frac{\lambda}{m}x(t) = 0\,.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation macht daraus

$$s^2\mathcal{L}\{x(t)\}(s) - s\cdot x(0) - \dot{x}(0) + \frac{\lambda}{m}\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = 0$$

oder

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{s\cdot x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + \frac{\lambda}{m}}\,.$$

Die schwingende Masse m soll natürlich positiv sein, und auch λ ist größer als null, da $\lambda x(t)$ die *Rückstellkraft* ist. Also ist

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{x(0)\cdot s}{s^2+\omega^2} + \frac{\dot{x}(0)}{s^2+\omega^2} \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{m}}\,.$$

Hier erkennen wir die gerade berechneten LAPLACE-Transformierten

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

und folgern, daß $x(t)$, falls LAPLACE-transformierbar, die Form

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega}\sin\omega t$$

haben muß mit $\omega = \sqrt{\lambda/m}$. Die Masse schwingt also ungedämpft mit Frequenz $\sqrt{\lambda/m}$.

Eine solche ungedämpfte Schwingung wird man in der Realität eher selten beobachten; in den meisten Fällen führen Reibungseffekte schließlich

zum Abklingen der Schwingung. Die Reibungskraft wird im allgemeinen als proportional zur Geschwindigkeit angesetzt, d.h. die linke Seite der Differentialgleichung wird durch ein konstantes Vielfaches von $\dot{x}(t)$ ergänzt. Dieselbe Art von Differentialgleichung erhalten wir auch, wenn wir eine Spule, einen Kondensator und einen Widerstand wie in Abbildung 24 hintereinanderschalten:

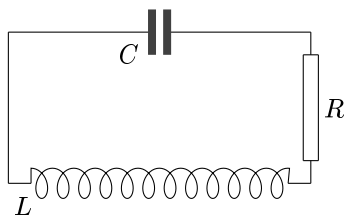


Abb. 24: Ein elektrischer Schwingkreis

Damit hier ein Strom fließt, nehmen wir an, daß der Kondensator zur Zeitpunkt $t = 0$ eine Ladung Q_0 enthalte; die Ladung zum Zeitpunkt t sei $Q(t)$. Dann beträgt der Spannungsabfall am Kondensator

$$U_1(t) = \frac{Q(t)}{C} ,$$

der an der Spule ist nach der LENZschen Regel gleich

$$U_2(t) = L\dot{I}(t) = L\ddot{Q}(t) ,$$

wobei $I(t) = \dot{Q}(t)$ die Stromstärke bezeichnet, und am Widerstand haben wir natürlich nach dem OHMschen Gesetz

$$U_3(t) = RI(t) = R\dot{Q}(t) .$$

Diese drei Spannungen müssen sich zu Null addieren, d.h.

$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{Q}(t) + \frac{R}{L}\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{LC} = 0 .$$

Um bei der Lösung dieser Gleichung keine komplizierten Konstanten mitschleppen zu müssen, schreiben wir die Gleichung bis auf weiteres in der Form

$$\ddot{Q}(t) + \rho\dot{Q}(t) + \sigma Q(t) = 0 \quad \text{mit} \quad \rho = \frac{R}{L} \text{ und } \sigma = \frac{1}{LC} .$$

Außerdem schreiben wir $y(t)$ anstelle von $Q(t)$, um es einerseits mit gewohnten Variablen zu tun zu haben und andererseits, weil wir diesen Typ von Gleichungen noch auf viele andere Probleme anwenden können, bei denen die gesuchte Funktion nicht als Ladung interpretiert werden kann. Wir interessieren uns für das Anfangswertproblem

$$\ddot{y}(t) + \rho\dot{y}(t) + \sigma y(t) = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0 \quad \text{und} \quad \dot{y}(0) = y_1 .$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation ergibt

$$s^2\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - sy_0 - y_1 + \rho\big(s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - y_0\big) + \sigma\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = 0$$

und damit

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{s^2 + \rho s + \sigma} .$$

Eine LAPLACE-Transformierte dieser Form haben wir bislang noch nicht gesehen; wir kennen nur Nenner der Form $(s+\lambda)^2+\omega^2$. In diese Richtung führt uns einer der ältesten Tricks der Mathematik, die über 2000 Jahre alte quadratische Ergänzung:

$$s^2 + \rho s + \sigma = \left(s + \frac{\rho}{2}\right)^2 + \sigma - \frac{\rho^2}{4} .$$

Falls $\sigma > \rho^2/4$ können wir

$$\omega = \sqrt{\sigma - \frac{\rho^2}{4}}$$

setzen und haben dann

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2)^2 + \omega^2} = \frac{y_0(s+\rho/2)}{(s+\rho/2)^2 + \omega^2} + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{(s+\rho/2)^2 + \omega^2} .$$

Diese beiden Summanden erkennen wir als (bis auf konstante Faktoren) die LAPLACE-Transformierten von $e^{-\rho t/2}\cos\omega t$ und $e^{-\rho t/2}\sin\omega t$, d.h.

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 e^{-\rho t/2}\cos\omega t + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{\omega} e^{-\rho t/2}\sin\omega t \\ &= e^{-\rho t/2}\left(y_0\cos\omega t + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{\omega}\sin\omega t\right) . \end{aligned}$$

Der Kondensator entlädt sich also, wie es physikalisch zu erwarten war, aber der zeitliche Verlauf ist gegeben durch eine gedämpfte

Schwingung. Die Dämpfung wird mit wachsendem $\rho = R/L$ immer stärker wird, d.h. je größer der Widerstand und je kleiner die Induktivität ist, desto größer ist die Dämpfung. Abbildung 25 zeigt ein Beispiel einer gedämpften Schwingung zusammen mit der Amplitudenfunktion $e^{-\rho t}$.

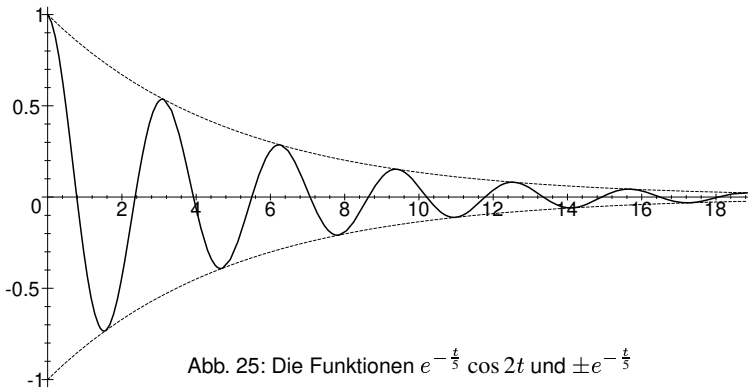


Abb. 25: Die Funktionen $e^{-\frac{t}{5}}\cos 2t$ und $\pm e^{-\frac{t}{5}}$

Falls σ kleiner ist als $\rho^2/4$, können wir

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \sigma}$$

setzen und haben dann

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2)^2 - \omega^2}\,.$$

Diesen Ausdruck kennen wir so noch nicht als LAPLACE-Transformierte einer Funktion, aber wir wissen, daß allgemein $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ist und können hoffentlich auch noch genug Bruchrechnung, um die Beziehung

$$\frac{1}{(s+\rho/2) - \omega} - \frac{1}{(s+\rho/2) + \omega} = \frac{2\omega}{(s+\rho/2)^2 - \omega^2}$$

nachzurechnen. Damit ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2)^2 - \omega^2} \\
&= \frac{1}{2\omega}\left(\frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2) - \omega} - \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2) + \omega}\right) \\
&= \frac{1}{2\omega}\left(\frac{y_0(s+\rho/2-\omega) + y_0\rho/2 + y_1 + y_0\omega}{s+\rho/2-\omega}\right. \\
&\qquad \left. - \frac{y_0(s+\rho/2+\omega) + y_0\rho/2 + y_1 - y_0\omega}{s+\rho/2+\omega}\right) \\
&= \frac{1}{2\omega}\left(y_0 + \frac{y_0\rho/2 + y_1 + y_0\omega}{s+\rho/2-\omega} - y_0 - \frac{y_0\rho/2 + y_1 - y_0\omega}{s+\rho/2+\omega}\right) \\
&= \frac{y_0\rho/2 + y_1 + y_0\omega}{2\omega} \cdot \frac{1}{s+\rho/2-\omega} \\
&\qquad - \frac{y_0\rho/2 + y_1 - y_0\omega}{2\omega} \cdot \frac{1}{s+\rho/2+\omega}\,.
\end{aligned}$$

Diese Summanden können wir als LAPLACE-Transformierte identifizieren: Da $1/s$ die LAPLACE-Transformierte der Konstanten Eins ist, ist $1/(s+a)$ die von e^{-as}; wir haben hier also

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= \frac{y_0\rho/2 + y_1 + y_0\omega}{2\omega} \cdot \mathcal{L}\{e^{-(\rho/2-\omega)t}\}(s) \\
&\qquad - \frac{y_0\rho/2 + y_1 - y_0\omega}{2\omega} \cdot \mathcal{L}\{e^{-(\rho/2+\omega)t}\}(s)
\end{aligned}$$

und somit

$$y(t) = \frac{y_0\rho/2 + y_1 + y_0\omega}{2\omega} \cdot e^{-(\rho/2-\omega)t} - \frac{y_0\rho/2 + y_1 - y_0\omega}{2\omega} \cdot e^{-(\rho/2+\omega)t}\,.$$

Wegen der Positivität von σ ist

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \sigma} < \sqrt{\frac{\rho^2}{4}} = \frac{\rho}{2}\,;$$

daher sind dies zwei Eyponentialfunktionen, die für $t \to \infty$ gegen null gehen, der Kondensator entlädt sich in diesem Fall also ohne Schwingungen gemäß einer Summe zweier Exponentialfunktionen. Die Bedingung

$\sigma < \frac{\rho^2}{4}$ übersetzt sich in diesem Fall in

$$\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{L^2} \quad \text{oder} \quad R > \sqrt{\frac{L}{C}}\,,$$

wenn der Widerstand zu groß ist, dämpft er also so stark, daß es keine Schwingungskomponente mehr gibt.

Bleibt noch der Fall, daß $\sigma = \rho^2/4$ ist. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2)^2} = \frac{y_0(s+\rho/2)}{(s+\rho/2)^2} + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{(s+\rho/2)^2} \\ &= \frac{y_0}{s+\rho/2} + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{(s+\rho/2)^2}\,.\end{aligned}$$

Da $1/s$ die LAPLACE-Transformierte der Eins ist und $1/s^2$ die der Identität, ist somit

$$y(t) = \left(y_0 + \left(y_1 + y_0\frac{\rho}{2}\right)t\right)\, e^{\frac{-\rho}{2}t}$$

Produkt einer linearen Funktion und einer abfallenden Eyponentialfunktion. Abbildung 26 zeigt zwei solche Funktionen, eine mit ansteigendem und eine mit abfallendem linearen Faktor.

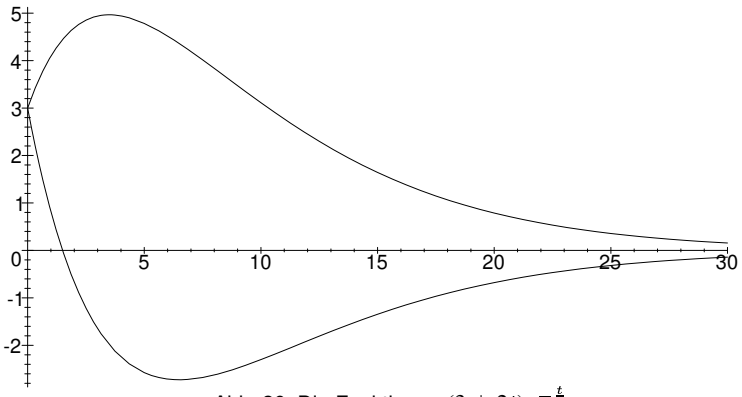


Abb. 26: Die Funktionen $(3 \pm 2t)e^{-\frac{t}{5}}$

Im obigen Stromkreis floß nur deshalb ein Strom, weil der Kondensator aus irgendeinem Grund bereits aufgeladen war; üblicher wäre,

daß ein Strom fließt, weil der Stromkreis eine Stromquelle enthält. Wir ergänzen deshalb den Stromkreis aus Abbildung 24 durch eine Wechselstromquelle mit Frequenz ω_0; der Einfachheit halber wählen wir die Phase so, daß dieser Wechselstrom durch eine reine Cosinusfunktion der Form $A_0 \cos \omega_0 t$ beschrieben werden kann mit $A_0, \omega_0 > 0$. Die Differentialgleichung wird dann zu

$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = A_0 \cos \omega_0 t\,,$$

was wir wieder kurz schreiben als

$$\ddot{y}(t) + \rho\dot{y}(t) + \sigma y(t) = c \cos \omega_0 t$$

mit

$$y(t) = Q(t), \quad \rho = \frac{R}{L}, \quad \sigma = \frac{1}{LC} \quad \text{und} \quad c = \frac{A_0}{L}\,.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation führt auf

$$(s^2 + \rho s + \sigma)\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - sy_0 - y_1 - \rho y_0 = \frac{cs}{s^2 + \omega_0^2}$$

und damit

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{s^2 + \rho s + \sigma} + \frac{cs}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \rho s + \sigma)}\,.$$

Die Umkehrung der LAPLACE-Transformation des ersten Summanden kennen wir: Das ist die Lösung der gerade betrachteten Differentialgleichung. Mit dem zweiten Summanden könnten wir umgehen, wenn nur einer der beiden Faktoren im Nenner stünde; dann hätten wir im wesentlichen die LAPLACE-Transformierte einer Cosinusfunktion.

Genau das gleiche Problem hätten wir, wenn wir eine Stammfunktion des zweiten Summanden suchen würden, und in dieser Situation wüßten wir auch, wie wir weiter vorgehen müßten: Durch Partialbruchzerlegung könnten wir den Integranden in einfachere Brüche zerlegen, deren Stammfunktionen wir kennen. Dieser Ansatz der Partialbruchzerlegung führt auch bei der LAPLACE-Transformation oft zum Erfolg: Falls die beiden Faktoren des Nenners verschieden sind, können wir mit geeigneten Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ schreiben

$$\frac{cs}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \rho s + \sigma)} = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{\gamma s + \delta}{s^2 + \rho s + \sigma}\,.$$

Falls beide Nenner gleich sind, d.h. wenn

$$\rho = 0 \quad \text{und} \quad \sigma = \omega_0^2$$

ist, funktioniert dies natürlich nicht; diesen Fall werden wir vorläufig zurückstellen. Multiplikation des obigigen Ansatzes mit dem Hauptnenner führt auf die Polynomgleichung

$$\begin{aligned} cs &= (\alpha s + \beta)(s^2 + \rho s + \sigma) + (\gamma s + \delta)(s^2 + \omega_0^2) \\ &= (\alpha + \gamma)s^3 + (\beta + \alpha\rho + \delta)s^2 + (\beta\rho + \alpha\sigma + \gamma\omega_0^2)s + \beta\sigma + \delta\omega_0^2 \,. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich zeigt, daß rechts alle Koeffizienten außer dem von s verschwinden müssen. Beim ersten Koeffizienten bedeutet dies, daß

$$\gamma = -\alpha$$

sein muß, und beim letzten erhalten wir

$$\delta = -\frac{\sigma}{\omega_0^2}\beta \,.$$

Damit bleiben nur noch zwei Gleichungen für α und β übrig:

$$\rho\alpha + \left(1 - \frac{\sigma}{\omega_0^2}\right)\beta = 0 \quad \text{und} \quad (\sigma - \omega_0^2)\alpha + \rho\beta = c \,.$$

Falls ρ nicht verschwindet, führt die erste Gleichung zu

$$\alpha = \frac{\frac{\sigma}{\omega_0^2} - 1}{\rho} \cdot \beta = \frac{\sigma - \omega_0^2}{\rho\omega_0^2} \cdot \beta \,,$$

und damit ist nach der zweiten Gleichung

$$\left(\frac{(\sigma - \omega_0^2)^2}{\rho\omega_0^2} + \rho\right)\beta = c$$

oder

$$\beta = \frac{c}{\frac{(\sigma-\omega_0^2)^2}{\rho\omega_0^2} + \rho} = \frac{c\rho\omega_0^2}{(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2\omega_0^2} \,.$$

Damit sind auch α, γ und δ bekannt:

$$\alpha = -\gamma = \frac{\sigma - \omega_0^2}{\rho\omega_0^2} \cdot \beta = \frac{c(\sigma - \omega_0^2)}{(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2\omega_0^2}$$

und

$$\delta = -\frac{\sigma}{\omega_0^2}\beta = \frac{-c\rho\sigma}{(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2\omega_0^2} \,.$$

Bleibt noch der Fall $\rho = 0$ zu behandeln. Dann bleibt vom Gleichungssystem für α und β nur noch

$$\left(1 - \frac{\sigma}{\omega_0^2}\right)\beta = 0 \quad \text{und} \quad (\sigma - \omega_0^2)\alpha = c$$

übrig. Ist $\sigma \neq \omega_0^2$, folgt, daß

$$\beta = \delta = 0 \quad \text{und} \quad \alpha = -\gamma = \frac{c}{\sigma - \omega_0^2}$$

sein muß, was offensichtlich genau die obigen Formeln im Spezialfall $\rho = 0$ sind. Für $\sigma = \omega_0^2$ sind wir in dem Fall, den wir zurückgestellt haben und sehen noch einmal, daß hier der obige Ansatz nicht zu Ziel führt, da die zweite Gleichung zu $0 \cdot \beta = c \neq 0$ wird. In allen anderen Fällen kennen wir nun reelle Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so daß

$$\frac{cs}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \rho s + \sigma)} = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{\gamma s + \delta}{s^2 + \rho s + \sigma}$$

ist. Vom ersten Summanden wissen wir, daß

$$\mathcal{L}\left\{\alpha\cos\omega_0 t + \frac{\beta}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right\} = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega_0^2}$$

ist; den zweiten Summanden müssen wir wie oben durch quadratische Ergänzung

$$s^2 + \rho s + \sigma = \left(s - \frac{\rho}{2}\right)^2 + \sigma - \frac{\rho^2}{4}$$

umformen, und genau wie dort hängt es vom Vorzeichen von

$$\sigma - \frac{\rho^2}{4}$$

ab, ob wir gedämpfte Schwingungen mit Frequenz

$$\omega = \sqrt{\sigma - \frac{\rho^2}{4}}$$

oder abfallende Eyponentialfunktionen erhalten. In jedem Fall ist die Lösung Linearkombination einer reinen Schwingung mit der erregenden Frequenz ω_0, im elektrischen Schwingkreis also der Frequenz der Wechselstromquelle und einer Funktion, die für $t \to \infty$ gegen null geht. Langfristig setzt sich, wie auch Abbildung 27 zeigt, die erregende Frequenz durch.

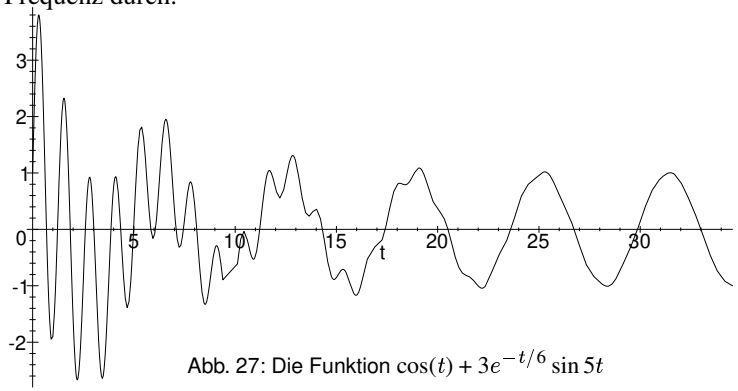


Abb. 27: Die Funktion $\cos(t) + 3e^{-t/6} \sin 5t$

Bleibt noch der zurückgestellte Fall, daß $\rho = 0$ und $\sigma = \omega_0^2$ ist. Dann müssen wir eine Funktion finden, der LAPLACE-Transformierte gleich

$$\frac{cs}{(s^2+\omega_0^2)^2}$$

ist. Diese Funktion sieht so ähnlich aus wie die Ableitung von $1/(s^2+\omega_0^2)$; in der Tat ist

$$\frac{cs}{(s^2+\omega_0^2)^2} = \frac{d}{ds}\frac{-c/2}{s^2+\omega_0^2}\,.$$

Die Funktion, die hier abgeleitet wird, ist die LAPLACE-Transformierte von

$$f(t) = -\frac{c}{2\omega_0}\sin\omega_0 t\,,$$

und nach Aussage *b)* des Lemmas aus §*1b* ist (sofern das Integral absolut

konvergiert) allgemein

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds} f(t)e^{-st}\,dt$$

$$= \int_0^\infty f(t)\cdot(-t)\cdot e^{-st}\,dt = \mathcal{L}\{-tf(t)\}(s)\,.$$

Also ist

$$\frac{cs}{(s^2+\omega_0^2)^2} = \mathcal{L}\left\{\frac{c}{2\omega_0}\cdot t\sin\omega_0 t\right\}(s)\,,$$

und wir haben auch diesen Fall gelöst. Die Funktion $t\sin\omega_0 t$ ist in Abbildung 28 zu sehen; ihre Amplitude steigt immer weiter an.

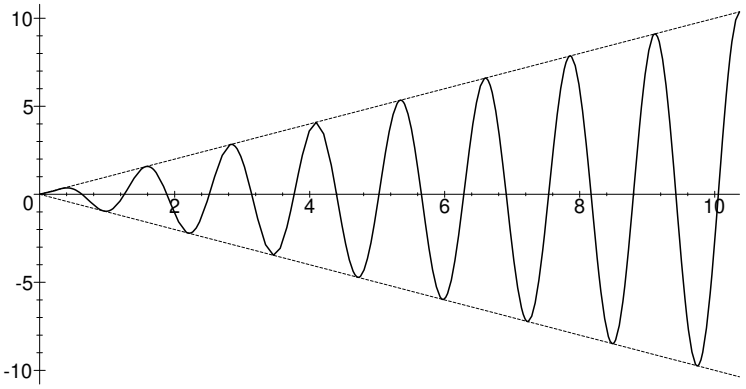


Abb. 28: Die Funktionen $t\sin 5t$

Da unbegrenzt ansteigende Funktionen in Anwendungen selten etwas gutes bedeuten, spricht man hier von einer *Resonanzkatastrophe:* Die erregende Schwingung hat dieselbe Frequenz wie der Schwingkreis, und das führt, bei Abwesenheit einer jeglichen Dämpfung, zu einer katastrophalen Aufschaukelung. Auch bei Dämpfung ist Resonanz zu beobachten: Die oben berechneten Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, haben allesamt den Nenner

$$(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2\omega_0^2\,,$$

werden also umso größer, je näher σ bei ω_0^2 liegt, jedoch verhindert der Dämpfungsterm ρ, daß der Nenner je wirklich verschwindet. Bei kleinem ρ kann die Resonanz bei und um $\sigma = \omega_0^2$ allerdings in der Praxis trotzdem problematisch und in Extremfällen sogar katastrophal sein.

Mit den Formeln, die schon haben, könnten wir nun leicht die vollständigen Lösungen für jeden der behandelten Fälle hinschreiben, aber die bisherige Diskussion zeigt, daß das doch zu sehr langen Formeln führen würde.Die LAPLACE-Transformation ist zwar sehr gut geeignet, um die Lösung eines *konkreten* Anfangswertproblems hinzuschreiben – dann sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ keine komplizierten Ausdrücke, sondern einfach reelle Zahlen –, aber für abstraktere Überlegungen führt sie zu eher unübersichtlichen Ergebnissen.

Leider hat man es auch bei konkreten Anwendungen nicht immer mit konkreten Anfangswertproblemen zu tun: Beim Entwurf von Systemen beispielsweise geht es im allgemeinen eher darum, die Anfangswerte so festzulegen, daß die Lösungen bestimmte Eigenschaften haben.

Daher ist es oft auch wichtig, eine Übersicht über *alle* Lösungen einer Differentialgleichung zu haben. Wir wollen daher noch einige andere Methoden zum Umgang mit Differentialgleichungen kennenlernen, die besser mit dieser Situation fertigwerden.

d) Systeme linearer Differentialgleichungen

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, daß Differentialgleichungen höherer Ordnung interessante Anwendungen haben; wir wissen aber bereits, daß man solche Gleichungen stets umschreiben kann in Systeme, die nur erste Ableitungen enthalten, und zumindest in den gerade betrachteten Beispielen hatten die neu eingeführten Funktionen auch eine physikalische Interpretation als Geschwindigkeit *bzw.* Stromstärke. Die Auffassung als System hat außerdem den Vorteil, daß wir den Apparat der linearen Algebra anwenden können, der uns eine strukturelle Übersicht über die Lösungsmenge einer Differentialgleichung gibt – zumindest im linearen Fall.

Wir betrachten in diesem Abschnitt Systeme von Differentialgleichungen, wie sie zu Beginn dieses Paragraphen definiert wurden, unter der (sehr) einschränkenden Voraussetzungen, daß die rechten Seiten linear in den gesuchten Funktionen $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ sind; wir betrachten also ein System

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1(t) &= a_{11}(t)y_1(t) + a_{12}(t)y_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)y_n(t) + b_1(t) \\
\dot{y}_2(t) &= a_{21}(t)y_1(t) + a_{22}(t)y_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)y_n(t) + b_2(t) \\
&\vdots \quad \vdots \\
\dot{y}_n(t) &= a_{n1}(t)y_1(t) + a_{n2}(t)y_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)y_n(t) + b_n(t)
\end{aligned} \quad . \qquad (*)$$

Eventuell haben wir noch Anfangsbedingungen der Form

$$y_1(t_0) = c_0, \quad y_2(t_0) = c_2, \quad \ldots, \quad y_n(t_0) = c_n \qquad (**)$$

für ein festes $t_0 \in \mathbb{R}$.

Für das Beispiel des elektrischen Schwingkreises mit angelegter Wechselspannung etwa haben wir bei dieser Sicht der Dinge die beiden Funktionen $Q(t)$, die Ladung des Kondensators zum Zeitpunkt t, und $I(t) = \dot{Q}(t)$, die resultierende Stromstärke; das Differentialgleichungssystem $(*)$ wird zu

$$\begin{aligned}
\dot{Q}(t) &= I(t) \\
\dot{I}(t) &= -\frac{R}{L}I(t) - \frac{Q(t)}{LC} + A_0 \cos \omega_0 t
\end{aligned} \quad .$$

Wir können die Funktionen $y_i(t)$, $b_i(t)$ und die Anfangswerte c_i jeweils zu Vektoren zusammenfassen und die Koeffizientenfunktionen $a_{ij}(t)$ zu einer Matrix; mit

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

und

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

bekommt das System die übersichtlichere Form

$$\dot{\vec{y}}(t) = A(t) \cdot \vec{y}(t) + \vec{b}(t)\,,$$

wobei die Ableitung eines Vektors von Funktionen natürlich der Vektor der abgeleiteten Funktionen sein soll. Falls es Anfangsbedingungen gibt, haben sie nun die kompakte Form $\vec{y}(t_0) = \vec{c}$.

In Analogie zu den linearen Gleichungssystemen bezeichnen wir das System $(*)$ als *homogen,* wenn $\vec{b}(t)$ der Nullvektor ist, wenn also alle Funktionen $b_i(t)$ verschwinden; andernfalls bezeichnen wir es als *inhomogen.* Das homogene System zu einem gegebenen inhomogenen System soll einfach dasjenige System sein, in dem alle $b_i(t)$ durch null ersetzt wurden.

Wie bei linearen Gleichungssystemen gilt auch hier

Lemma: *a)* Die Menge aller Lösungen eines *homogenen* Differentialgleichungssystems der Form $(*)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
b) Ist das System nicht homogen und ist $\vec{y}(t)$ eine feste Lösung, so läßt sich jede andere Lösung $\vec{z}(t)$ schreiben als $\vec{z}(t) = \vec{y}(t) + \vec{x}(t)$ mit einer Lösung $\vec{x}(t)$ des zugehörigen homogenen Systems; die Lösungsmenge ist also ein affiner Raum.

Beweis: a) Wir müssen zeigen, daß für zwei Lösungen $\dot{\vec{x}}(t)$ und $\dot{\vec{y}}(t)$ eines homogenen Systems auch jede Linearkombination $\lambda\dot{\vec{x}}(t) + \mu\dot{\vec{y}}(t)$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ wieder eine Lösung ist. Das ist aber klar, denn wenn

$$\dot{\vec{x}}(t) = A(t) \cdot \vec{x}(t) \quad \text{und} \quad \dot{\vec{y}}(t) = A(t) \cdot \vec{y}(t)$$

ist, gilt auch

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\lambda\vec{x}(t) + \mu\vec{y}(t)\right) &= \lambda\dot{\vec{x}}(t) + \mu\dot{\vec{y}}(t) = \lambda A(t) \cdot \vec{x}(t) + \mu A(t) \cdot \vec{y}(t) \\ &= A(t) \cdot \left(\lambda\vec{x}(t) + \mu\vec{y}(t)\right). \end{aligned}$$

b) Sind $\vec{y}(t)$ und $\vec{z}(t)$ zwei Lösungen von $(*)$, so ist

$$\dot{\vec{y}}(t) = A(t) \cdot \vec{y}(t) + \vec{b}(t) \quad \text{und} \quad \dot{\vec{z}}(t) = A(t) \cdot \vec{z}(t) + \vec{b}(t)\,;$$

die Differenz $x(t) = z(t) - y(t)$ hat somit die Ableitung

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) = \dot{\vec{z}}(t) - \dot{\vec{y}}(t) &= \left(A(t) \cdot \vec{z}(t) + \vec{b}(t)\right) - \left(A(t) \cdot \vec{z}(t) + \vec{b}(t)\right) \\ &= A(t) \cdot \vec{z}(t) - A(t) \cdot y(t) = A(t) \cdot \left(\vec{z}(t) - \vec{y}(t)\right) = A(t) \cdot \vec{x}(t) \end{aligned}$$

und $x(t)$ löst also in der Tat das zugehörige homogene System. ∎

Um die Lösungsmenge des Differentialgleichungssystems $(*)$ zu verstehen, müssen wir nach diesem Lemma zwei Teilaufgaben lösen:

1.) Wir müssen den Vektorraum der Lösungen des homogenen Systems bestimmen.
2.) Wir müssen uns wenigstens eine Lösung des inhomogenen Systems verschaffen – oder zumindest wissen, daß eine existiert.

Um im einfachsten Fall zu sehen, wie so etwas funktionieren könnte, betrachten wir ein „System“ aus genau einer Gleichung

$$\dot{y}(t) = a(t) \cdot y(t) + b(t)\,;$$

dabei nehmen wir an, daß y eine differenzierbare Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ sei und $a, b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

Wir beginnen mit der Lösung des homogenen Systems

$$\dot{y}(t) = a(t) \cdot y(t)\,.$$

Unter der Annahme, daß wir das dürfen, dividieren wir durch $y(t)$ und erhalten

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = a(t)\,.$$

Der Quotient links ist bekanntlich die logarithmische Ableitung von $y(t)$; falls dies nicht mehr bekannt sein sollte, zeigt eine einfache Anwendung der Kettenregel, daß in einem Intervall, in dem $y(t)$ positiv ist,

$$\frac{d}{dt} \ln y(t) = \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = a(t)$$

ist. In einem Intervall, in dem $y(t)$ negativ ist, gilt entsprechend

$$\frac{d}{dt}\ln\bigl(-y(t)\bigr) = \frac{-\dot y(t)}{-y(t)} = \frac{\dot y(t)}{y(t)} = a(t)\,,$$

und allgemein haben wir somit

$$\frac{d}{dt}\ln|y(t)| = \frac{\dot y(t)}{y(t)} = a(t)$$

in jedem Intervall, in dem $y(t)$ nirgends verschwindet.

Integration beider Seiten führt auf

$$\ln|y(t)| = \int a(t)\,dt + C \quad \text{oder} \quad y(t) = e^{\int a(t)\,dt + C} = e^C \cdot e^{\int a(t)\,dt}$$

oder

$$y(t) = \pm e^C \cdot e^{\int a(t)\,dt}\,,$$

wobei das Vorzeichen wegen der Stetigkeit von y im gesamten Intervall konstant ist, da die Exponentialfunktion nie null wird.

Damit ist in diesem Fall das erste Problem auf eine einfache Integration zurückgeführt.

Bleibt noch die Frage, was passiert, wenn $y(t)$ an irgendeinem Punkt t_0 eine Nullstelle haben sollte. Wir wollen uns überlegen, daß $y(t)$ dann auch für jedes $t > t_0$ verschwinden muß. Falls nicht, gibt es einen Punkt $t_1 > t_0$, so daß $y(t_1) \neq 0$ ist. Wegen der Stetigkeit von $y(t)$ ist die Funktion dann auch in einer Umgebung von t_1 von Null verschieden, d.h. dort können wir die obigen Argumente anwenden und sehen, daß $y(t)$ dort die Form $e^{h(t)}$ hat mit irgendeiner Funktion h. Da y als differenzierbare Funktion insbesondere überall stetig sein muß und $e^{h(t)}$ nirgends verschwindet, ist das nicht möglich. Genauso überlegt man sich, daß $y(t)$ für jedes $t < t_0$ verschwinden muß, $y(t)$ ist also gleich der Nullfunktion. Diese ist somit die einzige Lösung, die noch zusätzlich betrachtet werden muß. Insbesondere folgt daraus auch, daß eine Lösungsfunktion, die in irgendeinem Punkt positiv *bzw.* negativ ist, überall positiv *bzw.* negativ sein muß, denn eine stetige Funktion kann ihr Vorzeichen nur wechseln, wenn sie in irgendeinem Punkt null wird; wie wir gerade gesehen haben, ist das genau dann der Fall, wenn sie überall verschwindet.

Somit hat jede Lösung die Form

$$y(t) = ae^{\int a(t)\,dt} \quad \text{mit einem } a \in \mathbb{R}\,.$$

Insbesondere bilden diese Lösungen einen eindimensionalen Vektorraum.

Auch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung läßt sich in diesem Fall angeben: Die Methode der *Variation der Konstanten,* mit der wir uns später noch genauer beschäftigen werden, führt auf den Kandidaten

$$y(t) = \left(\int b(t)\cdot e^{-\int a(t)\,dt}\,dt\right)\cdot e^{\int a(t)\,dt}\,,$$

und in der Tat rechnet man leicht nach, daß nach der Produktregel

$$\begin{aligned}\dot y(t) &= \left(b(t)\cdot e^{-\int a(t)\,dt}\right)\cdot e^{\int a(t)\,dt} \\ &\quad + \left(\int b(t)\cdot e^{-\int a(t)\,dt}\,dt\right)\cdot\left(a(t)\cdot e^{\int a(t)\,dt}\right) \\ &= b(t) + a(t)\cdot\left(\int b(t)\cdot e^{-\int a(t)\,dt}\,dt\right)\cdot e^{\int a(t)\,dt} \\ &= a(t)\cdot y(t) + b(t)\end{aligned}$$

ist.

Es wäre schön, wenn wir im mehrdimensionalen Fall genauso vorgehen könnten. Zumindest für homogene Systeme bietet sich an, formal genauso vorzugehen wie im eindimensionalen: Dort hatten wir

$$\dot y(t) = a(t)\cdot y(t) \Longrightarrow y(t) = ce^{\int a(t)\,dt} \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Warum sollte also nicht gelten

$$\dot{\vec y}(t) = A(t)\cdot\vec y(t) \Longrightarrow y(t) = e^{\int A(t)\,dt}\cdot\vec c \quad \text{mit} \quad \vec c \in \mathbb{R}^n \quad ?$$

Das Problem dabei ist nur, daß wir nicht die geringste Ahnung haben, was die rechte Seite hier bedeuten soll; unser nächstes Ziel ist es, ihr eine Bedeutung zu geben.

e) Die Matrixexponentialfunktion

Wir orientieren uns wieder am Eindimensionalen: Für eine reelle Zahl x ist

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} ,$$

also setzen wir analog für eine $n \times n$-Matrix X

$$e^X \underset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot X^i .$$

Damit ist klar, daß e^X eine $n \times n$-Matrix sein soll, und das erklärt auch, warum oben der Konstantenvektor $\vec{y}_0$ auf der rechten Seite steht. Was wir uns noch überlegen müssen, ist die Konvergenz der Reihe.

Dazu müssen wir die Größe der Einträge in den Matrizen X^i abschätzen: Sind allgemein A, B zwei $n \times n$-Matrizen und sind die Beträge aller Einträge von A kleiner oder gleich a und die von B kleiner oder gleich b, so kann es in AB offensichtlich keinen Eintrag geben, dessen Betrag größer ist als nab: Schließlich ist jeder Eintrag in der Produktmatrix eine Summe von n Summanden, deren jeder Produkt je eines Eintrags von A und von B ist.

Um diese Formel leichter anwenden zu können, machen wir sie mutwillig schlechter und begnügen uns damit, daß jeder Eintrag von AB höchstens den Betrag $(na) \cdot (nb)$ hat.

Ist nun x der Betrag des größten Eintrags in der Matrix X, so folgt induktiv sofort, daß in X^i höchstens Zahlen bis zum Betrag $(nx)^i$ stehen können; in der endlichen Teilsumme

$$\sum_{i=0}^{M} \frac{1}{i!} X^i$$

hat daher jeder Eintrag einen Betrag kleiner

$$\sum_{i=0}^{M} \frac{(nx)^i}{i!} .$$

Letztere Summe konvergiert für $M \to \infty$ gegen e^{nx}, und damit muß auch die Matrixsumme konvergieren, denn die Reihe für e^{nx} ist konvergente Majorante des Betrags eines jeden Eintrags. Insbesondere hat jeder Eintrag von e^X höchstens den Betrag e^{nx}.

Damit wissen wir also, daß die Matrix e^X für jede $n \times n$-Matrix X existiert; somit ist die Funktion $t \mapsto e^{At}$ wohldefiniert.

Wir können natürlich nicht erwarten, daß die Matrixexponentialfunktion alle schönen Eigenschaften der gewöhnlichen Exponentialfunktion erbt. Beispielsweise ist nur schwer vorstellbar, daß für beliebige Matrizen A und B gelten sollte $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$: Da für zwei Matrizen A und B stets $A + B = B + A$ ist, müßte dann auch $e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$ sein, was zumindest unwahrscheinlich aussieht. In der Tat ist etwa für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sowohl A^2 als auch B^2 gleich der Nullmatrix, d.h.

$$e^A = E + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad e^B = E + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$e^A \cdot e^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Das Quadrat von $C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist aber gleich der Einheitsmatrix und daher ist

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= E + C + \frac{1}{2!}E + \frac{1}{3!}C + \frac{1}{4!}E + \frac{1}{5!}C + \cdots \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)!} \right) \cdot E + \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)!} \right) \cdot C \\ &= \cosh(1) \cdot E + \sinh(1) \cdot C = \begin{pmatrix} \cosh(1) & \sinh(1) \\ \sinh(1) & \cosh(1) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e + e^{-1} & e - e^{-1} \\ e - e^{-1} & e + e^{-1} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Zum Glück gilt aber wenigstens

Lemma: Für zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $AB = BA$ ist

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A .$$

Insbesondere ist für $s, t \in \mathbb{R}$

$$e^{A(s+t)} = e^{As} \cdot e^{At} .$$

Beweis: Für zwei reelle Zahlen x, y ist $e^{x+y} = e^x e^y = e^y e^x$; damit gilt dieselbe Formel auch für zwei reellwertige Variablen x und y. Wenn wir in allen Potenzreihen alle x- und y-Potenzen oberhalb der N-ten ignorieren, sagt die Gleichung aus, daß drei Polynome in x und y *als Polynome* identisch sind.

Beim Rechnen mit Polynomen in x und y verwendet man keine speziellen Eigenschaften dieser Variablen *außer, daß sie kommutieren.* Damit kann man in so eine Polynomidentität auch kommutierende Matrizen A und B einsetzen: Beispielsweise führt die Polynomidentität

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

zur Identität

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 ,$$

die wegen der für beliebige Matrizen gültigen Gleichung

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

für kommutierende Matrizen in der Tat erfüllt ist.

Damit ist für kommutierende Matrizen A, B speziell stets

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A .$$

Da zwei skalare Vielfache derselben Matrix stets miteinander kommutieren, folgt damit auch die letzte Aussage des Lemmas. ∎

Die für uns wichtigste Anwendung hiervon ist

Satz: Für jede $n \times n$-Matrix A ist die Funktion

$$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n} \\ t \mapsto e^{At} \end{cases}$$

stetig differenzierbar mit Ableitung $t \mapsto A \cdot e^{At} = e^{At} \cdot A$.

Beweis: Die Ableitung ist definiert als

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} .$$

Da die Matrizen At und Ah miteinander vertauschbar sind, ist nach dem gerade bewiesenen Lemma $e^{A(t+h)} = e^{At} \cdot e^{Ah}$, also

$$\frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} = e^{At} \cdot \frac{e^{Ah} - E}{h} .$$

Dabei ist

$$\frac{e^{Ah} - E}{h} = \frac{1}{h} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(Ah)^i}{i!} = A + A^2 h \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(Ah)^{i-2}}{i!} = A + A^2 h \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(Ah)^i}{(i+2)!} .$$

Nach der obigen Diskussion ist jeder Eintrag der Matrix in der rechtsstehenden Summenmatrix höchstens gleich

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ah)^i}{(i+2)!} = \frac{e^{ah} - (1+ah)}{a^2 h^2} ,$$

bleibt also insbesondere beschränkt. Dies gilt auch für $h \to 0$, denn wie zweimalige Anwendung der DE L'HOSPITALschen Regel oder TAYLOR-Entwicklung zeigen, ist der Grenzwert dann $\frac{1}{2}$. Damit existiert

$$\lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(Ah)^i}{(i+2)!} ,$$

und somit ist $\frac{d}{dt} e^{At} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} = e^{At} \cdot A$, da der Vorfaktor $A^2 h$ gegen Null geht. Dies ist auch gleich $A \cdot e^{At}$, denn da A mit jeder seiner Potenzen vertauschbar ist, ist es auch mit jeder endlichen Teilsumme der Reihe von e^{At} vertauschbar, also auch mit e^{At} selbst. ∎

Am Ende des vorigen Abschnitts hatten wir gehofft, daß vielleicht auch für jede matrixwertige Funktion $A(t)$ gelten könnte, daß

$$\frac{d}{dt}e^{A(t)} = \dot{A}(t)e^{A(t)}$$

ist; dies war offensichtlich zu optimistisch: Da

$$e^{A(t+h)} = e^{A(t)+h\dot{A}(t)+o(h)}$$

ist, bräuchten wir für einen Beweis nach obigem Vorbild, daß $A(t)$ und $\dot{A}(t)$ miteinander kommutieren; dies ist aber im allgemeinen nicht der Fall. Für

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

beispielsweise ist

$$\dot{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

also

$$A(t)\cdot\dot{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{aber} \quad \dot{A}(t)\cdot A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Dies ist natürlich kein Beweis dafür, daß die Ableitung von $e^{A(t)}$ ungleich $\dot{A}(t)\cdot e^{A(t)}$ ist, aber im vorliegenden Fall ist die Ableitung in der Tat verschieden sowohl von $\dot{A}(t)e^{A(t)}$ als auch von $e^{A(t)}\cdot A(t)$: Mit den Methoden, die wir im nächsten Abschnitt kennenlernen werden, können wir durch eine (alles andere als angenehme) Rechnung zeigen, daß

$$e^{A(t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{1+\sqrt{t}}+e^{1-\sqrt{t}}}{2} & \dfrac{\sqrt{t}\left(e^{1+\sqrt{t}}-e^{1-\sqrt{t}}\right)}{2} \\ \dfrac{e^{1+\sqrt{t}}-e^{1-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} & \dfrac{e^{1+\sqrt{t}}+e^{1-\sqrt{t}}}{2} \end{pmatrix} ,$$

$$\frac{d}{dt}e^{A(t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\left(e^{2\sqrt{t}}-1\right)e^{1-\sqrt{t}}}{4\sqrt{t}} & \dfrac{\left(-1+\sqrt{t}+\sqrt{t}e^{2\sqrt{t}}+e^{2\sqrt{t}}\right)e^{1-\sqrt{t}}}{4\sqrt{t}} \\ \dfrac{\left(1-e^{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}+\sqrt{t}e^{2\sqrt{t}}\right)e^{1-\sqrt{t}}}{4t\sqrt{t}} & \dfrac{\left(e^{2\sqrt{t}}-1\right)e^{1-\sqrt{t}}}{4\sqrt{t}} \end{pmatrix} ,$$

aber

$$\dot{A}(t)\cdot e^{A(t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{1+\sqrt{t}}-e^{1-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} & \dfrac{e^{1+\sqrt{t}}+e^{1-\sqrt{t}}}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$e^{A(t)}\cdot\dot{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{e^{1+\sqrt{t}}+e^{1-\sqrt{t}}}{2} \\ 0 & \dfrac{e^{1+\sqrt{t}}-e^{1-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} \end{pmatrix}$$

ist. Wir müssen uns bei diesem Ansatz also begnügen mit linearen homogenen Differentialgleichungen mit *konstanten* Koeffizienten.

Alles was uns zu deren theoretischer Lösung jetzt noch fehlt sind Rechenregeln für den Umgang mit Ableitungen von Matrixfunktionen; für die praktische Lösung fehlen natürlich auch noch Verfahren zur effizienten Berechnung der Matrixexponentialfunktion.

Zumindest für Summen und Produkte gelten, wenn man von der Nichtkommutativität der Multiplikation absieht, für matrixwertige Funktionen die üblichen Regeln:

Lemma: $F, G\colon (a,b) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ seien zwei matrixwertige Funktionen auf dem offenen Intervall (a,b). Dann ist

$$\frac{d}{dt}\big(F(t)+G(t)\big) = \dot{F}(t)+\dot{G}(t)$$

und

$$\frac{d}{dt}\big((F(t)G(t)\big) = \dot{F}(t)\cdot G(t) + F(t)\cdot\dot{G}(t)\,.$$

Für einen konstanten Vektor $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ ist

$$\frac{d}{dt}\big(F(t)\cdot\vec{v}\big) = \dot{F}(t)\cdot\vec{v}\,.$$

Beweis: Für die Summe ist dies klar: Sind $f_{ij}(t)$ und $g_{ij}(t)$ die Komponenten der Matrizen F und G, so sind die Summen $f_{ij}(t)+g_{ij}(t)$ die Komponenten von $F+G$, und deren Ableitung ist die Summe der Ableitungen.

Die (i,j)-Komponente von FG ist die Funktion $\sum_{\nu=1}^{n} f_{i\nu}(t)\cdot g_{\nu j}(t)$, und deren Ableitung ist

$$\sum_{\nu=1}^{n}\Big(\dot{f}_{i\nu}(t)\cdot g_{\nu j}(t) + f_{i\nu}(t)\cdot\dot{g}_{\nu j}(t)\Big)\,,$$

die (i,j)-Komponente von $\dot{F}(t)\cdot G(t) + F(t)\cdot \dot{G}(t)$.

Sind $v_1,\dots,v_n$ die Komponenten des Vektors $\vec{v}$, so ist die i-te Komponente der vektorwertigen Funktion $F(t)\cdot\vec{v}$ gleich der Summe

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t)\cdot v_j \quad \text{mit Ableitung} \quad \sum_{j=1}^{n} \dot{f}_{ij}(t)\cdot v_j\,,$$

und das ist die i-te Komponente von $\dot{F}(t)\cdot\vec{v}$. ∎

Damit haben wir alles zusammen und können zeigen

Satz: Die sämtlichen Lösungen des homogenen Differentialgleichungssystems $\dot{y} = Ay$ sind genau die Funktionen $t \mapsto e^{At}\vec{y}_0$ mit $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Beweis: Da e^{At} die Ableitung Ae^{At} hat, ist die Ableitung der vektorwertigen Funktion $\vec{f}(t) = e^{At}\cdot\vec{y}_0$ nach der zuletzt bewiesenen Formel gleich $A\cdot e^{At}\cdot\vec{y}_0$, also in der Tat gleich $A\cdot\vec{f}(t)$.

Nun sei $\vec{y}\colon (a,b)\to\mathbb{R}^n$ irgendeine differenzierbare vektorwertige Funktion mit der Eigenschaft, daß $\dot{\vec{y}}(t) = A\cdot\vec{y}(t)$ ist. Wir betrachten die Funktion $\vec{g}(t) = e^{-At}\cdot\vec{y}(t)$. Deren Ableitung ist

$$\dot{\vec{g}}(t) = -A\cdot e^{-At}\cdot\vec{y}(t) + e^{-At}\cdot\dot{\vec{y}}(t) = -A\cdot e^{-At}\cdot\vec{y}(t) + e^{-At}\cdot A\vec{y}(t) = \vec{0}\,,$$

denn die Matrix A ist mit e^{-At} vertauschbar. Damit haben alle Komponenten von $\vec{g}$ die Ableitung Null, sind also konstant, und somit ist $\vec{g}(t) \underset{\text{def}}{=} \vec{y}_0$ ein konstanter Vektor mit der Eigenschaft, daß

$$\vec{y}_0 = e^{-At}\cdot\vec{y}(t), \quad \textit{d.h.} \quad \vec{y}(t) = e^{At}\cdot\vec{y}_0\,,$$

wie behauptet. ∎

Korollar: Für jeden Vektor $\vec{y}_0\in\mathbb{R}^n$ und jede reelle Zahl $t_0\in\mathbb{R}$ gibt es genau eine differenzierbare Funktion $\vec{y}(t)$ mit den Eigenschaften, daß $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ und $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$ ist; dies ist $\vec{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\cdot\vec{y}_0$. ∎

Wir wußten bereits, daß die Lösungen einen Vektorraum bilden; obiges Korollar sagt uns, daß dieser Vektorraum die Dimension n hat und

daß für jede reelle Zahl t_0 die Abbildung $\vec{y}\mapsto\vec{y}(t_0)$ ein Isomorphismus auf den $\mathbb{R}^n$ ist.

f) Berechnung der Matrixexponentialfunktion

Die Matrixexponentialfunktion ist zwar wohldefiniert, aber eine matrixwertige Potenzreihe ist für allgemeine Matrizen A nicht gerade einfach zu berechnen. Wir brauchen daher alternative Rechenverfahren.

Zumindest ein Fall ist problemlos: Ist nämlich

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix, ist offensichtlich

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{d_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{d_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{d_n t} \end{pmatrix}$$

wieder eine Diagonalmatrix, wobei die Exponentialfunktion einfach komponentenweise auf die Diagonaleinträge ihres Arguments angewandt wird.

Noch ein weiterer Fall ist relativ unproblematisch: für eine obere (oder untere) Dreiecksmatrix N mit Nullen in der Hauptdiagonalen. Eine solche Matrix definiert eine lineare Abbildung $\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$, die den k-ten Einheitsvektor $\vec{e}_k$ in den von $\vec{e}_{k+1}$ bis $\vec{e}_n$ erzeugten Untervektorraum abbildet, das Quadrat von N bildet ihn entsprechend in den von $\vec{e}_{k+2}$ bis $\vec{e}_n$ erzeugten Untervektorraum ab und so weiter, spätestens N^n ist also die Nullmatrix. Damit wird die Potenzreihe der Exponentialfunktion zu einer endlichen Summe, die, wir wir bereits in zwei Beispielen gesehen haben, zumindest für kleine n leicht berechnet werden kann.

Im nächsten Paragraphen wollen wir sehen, daß sich die Berechnung einer beliebigen Matrixexponentialfunktion auf diese beiden Spezialfälle zurückführen läßt.

§2: Eigenwerte, Eigenvektoren und Hauptvektoren

In diesem Paragraphen arbeiten wir über einem beliebigen Körper k; in den Anwendungen auf Differentialgleichungen nachher wird $k = \mathbb{R}$ oder $k = \mathbb{C}$ sein. Auch für endliche Körper k gibt es allerdings Anwendungen der hier entwickelten Theorie, die beispielsweise in einigen Gebieten der Signalverarbeitung von Interesse sind. Wir setzen daher nichts über k voraus außer den Körperaxiomen.

a) Eigenwerte und Eigenvektoren

Nicht nur bei der Berechnung der Matrixexponentialfunktion sind Diagonalmatrizen sehr viel angenehmer als allgemeine Matrizen. Eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ hat die Eigenschaft, daß sie den i-ten Einehitsvektor $ve_i \in k^n$ auf dessen Vielfaches $\lambda_i \vec{e}_i$ abbildet, und diese Eigenschaft soll uns als Ausgangspunkt für die Definition von Eigenwerten und Eigenvektoren dienen:

Definition: *a)* V sei ein k-Vektorraum. Ein Vektor $\vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$ heißt *Eigenvektor* der linearen Abbildung $\varphi: V \to V$ zum *Eigenwert* $\lambda \in k$, wenn $\varphi(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ ist.

b) $\lambda \in k$ heißt *Eigenwert* von φ, falls φ einen Eigenvektor zum Eigenwert λ hat.

c) Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix $A \in k^{n \times n}$ sind die Eigenwerte und Eigenvektoren der linearen Abbildung

$$\varphi: \begin{cases} k^n \to k^n \\ \vec{v} \mapsto A\vec{v} \end{cases} .$$

Offensichtlich ist mit einem Vektor $\vec{v}$ auch jedes Vielfache (außer dem nach Definition ausgeschlossenen Nullvektor) ein Eigenvektor zum selben Eigenwert; allgemeiner ist sogar jede Linearkombination (außer $\vec{0}$) von Eigenvektoren zum Eigenwert λ wieder ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, d.h. die Eigenvektoren zu einem festen Eigenwert λ bilden zusammen mit dem Nullvektor einen Untervektorraum von V, den sogenannten *Eigenraum* von λ.

Definition: Die Dimension des Eigenraums von λ heißt *geometrische Vielfachheit* des Eigenwerts λ.

Lemma: Sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r \in V$ Eigenvektoren der linearen Abbildung $\varphi: V \to V$ zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, so sind diese Vektoren linear unabhängig.

Beweis: Angenommen, $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ seien linear abhängig. Dann können wir eine Zahl $2 \le s \le r$ finden, so daß zwar $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_s$ linear abhängig sind, nicht aber $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{s-1}$. Es gibt daher Skalare $\alpha_i \in k$, so daß

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_s \vec{v}_s = \vec{0}$$

ist. Wenden wir auf beide Seiten dieser Gleichung die Abbildung φ an und beachten, daß $\varphi(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i$ ist, folgt, daß auch

$$\alpha_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_s \lambda_s \vec{v}_s = \vec{0}$$

ist. Andererseits können wir obige Gleichung auch einfach mit λ_s multiplizieren mit dem Ergebnis, daß

$$\lambda_s \alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_s \alpha_s \vec{v}_s = \vec{0} .$$

Bei Subtraktion der letzten beiden Gleichungen voneinander fällt der letzte Term auf der linken Seite weg, und wir erhalten eine lineare Abhängigkeit

$$\alpha_1(\lambda_s - \lambda_1)\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_{s-1}(\lambda_s - \lambda_{s-1})\vec{v}_{s-1} = \vec{0}$$

zwischen $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{s-1}$. Da diese Vektoren linear unabhängig sind, müssen hier alle Koeffizienten verschwinden. Da die Eigenwerte $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ allesamt verschieden sind, ist dies nur möglich, wenn $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{s-1} = 0$ ist. Wegen $\vec{v}_s \neq \vec{0}$ muß dann aber auch α_s verschwinden, im Widerspruch zur angenommenen linearen Unabhängigkeit von $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_s$.

Also sind die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ linear unabhängig. ∎

Eigenwerte und Eigenvektoren sind auch interessant für Selbstabbildungen eines unendlichdimensionalen Vektorraums: Ist $V = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ beispielsweise der Vektorraum aller beliebig oft stetig differenzierbarer

reeller Funktionen, so sind $\sin \omega t$ und $\cos \omega t$ Eigenvektoren der linearen Abbildung

$$\varphi: \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f \mapsto \ddot{f} \end{cases}$$

zum Eigenwert $-\omega^2$; genauso sind $\sinh \omega t$ und $\cosh \omega t$ Eigenvektoren zum Eigenwert ω^2. Für $\omega = 0$ degenerieren die beiden Eigenvektoren jeweils zu null und eins, dafür kommt die Identität als neuer Eigenvektor hinzu. Damit ist also jede reelle Zahl Eigenwert von φ mit einer geometrischen Vielfachheit von mindestens zwei. (Wir werden im nächsten Paragraphen sehen, daß die Vielfachheit immer gleich zwei ist.)

Eigenwertprobleme für lineare Abbildungen, die wie in diesem Beispiel durch Differentialoperatoren gegeben sind, spielen in vielen Anwendungen eine wichtige Rolle; im Hinblick auf solche Anwendungen bezeichnet man die Menge aller Eigenwerte einer linearen Abbildung oder Matrix auch als deren *Spektrum.* Beim (mehrdimensionalen) Differentialoperator, der die Schwingungen des Fells einer Trommel beschreibt, entspricht dieses Spektrum genau den Tönen, die die Trommel produzieren kann.

Uns soll es allerdings zunächst hauptsächlich um Eigenwerte und Eigenvektoren für endlichdimensionale Vektorräume gehen. Hier können wir konkret mit Matrizen rechnen, und wir wollen uns als erstes überlegen, wie man hier die Eigenwerte bestimmen kann.

Nach Definition ist $\lambda \in k$ genau dann Eigenwert der linearen Abbildung $\varphi: V \to V$, wenn es dazu einen Eigenvektor gibt, d.h. einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor $\vec{v}$, so daß $\varphi(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ ist. Wenn wir V als endlichdimensional annehmen, können wir eine endliche Basis finden und die Gleichung $\varphi(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ bezüglich dieser Basis hinschreiben; dies fürht auf ein lineares Gleichungssystem für die Komponenten von $\vec{v}$. Ist A die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der gewählten Basis, haben wir die Gleichung $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ oder $(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$, wobei E wie üblich die Einheitsmatrix bezeichnet.

In letzterer Form ist dies ein homogenes lineares Gleichungssystem für die Komponenten von $\vec{v}$; wie jedes homogene lineare Gleichungssystem hat es den Nullvektor als Lösung, der allerdings nach Definition *nie* ein Eigenvektor ist. Weitere Lösungen gibt es genau dann, wenn die Matrix $A - \lambda E$ des Gleichungssystems singulär ist, wenn also $\det(A - \lambda E)$ verschwindet.

Somit ist $\lambda \in k$ genau dann ein Eigenwert, wenn $\det(A - \lambda E) = 0$ ist; die zugehörigen Eigenvektoren sind die nichttrivialen Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems $(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$.

Damit ist klar, wie man Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen kann: Man löse die Gleichung $\det(A - \lambda E) = 0$ und dann für jede Wurzel λ_i dieser Gleichung das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$. Dieses lineare Gleichungssystem hat *nie* maximalen Rang, da es nach Definition eines Eigenwerts nichttriviale Lösungen geben muß; kommt man also auf ein eindeutig lösbares Gleichungssystem, ist das immer ein Zeichen für einen Rechenfehler.

Dies zeigt auch, daß die numerische Bestimmung von Eigenvektoren ihre Probleme haben kann: Falls man die Wurzeln der charakterischen Gleichung nur näherungsweise kennt, kann die Matrix des linearen Gleichungssystems eine leicht von null verschiedene Determinante haben, so daß es nur die triviale Lösung hat. In der Numerik werden Eigenwerte und Eigenvektoren daher simultan berechnet – sofern man beides braucht. Es gibt auch numerische Algorithmen, die nur die (angenäherten) Eigenwerte bestimmen ohne $\det(A - \lambda E)$ zu berechnen; dies ist vor allem nützlich für große n, wo die Berechnung einer Determinanten sehr aufwendig wäre. Für Genaueres sei auf die Numerikvorlesung verwiesen.

b) Ein erstes Beispiel

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hier ist

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6-\lambda & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6-\lambda & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix},$$

und nach dem Entwicklungssatz ist (bei Entwicklung nach der ersten Zeile)

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & 7 & 8 \\ 7 & 6-\lambda & 5 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &\quad - 2\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 8 & 6-\lambda & 5 \\ 4 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &\quad + 3\begin{vmatrix} 5 & 6-\lambda & 8 \\ 8 & 7 & 5 \\ 4 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 5 & 6-\lambda & 7 \\ 8 & 7 & 6-\lambda \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(-\lambda^3 + 13\lambda^2 + 35\lambda) - 2(5\lambda^2 + 53\lambda) \\ &\quad + 3(-8\lambda^2 + \lambda) - 4(4\lambda^2 - 17\lambda) \\ &= \lambda^4 - 14\lambda^3 - 72\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 14\lambda - 72)\,. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck verschwindet genau dann, wenn entweder λ verschwindet oder der Klammerausdruck ganz hinten. Letzterer ist eine quadratische Gleichung für λ, die man entweder nach der üblichen Formel lösen kann, oder aber man beachtet den Wurzelsatz von VIÈTE, wonach die Summe der beiden Lösungen 14 und ihr Produkt -72 sein muß; da $72 = 4 \times 18$ ist, können die beiden Lösungen daher nur -4 und 18 sein. Die Nullstellen des Polynoms sind also $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -4$ und $\lambda_4 = 18$.

Die Eigenwerte von A sind damit 0, -4 und 18; für jeden dieser Werte müssen wir über ein lineares Gleichungssystem die Eigenvektoren bestimmen.

Beginnen wir mit $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Hier ist das Gleichungssystem einfach

$A\vec{x} = \vec{0}$, d.h.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 0 \\ 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0\,. \end{aligned}$$

Aufgrund der speziellen Struktur der Matrix A ergänzen sich die erste und die vierte Gleichung zu

$$5(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0\,;$$

entsprechend addieren sich die beiden mittleren Gleichungen zu

$$13(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0\,.$$

Da außerdem noch die Differenz zwischen den ersten beiden Gleichungen auf

$$4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0$$

führt, genügt es, außer der ersten Gleichung noch als einzige weitere Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad \text{oder} \quad x_1 = -(x_2 + x_3 + x_4)$$

zu betrachten. Subtrahiert man diese Gleichung von der ersten oder, was dasselbe ist, setzt man sie ein, so bleibt

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0$$

als einzige Relation zwischen x_2, x_3 und x_4. Das gegebene Gleichungssystem ist also äquivalent zu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0\,; \end{aligned}$$

insbesondere hat es also den Rang zwei und damit einen Lösungsraum der Dimension $4 - 2 = 2$.

(Es ist klar, daß der Rang des Gleichungssystems kleiner als vier sein muß, da es nichttriviale Lösungen gibt. Bei der Berechnung von Eigenvektoren über lineare Gleichungssysteme gibt es also immer Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Gleichungen.)

Im noch verbliebenen Gleichungssystem kann beispielsweise x_4 beliebig gewählt werden. Ist $x_4 = 0$, so bleibt noch die Relation $x_2+2x_3 = 0$ übrig, in der etwa x_3 beliebig gewählt werden kann; danach sind $x_2 = -2x_3$ und $x_1 = x_3$ eindeutig festgelegt; die entsprechenden Lösungen sind also die Vielfachen der Lösung $(1, -2, 1, 0)$.

Genausogut könnte etwa $x_3 = 0$ gesetzt werden; dann wäre $x_2 = -3x_4$ und $x_1 = 2x_4$; dies führt auf die Vielfachen der Lösung $(2, -3, 0, 1)$.

Damit haben wir zwei linear unabhängige Lösungen gefunden; da der Lösungsraum zweidimensional ist, sind die sämtlichen Lösungen des Gleichungssystems die Linearkombinationen

$$x_1 = -\lambda - 2\mu, \quad x_2 = 2\lambda - 3\mu, \quad x_3 = \lambda \quad \text{und} \quad x_4 = \mu$$

dieser beiden Lösungen; die beiden Vektoren

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden also eine Basis des Eigenraums von A zum Eigenwert Null.

Genauso lassen sich auch die Eigenwerte -4 und 18 behandeln: -4 führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5x_1 + \ 2x_2 + \ 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + \ 7x_3 + 8x_4 &= 0 \\ 8x_1 + \ 7x_2 + 10x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 4x_1 + \ 3x_2 + \ 2x_3 + 5x_1 &= 0\,, \end{aligned}$$

dessen sämtliche Lösungen die Vielfachen von $(-1, -1, 1, 1)$ sind, und 18 führt auf

$$\begin{aligned} -17x_1 + \ 2x_2 + \ 3x_3 + \ 4x_4 &= 0 \\ 5x_1 - 12x_2 + \ 7x_3 + \ 8x_4 &= 0 \\ 8x_1 + \ 7x_2 - 12x_3 + \ 5x_4 &= 0 \\ 4x_1 + \ 3x_2 + \ 2x_3 - 17x_4 &= 0 \end{aligned}$$

mit den Vielfachen von $(5, 13, 13, 5)$ als Lösungsraum.

Was haben wir nun erreicht? Betrachten wir die lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4; \quad \vec{v} \mapsto A \cdot \vec{v}\,.$$

Für die Vektoren

$$\vec{b}_1 = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \text{und} \ \vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ist

$$\varphi(\vec{b}_1) = 0\,\vec{b}_1, \quad \varphi(\vec{b}_2) = 0\,\vec{b}_2, \quad \varphi(\vec{b}_3) = -4\,\vec{b}_3 \quad \text{und} \quad \varphi(\vec{b}_4) = 18\,\vec{b}_4\,;$$

bezüglich der neuen Basis $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\}$ hat φ daher die Abbildungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix},$$

bei der die Eigenwerte von A in der Hauptdiagonalen stehen und alle sonstigen Einträge verschwinden. Mit dieser Matrix läßt sich sehr viel angenehmer rechnen als mit der ursprünglichen Matrix A; insbesondere kann ihre Exponentialfunktion

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{18} \end{pmatrix}$$

sehr einfach berechnet werden.

Damit läßt sich auch e^A berechnen: Sind nämlich

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die vier Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^4$, so ist

$$\vec{b}_i = B\vec{e}_i \quad \text{mit} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ -2 & -3 & -1 & 13 \\ 1 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

und die Gleichung

$$A\vec{b}_i = \lambda_i \vec{b}_i$$

mit $\lambda_{1/2} = 0, \lambda_3 = -4$ und $\lambda_4 = 18$ wird zu

$$AB\vec{e}_i = \lambda_i B\vec{b}_i \quad \text{oder} \quad B^{-1}AB\,\vec{e}_i = \lambda_i \vec{e}_i\,.$$

Also ist

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

oder

$$A = B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} B^{-1}\,.$$

Für eine beliebige Matrix M ist

$$e^{BMB^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(BMB^{-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} BM^nB^{-1} = Be^MB^{-1}\,,$$

also ist

$$e^A = B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{18} \end{pmatrix} B^{-1}\,,$$

was sich zumindest im Prinzip berechnen läßt – auch wenn das Ergebnis

$$\frac{1}{72} \begin{pmatrix} 27e^{-4}+35+10e^{18} & 10e^{18}-19+9e^{-4} & 10e^{18}-1-9e^{-4} & 10e^{18}+17-27e^{-4} \\ -53+27e^{-4}+26e^{18} & 9e^{-4}+26e^{18}+37 & 26e^{18}-17-9e^{-4} & 26e^{18}+1-27e^{-4} \\ 26e^{18}+1-27e^{-4} & 26e^{18}-17-9e^{-4} & 9e^{-4}+26e^{18}+37 & -53+27e^{-4}+26e^{18} \\ 10e^{18}+17-27e^{-4} & 10e^{18}-1-9e^{-4} & 10e^{18}-19+9e^{-4} & 27e^{-4}+35+10e^{18} \end{pmatrix}$$

alles andere als angenehm ist. Dies zeigt wieder einmal, wieviel man sich ersparen kann, wenn man *vor* Beginn einer Rechnung eine gute Basis *bzw.* ein gutes Koordinatensystem wählt.

c) Das charakteristische Polynom und seine Nullstellen

Es ist kein Zufall, daß im obigen Beispiel die Gleichung $\det(A-\lambda E) = 0$ auf ein Polynom vierten Grades führte: Ist $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix, so hat die Matrix $A - \lambda E$ in der Diagonalen die Einträge $a_{ii} - \lambda$, ansonsten stimmen alle Einträge mit denen von A überein. Berechnet man daher $\det(A - \lambda E)$ gemäß der definierenden Formel, so gibt es genau ein Produkt, in dem n mit λ behaftete Faktoren vorkommen, nämlich das Produkt

$$(a_{11} - \lambda)\cdots(a_{nn} - \lambda) = (-1)^n\lambda^n + \textit{Terme niedrigerer Ordnung}$$

der Diagonaleinträge. Die restlichen Produkte, die zur Determinante aufsummiert werden, enthalten zwischen null und $n-1$ mit λ behaftete Faktoren, die Summe ist also ein Polynom vom Grad n mit höchstem Term $(-1)^n\lambda^n$.

Definition: Das Polynom $\det(A-\lambda E)$ heißt *charakteristisches Polynom* der Matrix A.

Demgemäß sind also die Eigenwerte von A gleich den Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A, und wir sollten uns wenigsten kurz überlegen, wie man die Nullstellen eines solchen Polynoms bestimmen kann.

Zur Bestimmung der Eigenwerte muß man somit die Nullstellen des charakteristischen Polynoms finden. Für ein Polynom vom Grad höchstens zwei (oder aber ein Polynom, das man als Produkt solcher Polynome schreiben kann) ist das nicht schwer: Nullstellen eines linearen Polynoms erhält man durch eine einfache Division, solche eines quadratischen durch quadratische Ergänzung: Da für $a \neq 0$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

ist, hat das linksstehende Polynom die Nullstellen

$$x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a} - c} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,.$$

Bei Polynomen höherer Grade, die man nicht auf einfache Weise über binomische Formeln oder ähnliches in kleinere Faktoren zerlegen kann,

ist es oft einen Versuch wert, einige der Lösungen zu *erraten,* um so den Grad des Polynoms zu reduzieren.

Bei Polynomen mit ganzzahligen (und eventuell auch rationalen) Nullstellen, ist dazu der Wurzelsatz von VIÈTE ein vielversprechender Ansatzpunkt: Angenommen, das Polynom n-ten Grades

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

mit höchstem Koeffizient eins habe die Nullstellen $z_1, \ldots, z_n$. Dann ist

$$f(x) = (x - z_1)(x - z_2) \cdot \cdots \cdot (x - z_n)\,.$$

Dies läßt sich ausmultiplizieren und liefert dann einen Zusammenhang zwischen Nullstellen und Koeffizienten: Beispielsweise ist

$$a_0 = (-1)^n z_1 z_2 \cdots z_n \quad \text{und} \quad a_{n-1} = -(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)\,,$$

und genauso zeigt man auch daß der allgemeine Koeffizient a_i die Summe aller möglicher Produkte aus $n-i$ Nullstellen z_j ist, multipliziert mit $(-1)^{n-i}$. Diese Aussage bezeichnet man als den Wurzelsatz von VIÈTE.

FRANÇOIS VIÈTE (1540–1603) studierte Jura an der Universität Poitiers, danach arbeitete er als Hauslehrer. 1573, ein Jahr nach dem Massaker an den Hugenotten, berief ihn CHARLES IX (obwohl VIÈTE Hugenotte war) in die Regierung der Bretagne; unter HENRI III wurde er geheimer Staatsrat. 1584 wurde er auf Druck der katholischen Liga vom Hofe verbannt und beschäftigte sich fünf Jahre lang mit Mathematik. Unter HENRI IV arbeitete er wieder am Hof und knackte u.a. verschlüsselte Botschaften an den spanischen König PHILIP II. In seinem Buch *In artem analyticam isagoge* rechnete er als erster systematisch mit symbolischen Größen.

Für das Erraten von Nullstellen einfacher Polynome, bei denen man (aus inhaltlichen Gründen oder aber weil so etwas in Übungs- und Klausuraufgaben fast die Regel ist) ganzzahlige Lösungen erwartet, ist vor allem die erstgenannte Beziehung wichtig: In der Form

$$(-1)^n a_0 = z_1 z_2 \cdots z_n$$

gibt sie das Produkt aller Nullstellen. Falls die a_i alle ganzzahlig sind, lohnt es sich also, die Teiler von a_0 zu testen. Ist beispielsweise

$$f(x) = x^4 + 14x^3 - 52x^2 - 14x + 51\,,$$

so ist

$$a_0 = 51 = 3 \cdot 17\,.$$

Da das Produkt aller Nullstellen gleich diesem Wert sein muß, kommen – falls *alle* Nullstellen ganzzahlig sind – für diese nur die Werte $\pm 1, \pm 3$ und ± 17 in Frage. Da das Produkt aller vier Nullstellen gleich 51 ist, gibt es jeweils genau eine Nullstelle vom Betrag 3 *bzw.* 17, sowie zwei Nullstellen vom Betrag eins. Welche Vorzeichen wirklich auftreten, läßt sich durch Einsetzen festellen oder aber auch dadurch, daß nach VIÈTE die *Summe* aller Nullstellen gleich -14 sein muß. Das ist offenbar nur möglich, wenn sowohl +1 als auch -1 Nullstellen sind, sowie -17 und +3. In der Tat zeigt Einsetzen, daß dies auch tatsächlich Nullstellen sind. (Das Einsetzen ist notwendig, da wir nicht sicher sein können, daß wirklich alle Nullstellen ganzzahlig sind.)

In diesem extrem einfachen (und konstrierten) Fall führt also die Primfaktorzerlegung direkt zur Lösung; in komplizierteren Fällen, wenn a_0 mehr Primfaktoren hat, muß man zunächst alle Kombinationsmöglichkeiten, die zum Produkt a_0 führen können, in Betracht ziehen und davon dann durch Einsetzen potentieller Nullstellen alle bis auf die tatsächlichen Nullstellen eliminieren.

Beim Polynom

$$f(x) = x^6 + 27x^5 - 318x^4 - 5400x^3 - 10176x^2 + 27648x + 32768$$

etwa ist $a_0 = 32768 = 2^{15}$; hier wissen wir also nur, daß jede Nullstelle die Form $\pm 2^i$ haben muß, wobei die Summe aller Exponenten gleich 15 sein muß und die Anzahl der negativen Vorzeichen gerade. Einsetzen zeigt, daß

$$-1, \quad 2, \quad -4, \quad -8, \quad 16, \quad -32$$

die Nullstellen sind.

Man beachte, daß diese Vorgehensweise nur funktioniert, wenn das Polynom höchsten Koeffizienten eins hat; andernfalls ist das Produkt

der Nullstellen gleich dem Quotienten aus konstantem Koeffizienten und führendem Koeffizienten mal $(-1)^{\text{Grad}}$.

Falls man nicht sicher sein kann, daß alle Nullstellen ganzzahlig sind, gibt es immer noch eine ganze Reihe von Methoden, um Nullstellen *exakt* zu berechnen: Beispielsweise kennt die Computeralgebra Algorithmen, um ein Polynom (soweit dies möglich ist) in ein Produkt von Polynomen kleineren Grades zu zerlegen mit Koeffizienten aus einem vorgegebenen Körper, der (in einem hier nicht präzisierten) Sinne nicht *zu weit* vom Körper der rationalen Zahlen *bzw.* einem endlichen Körper entfernt ist, und es gibt auch, seit der ersten Hälfte des sechzehnten Jahrhunderts, allgemeine Formeln zur Lösung von Gleichungen dritten und vierten Grades. Diese Formeln spielen wegen ihrer Komplexität und numerischen Instabilität in der Praxis keine sonderlich große Rolle und sollen daher hier nur im Kleindruck behandelt werden:

Für die kubische Gleichung

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

wenden wir zunächst einen ähnlichen Trick an wie die quadratische Ergänzung beim Fall der quadratischen Gleichungen: Durch die Substitution

$$z = x + \frac{b}{3a}$$

wird die Gleichung zu

$$az^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right) z + \frac{2b^3}{27a^2} + d\,,$$

was wir auch kurz als

$$z^3 + pz + q = 0$$

schreiben können. Zur Lösung dieser Gleichung ersetzen wir z durch die Summe

$$z = u + v$$

zweier Variablen und erhalten

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = 0\,.$$

Da die Zerlegung von z in eine Summe äußerst willkürlich ist, können wir hoffen, daß diese Gleichung für die beiden Variablen u und v auch Lösungen hat, wenn wir zusätzliche Bedingungen stellen: Die obige Gleichung für z wird beispielsweise sicherlich dann gelöst, wenn

$$u^3 + v^3 = -q \quad \text{und} \quad 3uv = -p$$

ist. Dann ist

$$u^3 + v^3 = -q \quad \text{und} \quad u^3 \cdot v^3 = -\frac{p^3}{3}\,,$$

wir kennen also Summe und Produkt von u^3 und v^3.

Sind aber Summe und Produkt zweier Zahlen r und s bekannt, so können wir leicht die Zahlen selbst bestimmen: Aus

$$r + s = c \quad \text{und} \quad rs = d$$

folgt, daß

$$r(c-r) = -r^2 + cr = d \quad \text{oder} \quad r^2 - cr + d = 0$$

ist; wir müssen also einfach eine quadratische Gleichung lösen und erhalten

$$r = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - d}\,.$$

Da die Summe dieser beiden Lösungen gleich c ist, muß also die eine gleich r und die andere gleich s sein.

Auf die kubische Gleichung angewandt heißt das, daß u^3 und v^3 die beiden Zahlen

$$-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

sind, also

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad \text{und} \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

oder umgekehrt.

Uns interessiert nur die Summe der beiden Zahlen, also

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}\,.$$

Damit sind wir fast fertig. Das verbleibende Problem ist, daß hier formal eine Lösung steht, wohingegen wir für eine kubische Gleichung *drei* Lösungen erwarten. Dieses Problem verkehrt sich sofort in sein Gegenteil, wenn wir beachten, daß genauso, wie die Quadratwurzel nur bis aufs Vorzeichen bestimmt ist, die Kubikwurzel nur bis dritte Einheitswurzeln bestimmt ist: Da die drei komplexen Zahlen

$$1, \quad \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

alle dritte Potenz eins haben, ist mit jeder Kubikwurzel w einer Zahl y auch w mal einer dieser drei Zahlen Kubikwurzel; es gibt also (für $y \neq 0$) drei verschiedene Kubikwurzeln, und somit hat obige Formel für z gleich *neun* mögliche Interpretationen.

Daraus können wir die drei richtigen herausfiltern, wenn wir beachten, daß wir nicht nur das Produkt von u^3 und v^3 kennen, sondern auch das von u und v, nämlich $-p/3$. Damit

ist der zweite Summand in der Formel für z eindeutig durch den ersten bestimmt, und es gibt nur die zu erwartenden drei Lösungen: Ist

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

irgendeiner der drei möglichen Werte der Wurzel, so ist

$$z = u - \frac{p}{3u}$$

eine Lösung der Gleichung $z^3 + pz + q = 0$ und

$$x = z - \frac{b}{3a}$$

eine Lösung der ursprünglichen Gleichung $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Auch biquadratische Gleichungen lassen sich auflösen: Hier eliminiert man den kubischen Term von

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

durch die Substitution

$$z = x + \frac{b}{4a} \; ;$$

dies führt auf eine Gleichung der Form

$$z^4 + pz^2 + qz + r = 0 \, .$$

Für eine beliebige Zahl y folgt daraus für jede Nullstelle z dieser Gleichung die Beziehung

$$(z^2 + y)^2 = z^4 + 2yz^2 + y^2 = (2y - p)z^2 - qz + y^2 - r \, .$$

Falls rechts das Quadrat eines linearen Polynoms $sz + t$ steht, ist

$$(z^2 + y)^2 = (sz + t)^2 \Longrightarrow z = \pm\sqrt{-y \pm (sz + t)} \, ,$$

wir können die Gleichung also auflösen.

Nun wird die rechte Seite

$$(2y - p)z^2 - qz + y^2 - r$$

im allgemeinen kein Quadrat eines linearen Polynoms in z sein, wir können aber hoffen, daß es zumindest für gewisse spezielle Werte der bislang noch willkürlichen Konstante y eines ist.

Ein quadratisches Polynom

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma$$

ist genau dann Quadrat eines linearen, wenn die beiden Nullstellen der quadratischen Gleichung

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$$

übereinstimmen. Nach der obigen Lösungsformel für quadratische Gleichungen ist dies genau dann der Fall, wenn dort der Ausdruck unter der Wurzel verschwindet, d.h. wenn

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$$

ist. In unserem Fall muß also

$$q^2 - 4(2y - p)(y^2 - r) = -8y^3 + 4py^2 + 8ry + q^2 - 4pr$$

verschwinden. Dies ist eine kubische Gleichung für y; indem wir diese Gleichung lösen und eine der Lösungen für y einsetzen, erhalten wir die vier Lösungen der biquadratischen Gleichung.

Die erste Lösung einer kubischen Gleichung geht wohl aus SCIPIONE DEL FERRO (1465–1526) zurück, der von 1496 bis zu seinem Tod an der Universität Bologna lehrte. 1515 fand er eine Methode, um die Nullstellen von $x^3 + px = q$ für *positive* Werte von p und q zu bestimmen (Negative Zahlen waren damals in Europa noch nicht im Gebrauch). Er veröffentlichte diese jedoch nie, so daß NICCOLO FONTANA (1499–1557, oberes Bild), genannt TARTAGLIA (der Stotterer), dieselbe Methode 1535 noch einmal entdeckte und gleichzeitig auch noch eine Modifikation, um einen leicht verschiedenen Typ kubischer Gleichungen zu lösen. TARTAGLIA war mathematischer Autodidakt, war aber schnell als Fachmann anerkannt und konnte seinen Lebensunterhalt als Mathematiklehrer in Verona und Venedig verdienen.

Die Lösung allgemeiner kubischer Gleichungen geht auf den Mathematiker, Arzt und Naturforscher GIROLAMO CARDANO (1501–1576, unteres Bild) zurück, dem TARTAGLIA nach langem Drängen und unter dem Siegel der Verschwiegenheit seine Methode mitgeteilt hatte. LODOVICO FERRARI (1522–1565) kam 14-jährig als Diener zu CARDANO; als dieser merkte, daß FERRARI schreiben konnte, machte er ihn zu seinem Sekretär. 1540 fand er die Lösungsmethode für biquadratische Gleichungen; 1545 veröffentlichte CARDANO in seinem Buch *Ars magna* die Lösungsmethodem für kubische und biquadratische Gleichungen.

Nach der erfolgreichen Auflösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen in der ersten Hälfte des sechzehnten Jahrhunderts beschäftigten sich natürlich viele Mathematiker mit dem nächsten Fall, der Gleichung fünften Grades. Hier gab es jedoch über 250 Jahre lang keinerlei Fortschritt, bis zu Beginn des neunzehnten Jahrhunderts ABEL glaubte, eine Lösung gefunden zu haben. Er entdeckte dann aber recht schnell seinen Fehler und

bewies stattdessen 1824, daß es *unmöglich* ist, die Lösungen einer allgemeinen Gleichung fünften (oder höheren) Grades durch Grundrechenarten und Wurzeln auszudrücken.

Die Grundidee seines Beweises liegt in der Betrachtung von Symmetrien innerhalb der Lösungsmenge, ähnlich wie wir in einem späteren Abschnitt einige Differentialgleichungen durch Symmetriebetrachtungen lösen werden. Unmöglichkeitsbeweise sind allerdings deutlich aufwendiger als Lösungsversuche mit Hilfe von Symmetriebetrachtungen; daher kann über Einzelheiten des ABELschen Beweises hier nichts weiter gesagt werden. Interessenten finden ihn in fast jedem Algebralehrbuch im Kapitel über GALOIS-Theorie.

Der norwegische Mathematiker NILS HENRIK ABEL (1802–1829) ist trotz seinen frühen Todes (an Tuberkulose) Initiator vieler Entwicklungen der Mathematik des neunzehnten Jahrhunderts; Begriffe wie abelsche Gruppen, abelsche Integrale, abelsche Funktionen, abelsche Varietäten, die auch in der heutigen Mathematik noch allgegenwärtig sind, verdeutlichen seinen Einfluß. Im August 2001 kündigte der norwegische Ministerpräsident zu seinen Ehren die Stiftung eines ABEL-Preises für Mathematik an, der ab 2003 in ähnlicher Ausstattung und ähnlicher Weise wie die Nobelpreise verliehen werden soll.

Der ABELsche Satz besagt selbstverständlich nicht, daß Gleichungen höheren als vierten Grades *unlösbar* seien; er sagt nur, daß es *im allgemeinen* nicht möglich ist, die Lösungen durch Wurzelausdrücke in den Koeffizienten darzustellen: Für eine allgemeine Lösungsformel muß man also außer Wurzeln und Grundrechenarten noch weitere Funktionen zulassen. Beispielsweise fanden sowohl HERMITE als auch KRONECKER 1858 Lösungsformeln für Gleichungen fünften Grades mit sogenannten elliptischen Modulfunktionen; 1870 löste JORDAN damit Gleichungen beliebigen Grades.

Für die Berechnung von Eigenvektoren sind schon die Lösungen einer kubischen Gleichung nach CARDANOs Formel im allgemeinen zu kompliziert, als daß man ohne Computer damit rechnen könnte; dasselbe gilt erst für höhere Grade. Bei großen Matrizen muß man sich daher oft auf die näherungsweise Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren beschränken, wobei allerdings beides *simultan* geschehen muß: Bestimmt man die Nullstellen des charakteristischen Polynoms nur numerisch, so wird die Matrix $A-\lambda E$ für eine nur angenäherte Nullstelle λ im allgemeinen invertierbar sein, das Gleichungssystem für die Eigenvektoren hat also keine nichttriviale Lösung. Die Mathematik kennt eine ganze Reihe von Verfahren zur simultanten Berechnung; Interessenten seien auf Vorlesungen und Lehrbücher zur Numerik verwiesen.

d) Vielfachheiten von Eigenwerten

Ist x eine Nullstelle eines Polynoms $f(X)$, so kann $f(X)$ bekanntlich durch $(X-x)$ geteilt werden, und x heißt *r-fache Nullstelle* von $f(X)$, wenn $f(X)$ durch $(X-x)^r$ teilbar ist, nicht aber durch $(X-x)^{r+1}$.

Definition: Wir sagen, der Eigenwert λ von φ *bzw.* A habe die *algebraische Vielfachheit* r, wenn λ eine r-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

Im obigen Beispiel hatte also der Eigenwert Null die algebraische Vielfachheit zwei, die anderen beiden hatten algebraische Vielfachheit eins. Die Dimension des jeweiligen Eigenraums, die geometrische Vielfachheit also, war genauso groß, jedoch muß dies im allgemeinen nicht der Fall sein: Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

etwa hat das charakteristische Polynom

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

die doppelte Nullstelle eins, $\lambda = 1$ ist also ein Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit zwei. Der zugehörige Eigenraum ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$0x_1 + 1x_2 = 0$$
$$0x_1 + 0x_2 = 0\,,$$

also gerade die Menge aller Vektoren der Form $\binom{x}{0}$ und somit eindimensional. Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts eins ist daher nur eins.

Das Beispiel der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\cos\vartheta - y\sin\vartheta \\ y\cos\vartheta + x\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

mit Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

zeigt, daß es überhaupt keine Eigenwerte geben muß, denn hier ist das charakteristische Polynom gleich

$$\begin{vmatrix} \cos\vartheta - \lambda & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta - \lambda \end{vmatrix} = (\cos\vartheta - \lambda)^2 + \sin^2\vartheta \,.$$

Abgesehen vom Fall $\sin\vartheta = 0$, wenn A gleich der positiven oder negativen Einheitsmatrix ist, hat dieses Polynom keine reelle Nullstelle, da es nur positive Werte annimmt. Es hat aber natürlich die beiden komplexen Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = \cos\vartheta \pm i \sin\vartheta = e^{\pm i\vartheta} \,;$$

fassen wir φ als Abbildung von $\mathbb{C}^2$ nach $\mathbb{C}^2$ auf, gibt es also zwei Eigenwerte. Beide haben die algebraische und geometrische Vielfachheit eins; zugehörige Eigenvektoren sind etwa $\binom{1}{i}$ und $\binom{1}{-i}$. Wählen wir diese beiden Vektoren als Basis, so wird die Abbildungsmatrix von φ bezüglich dieser neuen Basis zur Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} e^{i\vartheta} & 0 \\ 0 & e^{-i\vartheta} \end{pmatrix} .$$

Allgemein gilt für die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten von Eigenvektoren

Satz: *a)* Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts ist stets kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit.
b) Die Summe der algebraischen Vielfachheiten der verschiedenen Eigenwerte einer linearen Abbildung ist kleiner oder gleich der Dimension des Vektorraums.

Beweis: a) Der Eigenwert λ der $n \times n$-Matrix A habe die geometrische Vielfachheit r, d.h. der zugehörige Eigenraum habe die Dimension r. Wir wählen eine Basis $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r$ dieses Eigenraums und ergänzen sie zu einer Basis des gesamten Vektorraums; bezüglich dieser Basis sei C die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung

$$\varphi\colon \begin{cases} k^n \to k^n \\ \vec{v} \mapsto A\vec{v} \end{cases} .$$

Da $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r$ Eigenvektoren zum Eigenwert λ sind, ist $\varphi(\vec{b}_i) = \lambda\vec{b}_i$. In den ersten r Spalten von C steht also jeweils in der Diagonalen das Element λ und ansonsten überall die Null. A hat somit die Form

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \mathsf{M} & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & & & \end{pmatrix} ,$$

wobei uns weder die mit $*$ bezeichneten Körperelemente noch die $(n-r) \times (n-r)$-Matrix M weiter zu interessieren brauchen.

Für $C - xE$ gilt dasselbe, nur daß jetzt $\lambda - x$ in der Diagonalen steht, d.h. diese Matrix hat die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda - x & 0 & \ldots & 0 & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda - x & \ldots & 0 & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda - x & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \mathsf{M} - \mathsf{x}\mathsf{E}_{n-r} & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & & & \end{pmatrix} ,$$

wobei E_{n-r} die $(n-r) \times (n-r)$-Einheitsmatrix bezeichnet.

Zur Berechnung ihrer Determinanten verwenden wir den LAPLACEschen Entwicklungssatz: Da in der ersten Zeile (oder Spalte) nur an der ersten Stelle ein von Null verschiedener Eintrag steht, ist diese Determinante gleich $(\lambda - x)$ mal der Determinante jener Matrix, die durch Streichen der ersten Zeile und Spalte entsteht. Falls $r > 1$ ist, hat diese neue Matrix dieselbe Form, wir können den LAPLACEschen Entwicklungssatz also noch einmal anwenden *usw.;* wir erhalten schließlich

$$\det(C - xE) = (\lambda - x)^r \det(M - xE_{n-r}) \,.$$

Somit ist $\det(C - xE)$ durch $(x - \lambda)^r$ teilbar.

Was uns wirklich interessiert, ist aber nicht $\det(C - xE)$, sondern $\det(A - xE)$. Ist B die Matrix des Basiswechsels von der Standardbasis des k^n auf die Basis $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$, jene Matrix also, deren Spaltenvektoren die $\vec{b}_i$ sind, so ist $C = B^{-1}AB$ und

$$\begin{aligned}\det(C - xE) &= \det(B^{-1}AB - xE) = \det(B^{-1}AB - xB^{-1}EB)\\ &= \det\left(B(A - xE)B^{-1}\right) = \det B \det(A - xE)(\det B)^{-1}\\ &= \det(A - xE)\,.\end{aligned}$$

A und C haben also dasselbe charakteristische Polynom, und somit ist auch das charakteristische Polynom von A durch $(x - \lambda)^r$ teilbar. Die algebraische Vielfachheit von λ ist daher mindestens r.

Unabhängig von diesem Ergebnis wollen wir noch festhalten, daß nach der gerade durchgeführten Rechnung für eine beliebige Matrix A und eine invertierbare Matrix B die beiden Matrizen A und BAB^{-1} dasselbe charakteristische Polynom haben; insbesondere haben also die Abbildungsmatrizen einer linearen Abbildung zu verschiedenen Basen dasselbe charakteristische Polynom.

b) Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ die verschiedenen Eigenwerte von φ und sind $r_1, \ldots, r_\ell$ ihre algebraischen Vielfachheiten, so ist das charakteristische Polynom $\det(A - xE)$ teilbar durch

$$(x - \lambda_1)^{r_1} \cdots (x - \lambda_\ell)^{r_\ell}\,.$$

Dies ist ein Polynom vom Grad $r_1 + \cdots + r_\ell$, wohingegen das charakteristische Polynom Grad n hat; daher ist

$$r_1 + \cdots + r_\ell \leq n\,,$$

denn der Grad eines Teilers kann nicht größer sein als der des Polynoms selbst.

■

Zum Abschluß dieses Abschnitts sei noch ein Kriterium angegeben, wann es für eine lineare Abbildung φ eine Basis aus Eigenwerten gibt, wann also die Abbildungsmatrix bezüglich einer geeigneten Basis Diagonalgestalt hat:

Satz: Zur linearen Abbildung $\varphi: V \to V$ eines n-dimensionalen Vektorraums gibt es genau dann eine Basis aus Eigenvektoren von φ, wenn

1.) das charakteristische Polynom von φ als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden kann

2.) die geometrische Vielfachheit eines jeden Eigenwerts gleich der algebraischen ist.

Beweis: Zunächst sei $\varphi: V \to V$ eine lineare Abbildung derart, daß V eine Basis $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ aus Eigenvektoren von φ habe. Wir müssen zeigen, daß *1.)* und *2.)* erfüllt sind.

Da die Basisvektoren $\vec{b}_i$ Eigenvektoren sind, gibt es zu jedem $\vec{b}_i$ ein Körperelement λ_i, so daß $\varphi(\vec{b}_i) = \lambda\vec{b}_i$ ist; bezüglich dieser Basis hat die Abbildungsmatrix A von φ daher Diagonalgestalt, und das charakteristische Polynom

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n - \lambda \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda)$$

zerfällt in der Tat in Linearfaktoren. Die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ_i ist gleich der Anzahl jeder Indizes $j \in \{1, \ldots, n\}$, für die $\lambda_j = \lambda_i$ ist; dies ist auch die geometrische Vielfachheit, denn der Eigenraum wird aufgespannt von den Vektoren $\vec{b}_j$ zu diesen j. Also sind *1)* und *2)* erfüllt.

Umgekehrt erfülle die Abbildung φ die Bedingungen *1)* und *2);* wir müssen zeigen, daß es eine Basis aus Eigenvektoren von φ gibt.

Wegen *1)* läßt sich das charakteristische Polynom in der Form

$$(\lambda_1 - \lambda)^{r_1} \cdot \cdots \cdot (\lambda_s - \lambda)^{r_s}$$

schreiben, wobei wir annehmen können, daß die λ_i paarweise verschieden sind. Dann ist r_i die algebraische Vielfachheit von λ_i. Da das charakteristische Polynom den Grad n hat, folgt, daß

$$r_1 + \cdots + r_s = n$$

ist. Außerdem gibt es wegen *2.)* zu jedem λ_i einen r_i-dimensionalen Eigenraum, also r_i linear unabhängige Eigenvektoren. Da Eigenvektoren

zu verschiedenen Eigenwerten nach dem Lemma vom Anfang dieses Abschnitts stets linear unabhängig sind, ist auch das System all dieser Eigenvektoren linear unabhängig und somit eine Basis, denn es besteht aus $n = \dim V$ Vektoren. Damit ist eine Basis aus Eigenvektoren von φ gefunden.

■

e) Eigenwerte symmetrischer und Hermitescher Matrizen

Wie wir im letzten Paragraphen gesehen haben, kann die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts kleiner sein als die algebraische, und im Falle einer reellen Matrix müssen nicht auch die Eigenwerte reell sein. In diesem Abschnitt wollen wir sehen, daß solche Dinge bei symmetrischen (und auch den noch zu definierenden HERMITEschen) Matrizen nicht möglich sind.

Symmetrische und HERMITEsche Matrizen hängen eng mit (HERMITEschen) Skalarprodukten zusammen: Für zwei Vektoren

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{b}_i \quad \text{und} \quad \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} w_i \vec{b}_i$$

aus einem endlichdimensionalen EUKLIDischen Vektorraum V mit Basis $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ ist wegen der Linearität des Skalarprodukts in beiden Argumenten

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \vec{b}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \vec{b}_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i w_j \, \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j \, .$$

Setzen wir

$$c_{ij} \underset{\text{def}}{=} \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j \, ,$$

so ist wegen der Symmetrie des Skalarprodukts $c_{ij} = c_{ji}$, wir haben also eine symmetrische $n \times n$-Matrix C.

Die Matrix C legt das Skalarprodukt eindeutig fest, denn für zwei beliebige Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ wie oben ist

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i w_j \cdot c_{ij} \, .$$

Diese Formel definiert umgekehrt auch für jede symmetrische Matrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine bilineare Abbildung $V \times V \to \mathbb{R}$, allerdings muß diese nicht positiv definit und damit kein Skalarprodukt sein.

Ist V ein HERMITEscher Vektorraum, wieder mit Basis $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$, so ist jetzt für zwei Vektoren

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{b}_i \quad \text{und} \quad \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} w_i \vec{b}_i \quad \text{mit} \quad v_i, w_i \in \mathbb{C}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \vec{b}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \vec{b}_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i \overline{w}_j \, \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j \, .$$

Setzen wir auch hier wieder

$$c_{ij} \underset{\text{def}}{=} \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j \, ,$$

so ist nun $c_{ij} = \overline{c_{ji}}$. Matrizen mit dieser Eigenschaft wollen wir als HERMITEsch bezeichnen.

Um dies etwas kompakter ausdrücken zu können, definieren wir

Definition: *a)* Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ bezeichnen wir die Matrix $\overline{A} = \left(\overline{a_{ij}}\right)$ als die zu A *konjugiert komplexe Matrix.*
b) $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt HERMITEsch, falls ${}^t A = \overline{A}$ ist.
c) Zu einem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ heißt $\overline{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \overline{v_1} \\ \vdots \\ \overline{v_n} \end{pmatrix}$ der *konjugiert komplexe* Vektor.

(Letztere Schreibweise sieht zwar grausam aus, vor allem wann man sie mit der sehr viel schöneren Alternative $\overline{\mathfrak{v}}$ vergleicht; sie läßt sich aber nicht vermeiden, wenn man Vektoren mit Pfeilen kennzeichnet.)

Schließlich wollen wir Vektoren hier mit $1 \times n$-Matrizen identifizieren; insbesondere rechnen wir mit dem „transponierten Vektor“

$${}^t\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \, .$$

Mit dieser Bezeichnung kann das Standardskalarprodukt zweier Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ als Matrixprodukt ${}^t\vec{v}\vec{w}$ geschrieben werden; das Standard-HERMITEsche Produkt in $\mathbb{C}^n$ ist entsprechend ${}^t\vec{v}\,\overline{\vec{w}}$.

Da die komplexe Konjugation auf $\mathbb{R}$ keine Wirkung hat, ist eine HERMITEsche Matrix mit reellen Einträgen einfach eine symmetrische Matrix; wir können uns im folgenden bei den Beweisen daher auf HERMITEsche Matrizen beschränken und erhalten trotzdem Ergebnisse, die auch für reelle symmetrische Matrizen gelten.

Das Hauptziel dieses Abschnitts ist

Satz: A sei eine symmetrische reelle oder HERMITEsche (komplexe) Matrix.
a) Dann sind alle Eigenwerte von A reell.
b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal bezüglich des Standard- *bzw.* HERMITEschen Skalarprodukts.
c) Für jeden Eigenwert von A ist die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen Vielfachheit.
d) $\mathbb{R}^n$ *bzw.* $\mathbb{C}^n$ hat eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A.

Beweis: a) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, so gibt es nach Definition einen Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$, so daß $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ ist. Da die komplexe Konjugation mit sämtlichen Grundrechenarten vertauschbar ist, folgt, daß

$$\overline{A}\,\overline{\vec{v}} = \overline{\lambda}\,\overline{\vec{v}}\,,$$

d.h.

$${}^t\vec{v}\overline{A}\,\overline{\vec{v}} = \overline{\lambda}\,{}^t\vec{v}\overline{\vec{v}}\,.$$

Andererseits ist ${}^t(A\vec{v}) = {}^t\vec{v}\,{}^tA$, und da A als HERMITEsch vorausgesetzt wird, ist ${}^tA = \overline{A}$. Also ist ${}^t\vec{v}\,\overline{A} = \lambda\,{}^t\vec{v}$,

$${}^t\vec{v}\,\overline{A}\,\overline{\vec{v}} = \lambda\,{}^t\vec{v}\overline{\vec{v}} \quad \text{und} \quad \lambda\,{}^t\vec{v}\overline{\vec{v}} = \overline{\lambda}\,{}^t\vec{v}\overline{\vec{v}}\,.$$

Da ${}^t\vec{v}\overline{\vec{v}}$ für einen Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ nicht verschwindet, müssen λ und $\overline{\lambda}$ übereinstimmen, d.h. λ ist reell.

b) $\vec{v}$ sei Eigenvektor zum Eigenwert λ, und $\vec{w}$ sei Eigenvektor zum davon verschiedenen Eigenwert μ, d.h.

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \text{und} \quad A\vec{w} = \mu\vec{w}\,.$$

Dann ist

$$\lambda\,{}^t\vec{v}\overline{\vec{w}} = {}^t(\lambda\vec{v})\overline{\vec{w}} = {}^t(A\vec{v})\overline{\vec{w}} = {}^t\vec{v}\,{}^tA\overline{\vec{w}} = {}^t\vec{v}\overline{A}\,\overline{\vec{w}} = {}^t\vec{v}\overline{A\vec{w}} = {}^t\vec{v}\overline{\mu\vec{w}} = \overline{\mu}\,{}^t\vec{v}\overline{\vec{w}}\,.$$

Da wir schon wissen, daß alle Eigenwerte reell sind, ist $\overline{\mu} = \mu \neq \lambda$. Die obige Gleichungskette kann daher nur richtig sein, wenn ${}^t\vec{v}\overline{\vec{w}}$ verschwindet, d.h. wenn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ orthogonal sind.

Beim Beweis von *c)* gehen wir im wesentlichen genauso vor wie im vorigen Abschnitt, als wir zeigten, daß die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts stets kleiner oder gleich der algebraischen ist; die zusätzliche Annahme über die Matrix A wird zeigen, daß hier die beiden Vielfachheiten sogar gleich sind.

λ sei also ein Eigenwert von A mit geometrischer Vielfachheit r, d.h. der zugehörige Eigenraum habe die Dimension r. Wir wählen eine Basis $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r\}$ und ergänzen diese zu einer Basis $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ des gesamten Vektorraums $V = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$. Da wir es hier nur mit diesen beiden speziellen Vektorräumen zu tun haben, können wir, indem wir nötigenfalls das GRAM-SCHMIDTsche Orthogonalisierungsverfahren anwenden und anschließend die Längen aller Vektoren auf eins normieren, annehmen, daß es sich dabei um eine Orthonormalbasis handelt.

Nun betrachten wir die lineare Abbildung

$$\varphi\colon V \to V; \quad \vec{v} \mapsto A\vec{v}\,.$$

Bezüglich der Standardbasis hat sie A als Abbildungsmatrix; für uns interessanter ist aber die Abbildungsmatrix C bezüglich der neuen Basis $\mathcal{B}$. Dazu sei B die Matrix mit Spaltenvektoren $\vec{b}_i$; da der Eintrag an der Stelle (i,j) eines Matrixprodukts das (Standard-)Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors des ersten Faktors mit dem j-ten Spaltenvektor des zweiten Faktors ist, steht an der Stelle (i,j) der Matrix ${}^tB\overline{B}$ das (Standard) HERMITEsche Produkt der Vektoren $\vec{b}_i$ und $\vec{b}_j$. Da $\mathcal{B}$ als Orthonormalbasis gewählt wurde, ist daher

$${}^tB\overline{B} = E \quad \text{und damit} \quad {}^tB = \overline{B}^{-1} = \overline{B^{-1}}\,.$$

Aus dieser Formel folgt, daß mit A auch C eine HERMITEsche Matrix ist, denn

$${}^tC = {}^t(B^{-1}AB) = {}^tB\,{}^tA\,{}^tB^{-1} = \overline{B^{-1}}\,\overline{A}\,\overline{B} = \overline{B^{-1}AB} = \overline{C}\,.$$

Die ersten r Basisvektoren $\vec{b}_i$ sind Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ; für $i \leq r$ ist daher $\varphi(\vec{b}_i) = \lambda\vec{b}_i$, d.h. in der i-ten Spalte von C

steht an der i-ten Stelle die reelle Zahl λ und ansonsten überall die Null, genau wie auch im vorigen Abschnitt. Im Gegensatz zu dort haben wir nun aber eine HERMITEsche Matrix; da in der i-ten Spalte abgesehen von λ auf der Hauptdiagonalen nur Nullen stehen, muß daher dasselbe auch für die i-te Zeile gelten; die Matrix C hat also die Form

$$C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \mathsf{M} & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & & \end{pmatrix},$$

wobei M eine $(n-r) \times (n-r)$-Matrix ist, die uns nicht weiter zu interessieren braucht. Damit hat $C - xE$ die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda - x & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda - x & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \mathsf{M} - \mathsf{x}\mathsf{E}_{n-r} & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & & \end{pmatrix},$$

wobei E_{n-r} die $(n-r) \times (n-r)$-Einheitsmatrix bezeichnet.

Wie wir uns schon im vorigen Abschnitt überlegten beim Beweis, daß die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts immer kleiner oder gleich der algebraischen ist, haben A und C dasselbe charakterische Polynom; da wir die Matrix C besser kennen, rechnen wir mit ihr.

Wie in Abschnitt *d)* folgt auf Grund der obigen Form der Matrix $C - xE$ aus dem LAPLACEschen Entwicklungssatz, daß

$$\det(A - xE) = \det(C - xE) = (\lambda - x)^r \det(M - xE_{n-r})$$

ist, wobei E_{n-r} die $(n-r) \times (n-r)$-Einheitsmatrix bezeichnet. Wir müssen zeigen, daß die algebraische Vielfachheit von λ *genau* gleich r ist, daß also λ keine Nullstelle von $\det(M - xE_{n-r})$ sein kann.

Wäre λ Nullstelle von $\det(M - xE_{n-r})$, so hätte M den Eigenwert λ, es gäbe also einen $(n-r)$-dimensionalen Eigenvektor $\vec{w}$ von M. Wegen der speziellen Form der Matrix C ist für jeden Eigenvektor

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_{r-1} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \quad \text{von } M \text{ der Vektor} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_{r-1} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von C und damit von A – Eigenvektoren hängen schließlich nur von der linearen Abbildung ab, nicht von einer speziellen Abbildungsmatrix. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, daß der Eigenraum zum Eigenwert λ von $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r$ erzeugt wird, denn $\vec{v}$ ist linear unabhängig von diesen $\vec{b}_i$.

Also hat λ die algebraische Vielfachheit r, und *c)* ist gezeigt.

d) ist nun eine einfache Folgerung aus den übrigen Aussagen – wenn wir voraussetzen, daß jedes Polynom über den komplexen Zahlen in Linearfaktoren zerfällt; das ist der sogenannte *Fundamentalsatz der Algebra.*

Wir wissen dann, daß die Summe der algebraischen Vielfachheiten aller Eigenwerte gleich der Dimension n des Vektorraums ist und daß alle Eigenwerte reell sind; da die algebraischen gleich den geometrischen Vielfachheiten sind, gibt es also n Eigenvektoren, die eine Basis von V bilden.

Für jeden einzelnen Eigenraum können wir die Eigenvektoren nach GRAM-SCHMIDT so wählen, daß sie eine Orthonormalbasis bilden; da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stets orthogonal sind, ist die Vereinigungsmenge dieser Basen Orthonormalbasis von V. ∎

f) Hauptvektoren und und die Jordan-Zerlegung

Falls die lineare Abbildung $\varphi: V \to V$ Eigenwerte hat, deren geometrische Vielfachheit kleiner als die algebraische ist, haben wir keine Chance auf eine Basis, bezüglich derer die Abbildungsmatrix von φ Diagonalgestalt hat: Die Elemente einer solchen Basis wären allesamt Eigenvektoren, und bei zu kleiner geometrischer Vielfachheit gibt es nicht genügend linear unabhängige Eigenvektoren. Außerdem gibt es offensichtlich keine Chance auf eine Diagonalgestalt, wenn das charakteristische Polynom von φ nicht in Linearfaktoren zerfällt, denn dann ist schon die Summe der *algebraischen* Vielfachheiten der Eigenwerte kleiner als die Dimension von V.

Das zweite dieser Probleme konnten wir zumindest beim Beispiel der Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

dadurch lösen, daß wir zu einem größeren Körper übergegangen sind, nämlich von den reellen zu den komplexen Zahlen.

Tatsächlich läßt es sich *immer* dadurch lösen, daß man zu einem größeren Körper übergeht: Nach dem zuerst von GAUSS bewiesenen *Fundamentalsatz der Algebra* zerfällt jedes Polynom mit komplexen (also insbeondere auch mit reellen) Koeffizienten über dem Körper der komplexen Zahlen in Linearfaktoren. Trotz seines Namens kann dieser Satz nicht rein algebraisch bewiesen werden; ein Beweis, der möglichst weitgehend mit Sätzen aus dieser Vorlesung auskommt, könnte beispielsweise die Integralsätze aus Kaptitel II in Sätze der komplexen Analysis übersetzen und den Satz dann relativ schnell daraus herleiten. Da der Gesamtaufwand allerdings bei ein bis zwei Vorlesungen läge, sei auf Einzelheiten verzichtet.

Für andere Körper als die reellen oder komplexen Zahlen zeigt die Algebra, daß es zu jedem Polynom über einem Körper stets einen Erweiterungskörper gibt, der als Vektorraum über dem Ausgangskörper endliche Dimension hat, so daß das gegebene Polynom dort in Linearfaktoren zerfällt. Mit Methoden, die im allgemeinen nicht konstruktiv sind, folgt sogar, daß es stets einen (im allgemeinen unendlichdimensionalen)

Erweiterungskörper gibt, über dem *jedes* Polynom in Linearfaktoren zerfällt, den sogenannte *algebraischen Abschluß* des Ausgangskörpers. Einzelheiten findet man in jedem Lehrbuch der Algebra.

Somit können wir das Problem, daß das charakteristische Polynom eventuell nicht genügend viele Nullstellen hat, im wesentlichen ignorieren. Ernster ist das Problem mit Eigenwerten, deren geometrische Vielfachheit kleiner ist als die algebraische. Damit wollen wir uns in diesem Abschnitt beschäftigen.

Die Lösung wird darin bestehen, daß wir solchen Eigenwerten Räume zuordnen, die größer sind als die Eigenräume, aber immer noch eine gut an die Abbildung angepaßte Basis haben. Insbesondere sollen sie, genau wie die Eigenräume, *invariant* sein unter der betrachteten Abbildung:

Definition: $\varphi: V \to V$ sei eine lineare Abbildung. Ein Untervektorraum $U \leq V$ heißt invariant unter φ oder kurz φ-invariant, wenn $\varphi(U) \leq U$ ist.

Die φ-Invarianz der Eigenräume im Sinne dieser Definition ist klar, denn auf einem Eigenraum ist φ einfach die Multiplikation mit dem zugehörigen Eigenwert.

Für das folgende wollen wir der Einfachheit halber annehmen, daß V endliche Dimension habe. Dann ist erst recht jeder φ-invariante Unterraum U endlichdimensional, wir können also eine endliche Basis $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r\}$ von U finden und diese ergänzen zu einer Basis $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ von V. Da $\varphi(U) \leq U$ ist, liegen die Bilder der ersten r Basisvektoren wieder in U, d.h. die Abbildungsmatrix bezüglich dieser Basis hat die Form

$$\begin{pmatrix} \boxed{A} & \boxed{C} \\ \mathbf{0} & \boxed{B} \end{pmatrix}$$

mit einer $r \times r$-Matrix A, der Abbildungsmatrix von $\varphi_{|U}: U \to U$, einer $(n-r) \times (n-r)$-Matrix B und einer $(n-r) \times r$-Matrix C. Die fette Null soll hier, wie auch in den noch folgenden Matrizen, stets eine Nullmatrix der jeweils korrekten Größe bezeichnen.

Noch besser wird die Situation, wenn U ein φ-invariantes Komplement hat, wenn es also einen weiteren φ-invarianten Untervektorraum W gibt, so daß $V = U + W$ ist und $U \cap W = \{\vec{0}\}$. (Wir sagen dann, $V = U \oplus W$ sei die *direkte Summe* von U und W.) In diesem Fall können wir für $\vec{b}_{r+1}$ bis $\vec{b}_n$ die Vektoren einer Basis von W nehmen, und da nun auch W auf sich selbst abgebildet wird, haben wir eine Abbildungsmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} \boxed{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{B} \end{pmatrix}.$$

Allgemein sagen wir für s Untervektorräume $U_1, \ldots, U_s$ von V, daß V die direkte Summe

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s = \bigoplus_{i=1}^{s} U_i$$

sei, wenn

$$V = U_1 + \cdots + U_s = \sum_{i=1}^{s} U_i \quad \text{und} \quad U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = \{\vec{0}\}$$

ist. Falls hierbei die U_i allesamt φ-invariant sind, können wir ihre Basen aneinandersetzen und erhalten eine Basis, bezüglich derer die Abbildungsmatrix die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{A_2} & \ldots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \boxed{A_s} \end{pmatrix}$$

hat, wobei die A_i die Abbildungsmatrizen der Einschränkungen $\varphi_{|U_i}$ zu Abbildungen von U_i nach U_i sind.

Kandidaten für Untervektorräume U_i liefern die Haupträume:

Definition: *a)* Ein Vektor $\vec{v} \in V$ heißt *Hauptvektor* von φ zum Eigenwert λ, wenn es ein $\ell \in \mathbb{N}_0$ gibt, so daß $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{\ell}(\vec{v}) = \vec{0}$ ist. Falls $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{\ell-1} \neq \vec{0}$ ist, bezeichnen wir ℓ als die *Stufe* des Hauptvektors.

b) Die Menge aller Hauptvektoren von φ zum Eigenwert λ heißt *Hauptraum* zu λ und wird mit H_λ bezeichnet.

Insbesondere sind die Hauptvektoren der Stufe eins genau die Eigenvektoren zum Eigenwert λ: Der Nullvektor ist nämlich kein Hauptvektor erster Stufe, da er bereits von $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^0 = \mathrm{id}$ auf $\vec{0}$ abgebildet wird.

Es ist klar, daß die Hauptvektoren einen Untervektorraum bilden, denn mit $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})$ sind auch dessen Schachtelungen

$$(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{\ell} = (\varphi - \lambda\,\mathrm{id}) \circ \cdots \circ (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})$$

lineare Abbildungen, und die Hauptvektoren der Stufe höchstens ℓ sind gerade die Elemente des Kerns dieser Abbildung. Da wir von einem endlichdimensionalen Vektorraum V ausgehen, kann die Folge dieser Kerne nicht unbeschränkt wachsen, es gibt also ein maximales ℓ, das als Stufe eines Hauptvektors auftreten kann. Mit diesem ℓ ist der Hauptraum H_λ gerade der Kern von $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{\ell}$.

Der Nutzen der Haupträume ergibt sich aus folgendem

Lemma: H_λ ist ein φ-invarianter Unterraum von V. Bezeichnet ℓ die größte Stufe eines Hauptvektors aus H_λ, so ist $\mathrm{Bild}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{\ell}$ ein φ-invariantes Komplement.

Beweis: Beginnen wir mit der Invarianz von H_λ unter φ.

Ist $\vec{v}$ ein Hauptvektor der Stufe j, so ist

$$\begin{aligned}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{j}(\vec{v}) &= (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{j-1}\big((\varphi - \lambda\,\mathrm{id})(\vec{v})\big) \\ &= (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{j-1}\big(\varphi(\vec{v}) - \lambda\vec{v}\big) = \vec{0}\,,\end{aligned}$$

$\varphi(\vec{v}) - \lambda\vec{v}$ ist also ein Hauptvektor der Stufe höchstens $j-1$ und somit insbesondere ein Element von H_λ. Da mit $\vec{v}$ auch $\lambda\vec{v}$ in H_λ liegt, ist damit auch

$$\varphi(\vec{v}) = \big(\varphi(\vec{v}) - \lambda\vec{v}\big) + \lambda\vec{v} \in H_\lambda$$

ein Hauptvektor.

Für $\vec{v} \in \mathrm{Bild}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{\ell}$ liegt zunächst auch $\varphi(\vec{v}) - \lambda\vec{v}$ im Bild von $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{\ell}$, denn das Bild von $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{\ell}$ enthält das Bild von

$(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{\ell-1}$. Da mit $\vec{v}$ auch $\lambda\vec{v}$ im Bild liegt, folgt wie oben die Behauptung.

Als nächstes müssen wir zeigen, daß der Durchschnitt der beiden Summanden nur aus dem Nullvektor besteht. Dazu sei $\vec{v}$ ein Vektor aus diesem Durchschnitt. Dann liegt $\vec{v}$ sowohl im Kern als auch im Bild der linearen Abbildung $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{\ell}$, es gibt also einen Vektor $\vec{w} \in v$, so daß $\vec{v} = (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{\ell}(\vec{w})$ ist, und $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{\ell}(\vec{v}) = (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{2\ell}(\vec{w}) = \vec{0}$. Damit liegt $\vec{w}$ aber im Hauptraum zu λ, d.h. $\vec{v} = (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{\ell}(\vec{w}) = \vec{0}$.

Nach der Dimensionsformel ist

$$\dim \mathrm{Bild}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{\ell} = \dim V - \dim \mathrm{Kern}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{\ell}\,,$$

also ist

$$\dim \mathrm{Kern}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{\ell} + \dim \mathrm{Bild}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{\ell} = \dim V\,,$$

die beiden Untervektorräume erzeugen somit ganz V. ∎

Die Zerlegung von V nach diesem Lemma heißt FITTING-Zerlegung.

Der deutsche Mathematiker HANS FITTING (1906–1938) beschäftigte sich vor allem mit der Untersuchung von Operatoren (und Operatorenringen). Trotz seines frühen Todes konnte er damit wesentliche Beiträge zur Algebra leisten, vor allem auch zur Erforschung der Struktur von Gruppen.

Das Schöne an der FITTING-Zerlegung ist, daß sie rekursiv fortgesetzt werden kann: Da $\mathrm{Bild}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{\ell}$ auch φ-invariant ist, können wir für die Einschränkung von φ auf diesen Unterraum einen Hauptraum zu einem anderen Eigenwert abspalten *usw.* Bevor wir uns das genauer überlegen, wollen wir uns aber zunächst eine gute Basis für den Hauptraum H_λ verschaffen.

Lemma: Der Hauptraum H_λ hat eine Basis, bezüglich derer die Abbildungsmatrix von φ eine obere Dreiecksmatrix ist. Alle Hauptdiagonaleinträge dieser Matrix sind gleich λ.

Beweis: Wir beginnen mit einer Basis $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{r_1}\}$ des Eigenraums zu λ und ergänzen diese zu einer Basis $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{r_2}\}$ des Raums aller

Hauptvektoren der Stufe höchstens zwei und so weiter, bis eine Basis $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r\}$ des gesamten Hauptraums erreicht ist.

Der Vektor $\vec{b}_i$ sei Hauptvektor der Stufe ℓ; dann ist

$$\begin{aligned}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{\ell}(\vec{b}_i) &= (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{\ell-1}\big((\varphi - \lambda\,\mathrm{id})(\vec{b}_i)\big)\\ &= (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{\ell-1}\big(\varphi(\vec{b}_i) - \lambda\vec{b}_i\big) = \vec{0}\,,\end{aligned}$$

$\varphi(\vec{b}_i) - \lambda\vec{b}_i$ ist also ein Hauptvektor der Stufe höchstens $\ell - 1$. Nach Konstruktion der Basis ist $\varphi(\vec{b}_i) - \lambda\vec{b}_i$ daher eine Linearkombination von Basisvektoren $\vec{b}_j$ mit Indizes echt kleiner i, d.h.

$$\varphi(\vec{b}_i) = \lambda\vec{b}_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}\vec{b}_j\,.$$

Bezüglich der Basis $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r\}$ hat die Abbildungsmatrix daher in der Tat die gewünschte Form. ∎

Abspaltung immer weiterer Haupträume auch vom invarianten Komplement führt schließlich zum

Satz: Zu einer linearen Abbildung $\varphi\colon V \to V$ eines endlichdimensionalen k-Vektorraums V gibt es genau dann eine Basis von V, bezüglich derer die Abbildungsmatrix von φ eine Dreiecksmatrix ist, wenn das charakteristische Polynom von φ über k als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden kann. Alsdann kann die Basis so gewählt werden, daß die Abbildungsmatrix die Form

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{A_2} & \ldots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \boxed{A_s} \end{pmatrix}$$

hat mit Dreiecksmatrizen A_i, die auf der Hauptdiagonalen den i-ten Eigenwert λ_i stehen haben.

Beweis: Falls es zu φ eine Basis gibt, bezüglich derer die Abbildungsmatrix A von φ eine Dreiecksmatrix ist, ist bezüglich dieser Basis auch $A-\lambda E$ eine Dreiecksmatrix. Da die Determinante einer Dreiecksmatrix gerade das Produkt der Diagonaleinträge ist, bekommen wir als charakteristisches Polynom $\det(A-\lambda E)$ ein Produkt von Linearfaktoren.

Falls umgekehrt das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt, gibt es auf jeden Fall Eigenwerte; λ_1 sei einer davon, und H_1 sei der zugehörige Hauptraum. Dazu gibt es nach dem gerade bewiesenen Lemma eine Basis, bezüglich derer die Abbildungsmatrix von $\varphi_{|H_{\lambda_1}}$ eine obere Dreiecksmatrix ist, deren sämtliche Hauptdiagonaleinträge gleich λ_1 sind.

Nach dem Lemma von der FITTING-Zerlegung gibt es zu H_{λ_1} ein φ-invariantes Komplement V_1, so daß $V = H_{\lambda_1} \oplus V_1$ ist. Wir ergänzen die Basis von H_{λ_1} durch eine Basis von V_1 zu einer Basis von V; bezüglich dieser Basis hat φ dann eine Abbildungsmatrix der Form

$$A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{D_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{B_1} \end{pmatrix}$$

mit einer oberen Dreiecksmatrix

$$D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_1 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_1 \end{pmatrix} .$$

Entwicklung des charakteristischen Polynoms $\det(A-\lambda E)$ nach der ersten Spalte, gefolgt von der Entwicklung des Rests nach seiner ersten Spalte und so weiter, bis die ersten $r_1 = \dim H_{\lambda_1}$ Spalten aufgebraucht sind, zeigt, daß

$$\det(A_1 - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} \cdot \det(B_1 - \lambda E)$$

ist, das charakteristische Polynom von $\varphi_{|V_1}$ ist also ein Teiler des charakteristischen Polynoms von φ und zerfällt somit auch in Linearfaktoren.

Insbesondere hat es (mindestens) eine Nullstelle λ_2; wir können deren Hauptraum H_{λ_2} in V_1 betrachten und damit V_1 genau wie oben weiter

zerlegen in H_{λ_2} und dessen invariantes Komplement V_2. Nimmt man nun als Basisvektoren von V zunächst die Basisvektoren von H_{λ_1} wie oben, dann entsprechende Basisvektoren für H_{λ_2} und schließlich noch solche für V_2, hat die Abbildungsmatrix A_2 bezüglich dieser neuen Basis die Form

$$A_2 = \begin{pmatrix} \boxed{D_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{D_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{B_2} \end{pmatrix}$$

mit einer neuen Dreiecksmatrix

$$D_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_2 \end{pmatrix} .$$

Auf diese Weise lassen sich sukzessive immer weitere Haupträume abspalten, bis schließlich eine Basis erreicht ist, bezüglich derer die Abbildungsmatrix von φ die Form

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{D_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{D_2} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boxed{D_s} \end{pmatrix}$$

hat mit oberen Dreiecksmatrizen

$$D_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_i & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

zu den Eigenwerten von φ. Ist D_i eine $r_i \times r_i$-Matrix, so ist das charakteristische Polynom von φ

$$\det(A-\lambda E) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1}(\lambda_2 - \lambda)^{r_2} \cdots (\lambda_1 - \lambda)^{r_s} ,$$

die r_i sind also gerade die algebraischen Vielfachheiten der λ_i. ∎

Für spätere Anwendungen wollen wir das gerade bewiesene Ergebnis noch etwas umformulieren:

Satz: Falls das charakteristische Polynom von $\varphi: V \to V$ in Linearfaktoren zerfällt, gibt es eine Basis von V, bezüglich derer die Abbildungsmatrix A von φ als $A = D + N$ geschrieben werden kann, wobei D eine Diagonalmatrix ist und N eine obere Dreiecksmatrix mit Nullen in der Hauptdiagonalen. Außerdem ist $DN = ND$.

Beweis: Wir nehmen natürlich die Basis aus dem gerade beendeten Beweis; die Diagonalmatrix D soll genau aus den Diagonalelementen der Abbildungsmatrix A bestehen, also die Eigenwerte entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheiten als Diagonalelemente enthalten, und $N = A - D$. Für jede einzelne Dreiecksmatrix D_i aus dem obigen Beweis kommutiert der Diagonalanteil mit dem Rest, da der Diagonalanteil gerade das λ_i-fache der Einheitsmatrix ist. Damit ist auch $DN = ND$, denn bei beiden Multiplikationen treffen, abgesehen von den Nullen, immer nur Einträge aus einem D_i aufeinander. ∎

Diese Zerlegung aus diesem Satz bezeichnet man nach dem französischen Mathematiker CAMILLE JORDAN als JORDAN-Zerlegung.

MARIE ENNEMOND CAMILLE JORDAN (1838–1922) arbeitete bei der Herleitung dieser und weiterer Zerlegungen nicht mit komplexen Matrizen, sondern mit Matrizen über endlichen Körpern, motiviert durch Fragen aus der Gruppentheorie und Lösbarkeitsfragen für nichtlineare Gleichungen. Weitere Arbeiten beschäftigen sich mit der Anwendung gruppentheoretischer Methoden auf die Geometrie sowie mit der Topologie, wo er z.B. bewies, daß jede doppeltpunktfreie geschlossene Kurve die Ebene in zwei Gebiete zerlegt. Außerdem entwickelte er neue Methoden zum Nachweis der Konvergenz von FOURIER-Reihen.

Ziel unserer Betrachtungen in diesem Paragraphen war die Berechnung von Potenzen und Exponentialfunktionen einer Matrix. Mit der JORDAN-Zerlegung ist dies im wesentlichen erreicht: Da D und N miteinander

kommutieren, gilt für Potenzen der Summe $D + N$ der „übliche“ binomische Lehrsatz, d.h.

$$(D+N)^m = \sum_{\ell=1}^{m} \binom{m}{\ell} D^{m-\ell} N^{\ell} ,$$

und

$$e^{D+N} = e^D \cdot e^N .$$

Die Potenzen von D sind sehr einfach zu berechnen: D^j ist wieder eine Diagonalmatrix, ihre Diagonalelemente sind die j-ten Potenzen der Diagonalelemente von D; genauso ist e^D einfach die Diagonalmatrix mit den Exponentialfunktionen der Einträge von D als Einträgen.

N ist eine obere Dreiecksmatrix mit Nullen in der Hauptdiagonalen, wir wissen also bereits, daß es einen Exponenten gibt, ab dem alle Potenzen gleich der Nullmatrix sind, so daß die Exponentialreihe zu einer endlichen Summe wird und auch in der binomischen Formel selbst für große m nur relativ wenige Summanden auftreten.

Mit der JORDAN-Zerlegung können wir diese Aussage nun noch etwas präzisieren: Die lineare Abbildung ψ zu N bildet den i-ten Basisvektor $\vec{b}_i$ ab in den von Basisvektoren $\vec{b}_j$ mit $j \leq i-1$ erzeugten Unterraum. Für diese Basisvektoren gilt eine analoge Aussage, $\psi^{(2)}(\vec{b}_i)$ liegt daher im Unterraum, den die $\vec{b}_j$ mit $j \leq i-2$ aufspannen. Induktiv folgt, daß $\psi^{(\ell)}(\vec{b}_i)$ im von den $\vec{b}_j$ mit $j \leq i-\ell$ aufgespannten Untervektorraum liegt; falls $i-\ell$ negativ wird, ist das natürlich der Nullraum.

Die Abbildungsmatrix N^ℓ von $\psi^{(\ell)}$ ist daher ebenfalls eine obere Dreiecksmatrix mit Nullen in der Hauptdiagonalen; zusätzlich stehen auch noch in den $\ell - 1$ schrägen Reihen oberhalb und parallel zur Hauptdiagonale lauter Nullen, und spätestens wenn ℓ größer oder gleich der größten Stufe eines Hauptvektors wird, ist N^ℓ gleich der Nullmatrix.

Als Beispiel betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

die offensichtlich von der oben betrachteten Form ist; hier ist

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Eine kurze Rechnung zeigt, daß

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N^3 = 0$$

ist, also ist beispielsweise

$$A^{10} = D^{10} + 10\,D^9 N + 55\,D^8 N^2 = \begin{pmatrix} 1024 & 5120 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1024 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 20 & 390 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Mehr als Potenzen interessiert uns die Exponentialfunktion einer Matrix; auch diese läßt sich über die JORDAN-Zerlegung berechnen: Da D und N kommutieren, ist $e^A = e^{D+N} = e^D \cdot e^N$ mit

$$e^D = \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

und

$$e^N = E + N + \frac{1}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

also ist

$$e^A = e^D \cdot e^N = \begin{pmatrix} e^2 & e^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 2e & 7e \\ 0 & 0 & 0 & e & 4e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix} .$$

Entsprechend läßt sich auch e^{At} berechnen:

$$e^{Nt} = E + Nt + \frac{1}{2}N^2 t^2 = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2t & 3t + 4t^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

und da auch Dt und Nt kommutieren, ist

$$e^{At} = e^{Dt} \cdot e^{Nt} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 2te^t & 3te^t + 4t^2 e^t \\ 0 & 0 & 0 & e^t & 4te^t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} .$$

Zur Vorsicht sei noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, daß es für diese Rechnungen sehr wesentlich war, daß D und N miteinander kommutieren; es reicht nicht, wenn wir die Matrix A nur auf *irgendeine* Dreiecksgestalt bringen und dann als Summe einer Diagonalmatrix und einer oberen Dreiecksmatrix mit Nullen in der Hauptdiagonalen schreiben. Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{def}}{=} D + N$$

beispielsweise ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} ,$$

und in der Tat ist

$$D^2 + 2DN + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

verschieden von

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} ,$$

und genauso ist

$$e^A = \begin{pmatrix} e & 3e^2 - 3e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \neq e^D \cdot e^N = \begin{pmatrix} e & 3e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} .$$

Der Grund für die Verschiedenheit der Ergebnisse beim Quadrat liegt natürlich darin, daß wir im allgemeinen nur sagen können, daß

$$(D+N)^2 = D(D+N) + N(D+N) = D^2 + DN + ND + N^2$$

ist, aber wir können $DN + ND$ nicht zusammenfassen zu $2DN$. Mit wachsendem Exponenten verschlimmert sich die Situation drastisch; schon

$$(D+N)^3 = D^3 + D^2N + DND + ND^2 + DN^2 + NDN + N^2D + N^3$$

hat acht Summanden; die m-te Potenz hat 2^m, und von denen überleben viele auch dann, wenn N^r schon für relativ kleine r verschwindet. Für die Matrixexponentialfunktion, in die alle Potenzen eingehen, ist also ziemlich klar, daß es für nichtkommutierende Matrizen D und N keinen vernünftigen Zusammenhang zwischen e^{D+N} und $e^D \cdot e^N$ geben kann.

g) Ein Beispiel

Wir haben Eigenvektoren und Hauptvektoren in erster Linie eingeführt, um Differentialgleichungen zu lösen; daher soll das etwas ausführlichere Beispiel in diesem Abschnitt ebenfalls mit einer Differentialgleichung beginnen: Gesucht sind die Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 2x(t) - y(t) - z(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) + 5y(t) + 2z(t) \\ \dot{z}(t) &= -x(t) - 2y(t) + z(t) . \end{aligned}$$

Hier ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} ,$$

und das charakteristische Polynom von A ist

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 21\lambda + 18 = -(\lambda - 2)(\lambda - 3)^2 .$$

Wir haben also den Eigenwert zwei mit algebraischer und somit auch geometrischer Vielfachheit eins und den Eigenwert drei mit algebraischer Vielfachheit zwei. In der Matrix

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

ist die mittlere Spalte gleich der Summe der beiden äußeren,

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt also den Eigenraum. In

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

stimmen die zweite und die dritte Spalte miteinander überein,

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist also ein Eigenvektor und erzeugt auch den Eigenraum, denn da die erste Spalte kein Vielfaches der zweiten ist, hat die Matrix den Rang zwei. Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts drei ist also nur eins: Um zu einer Dreiecksmatrix zu kommen, müssen wir einen Hauptvektor zweiter Stufe berechnen. Aus

$$(A - 3E)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sieht man, daß sich

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

als von $\vec{v}_2$ linear unabhängiger Kandidat anbietet. Da

$$A\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\vec{v}_3 - \vec{v}_2$$

ist, hat A bezüglich der Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ die Form

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

der erste „Kasten“ ist also einfach eine 1×1-Matrix und der zweite ist

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da das Quadrat des zweiten Summanden verschwindet, ist

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$e^{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} t} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & -te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$e^{Mt} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & -te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Um daraus e^{At} zu berechnen, müssen wir die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ durch die Hauptvektoren ausdrücken; man überzeugt sich leicht, daß

$$\vec{e}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad \vec{e}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3 \quad \text{und} \quad \vec{e}_3 = \vec{v}_1 - \vec{v}_3$$

ist. Bezüglich der Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ ist also

$$e^{At}\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & -te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix},$$

was bezüglich der Standardbasis der Vektor

$$e^{2t}\vec{v}_1 + e^{3t}\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{3t} - e^{2t} \\ e^{2t} - e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Also ist, bezüglich der Standardbasis ausgedrückt,

$$e^{At} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{3t} - e^{2t} \\ e^{2t} - e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Genauso überlegt man sich, daß

$$e^{At} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{2t}\vec{v}_1 + \left(e^{3t} + te^{3t}\right)\vec{v}_2 - e^{3t}\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} e^{2t} - e^{3t} \\ 2e^{3t} - e^{2t} + te^{3t} \\ e^{2t} - e^{3t} - te^{3t} \end{pmatrix}$$

und

$$e^{At} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} - e^{3t} \\ e^{3t} - e^{2t} + te^{3t} \\ e^{2t} - te^{3t} \end{pmatrix}$$

ist. Da in den Spalten einer Matrix die Bilder der Basisvektoren stehen, ist somit

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t} - e^{3t} & e^{2t} - e^{3t} \\ e^{3t} - e^{2t} & 2e^{3t} - e^{2t} + te^{3t} & e^{3t} - e^{2t} + te^{3t} \\ e^{2t} - e^{3t} & e^{2t} - e^{3t} - te^{3t} & e^{2t} - te^{3t} \end{pmatrix}.$$

Die Lösung, die den Anfangsbedingungen

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \quad \text{und} \quad z(0) = z_0$$

genügt, ist also

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t} - e^{3t} & e^{2t} - e^{3t} \\ e^{3t} - e^{2t} & 2e^{3t} - e^{2t} + te^{3t} & e^{3t} - e^{2t} + te^{3t} \\ e^{2t} - e^{3t} & e^{2t} - e^{3t} - te^{3t} & e^{2t} - te^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x_0 + y_0 + z_0)e^{2t} - (y_0 + z_0)e^{3t} \\ \left(x_0 + (t+2)y_0 + (t+1)z_0\right)e^{3t} - (x_0 + y_0 + z_0)e^{2t} \\ (x_0 + y_0 + z_0)e^{2t} - \left(x_0 + (t+1)y_0 + tz_0\right)e^{3t} \end{pmatrix}.$$

h) Ergänzung: Die Jordan-Normalform

Die im vorigen Abschnitt konstruierte Normalform für Abbildungsmatrizen wird für alle Zwecke dieser Vorlesung ausreichen. Trotzdem ist sie nicht ganz befriedigend, da die Dreiecksmatrizen immer noch sehr willkürlich und damit komplizierter als notwendig sind. Für Interessenten sei in diesem Abschnitt gezeigt, wie sich die bislang erreichte

Dreiecksgestalt noch weiter vereinfachen läßt. Für das folgende werden wir die Ergebnisse dieses Abschnitts nicht benötigen; er kann also auch gefahrlos überlesen werden.

Die Potenzen einer oberen Dreiecksmatrix mit Nullen in der Hauptdiagonalen verschwinden, wie wir gesehen haben, ab einem meist überschaubar kleinen Exponenten, aber die Potenzen bis dahin muß man doch mühsam von Hand ausrechnen. Eine Ausnahme, bei der alles klar ist, bilden Matrizen der Form

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

bei denen direkt oberhalb der Hauptdiagonale lauter Einsen stehen, während alle anderen Einträge verschwinden, d.h.

$$N = (n_{ij}) \quad \text{mit} \quad n_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } j - i = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Bei der sukzessiven Potenzierung von N verschiebt sich einfach die Reihe von Einsen jeweils um eins weiter nach außen, d.h.

$$N^\ell = (n_{ij}^{(\ell)}) \quad \text{mit} \quad n_{ij}^{(\ell)} = \begin{cases} 1 & \text{falls } j - i = \ell \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ,$$

denn die zu N gehörige lineare Abbildung ψ bildet einfach den i-ten Basisvektor auf den $(i-1)$-ten ab oder auf den Nullvektor, falls es keinen $(i-1)$-ten Basisvektor mehr gibt, und entsprechend ist $\psi^{(\ell)}(\vec{b}_i) = \vec{b}_{i-\ell}$ beziehungsweise $\vec{0}$.

In diesem speziellen Fall sind die Potenzen von N also ohne jeden Aufwand zu berechnen, und tatsächlich genügen solche Matrizen N schon vollständig für eine Normalform der Abbildungsmatrix, die sogenannte JORDAN-Normalform:

Satz: Falls das charakteristische Polynom von $\varphi: V \to V$ als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden kann, gibt es eine Basis von V,

bezüglich derer die Abbildungsmatrix von φ die Form

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{J_2} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boxed{J_s} \end{pmatrix}$$

hat mit oberen Dreiecksmatrizen

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

zu den Eigenwerten von φ. Die Anzahl der Kästchen J_i zu einem festen Eigenwert ist die geometrische Vielfachheit dieses Eigenwerts, die Summe ihrer Zeilenzahlen die algebraische.

Beweis: Wir gehen aus von der Zerlegung von V in die Haupträume zu den Eigenwerten von φ und betrachten einen festen Hauptraum H_λ. Die Einschränkung von φ auf diesen Untervektorraum läßt sich zerlegen in eine Summe

$$\varphi_{|H_\lambda} = \lambda \,\mathrm{id} + \psi \; ;$$

dabei ist die Abbildungsmatrix von $\lambda\,\mathrm{id}$ bezüglich jeder beliebigen Basis gleich dem λ-fachen der Einheitsmatrix, und zumindest bezüglich der im vorigen Abschnitt konstruierten Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r\}$ ist die Abbildungsmatrix von ψ eine obere Dreiecksmatrix N mit Nullen in der Hauptdiagonalen.

ψ bildet den Basisvektor $\vec{b}_i$ daher ab in das Erzeugnis der Basisvektoren $\vec{b}_1$ bis $\vec{b}_{i-1}$; insbesondere geht $\vec{b}_1$ auf den Nullvektor. Wiederholte Anwendung von ψ zeigt, daß für jeden Basisvektor $\vec{b}_i$ gilt: $\psi^{(i-1)}(\vec{b}_i) = \vec{0}$, wobei der Exponent von ψ für die wiederholte Anwendung der Abbildung stehen soll. Insbesondere ist also $\psi^{(r)}(\vec{v}) = \vec{0}$ für alle $\vec{v} \in H_\lambda$.

Es könnte sein, daß es schon eine kleinere Zahl s gibt, so daß $\psi^{(s)}$ die Nullabbildung ist; die kleinste solche Zahl bezeichnen wir als den *Nilpotenzgrad* von ψ.

Hat der Nilpotenzgrad seinen größtmöglichen Wert r, so sind die Vektoren

$$\vec{b}_r,\ \psi(\vec{b}_r),\ \ldots,\ \psi^{(s-1)}(\vec{b}_r)$$

allesamt ungleich dem Nullvektor. Sie sind auch linear unabhängig, denn ist

$$\alpha_0\vec{b}_r + \alpha_1\psi(\vec{b}_r) + \cdots + \alpha_{r-1}\psi^{(r-1)}(\vec{b}_r) = \vec{0}\,,$$

so ist auch für jedes j

$$\begin{aligned}&\psi^{(j)}\big(\alpha_0\vec{b}_s + \alpha_1\psi(\vec{b}_s) + \cdots + \alpha_{r-1}\psi^{(r-1)}(\vec{b}_r)\big)\\ &= \alpha_0\psi^{(j)}(\vec{b}_r) + \alpha_1\psi^{(j+1)}(\vec{b}_r) + \cdots + \alpha_{r-1}\psi^{(j+r-1)}(\vec{b}_r)\big) = \vec{0}\,.\end{aligned}$$

Da $\psi^{(s)}$ für $s \geq r$ die Nullabbildung ist, treten hier nur die Summanden $\alpha_i\psi^{(i+j)}(\vec{b}_s)$ mit $i < r - j$ wirklich auf, für $j = r - 1$ also nur der Summand $\alpha_0\psi^{(r-1)}(\vec{b}_r)$. Da $\psi^{(r-1)}(\vec{b}_r)$ ungleich dem Nullvektor ist, muß also $\alpha_0 = 0$ sein. Anwendung von $\psi^{(r-2)}$ zeigt als nächstes, daß $\alpha_1 = 0$ ist, und genauso zeigt man sukzessive das Verschwinden aller α_i. Also können wir

$$\vec{c}_1 = \psi^{(r-1)}(\vec{b}_r), \quad \vec{c}_2 = \psi^{(r-2)}(\vec{b}_r), \quad \ldots, \quad \vec{c}_r = \vec{b}_r$$

als Basisvektoren von H_λ wählen, und bezüglich dieser Basis ist

$$\psi(\vec{c}_i) = \begin{cases} c_{i-1} & \text{für } i > 1 \\ \vec{0} & \text{für } i = 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad \varphi(\vec{c}_i) = \begin{cases} \lambda\vec{c}_i + \vec{c}_{i-1} & \text{für } i > 1 \\ \lambda\vec{c}_1 & \text{für } i = 1 \end{cases}.$$

Die Abbildungsmatrix von φ hat somit die einfache Gestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

und das ist gerade eines der JORDAN-Kästchen aus der Formulierung des Satzes.

Falls der Nilpotenzgrad s von ψ kleiner als r ist, können wir nicht so argumentieren. Wir können aber immerhin einen Vektor $\vec{v} \in H_\lambda$ finden, so daß $\psi^{(s-1)}(\vec{v}) \neq \vec{0}$ ist, denn erst $\psi^{(s)}$ ist die Nullabbildung. Genau wie oben folgt, daß

$$\vec{c}_1 = \psi^{(s-1)}(\vec{v}), \quad \vec{c}_2 = \psi^{(s-2)}(\vec{v}), \quad \ldots, \quad \vec{c}_s = \vec{v}$$

linear unabhängig sind, allerdings spannen sie nur einen s-dimensionalen Teilraum U von H_λ auf. Dieser Teilraum ist ψ-invariant und damit auch φ-invariant, denn ψ bildet einfach die Basisvektoren aufeinander beziehungsweise auf den Nullvektor ab, und die Abbildungsmatrizen bezüglich dieser Basis sehen genauso aus wie oben; auch zu U gehört also ein JORDAN-Kästchen.

Um weitere Kästchen zu bekommen, brauchen wir ein invariantes Komplement von U in H_λ. Dazu wählen wir irgendeine lineare Abbildung $\omega\colon V \to k$, für die $\omega(\vec{v}) \neq 0$ ist und setzen

$$W = \left\{ \vec{w} \in H_\lambda \;\middle|\; \omega(\vec{w}) = \omega\big(\psi(\vec{w})\big) = \cdots = \omega\big(\psi^{(s-1)}(\vec{w})\big) = 0i \right\}.$$

Der Durchschnitt $U \cap W$ besteht nur aus dem Nullvektor, denn jeder Vektor aus U läßt sich als

$$\vec{w} = \alpha_1\vec{c}_1 + \ldots + \alpha_s\vec{c}_s$$

schreiben, und wenn $\vec{w}$ auch in W liegt, ist

$$\omega\big(\psi^{(j)}(\vec{w})\big) = \alpha_1\psi^{(j+s-1)}(\vec{v}) + \ldots + \alpha_{s-1}\psi^{j+1}(\vec{v}) + \alpha_s\psi^{(j)}(\vec{v}) = 0$$

für $j = 0, \ldots, s-1$. Da $\psi^{(\ell)}(\vec{v})$ für $\ell \geq s$ gleich dem Nullvektor ist, folgt für $j = s-1$, daß $\alpha_{s-1} = 0$ ist, und erniedrigt man j immer weiter, folgt nacheinander das Verschwinden aller Koeffizienten α_i. Somit ist $U \cap W$ in der Tat der Nullraum.

Die Dimension von W läßt sich zumindest nach unten leicht abschätzen: Bezüglich einer Basis von H_λ wird jede Gleichung $\omega\big(\psi^{(j)}(\vec{w})\big) = 0$ zu einer linearen Gleichung in den Koeffizienten von $\vec{w}$, der Untervektorraum W ist also die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems aus s Gleichungen in $\dim H_\lambda$ Variablen. Daher ist

$$\dim W \geq \dim H_\lambda - s \quad \text{und} \quad \dim U \oplus W = \dim U + \dim W \geq \dim H_\lambda\,.$$

Da $U \oplus W$ Untervektorraum von H_λ ist, geht das nur, wenn das Gleichheitszeichen gilt, d.h. $H_\lambda = U \oplus W$.

Wir müssen uns noch überlegen, daß W unter ψ invariant ist. Dazu müssen wir zeigen, daß für alle $\vec{w} \in W$ gilt

$$\omega\big(\psi(\vec{w})\big) = \omega\Big(\psi\big(\big(\psi(\vec{w})\big)\Big) = \cdots = \omega\Big(\psi^{(s-1)}\big((\vec{w})\big)\Big) = 0\,,$$

d.h.

$$\omega\big(\psi(\vec{w})\big) = \omega\big(\psi^{(2)}(\vec{w})\big) = \cdots = \omega\big(\psi^{(s)}(\vec{w})\big) = 0$$

falls

$$\omega(\vec{w}) = \omega\big(\psi(\vec{w})\big) = \cdots = \omega\big(\psi^{(s-1)}(\vec{w})\big) = 0$$

ist. Die einzige neue Bedingung ist $\omega\big(\psi^{(s)}(\vec{w})\big) = 0$, und die ist trivialerweise erfüllt, da $\psi^{(s)}$ die Nullabbildung ist. Also ist W invariant unter ψ und somit ein invariantes Komplement von U.

Auch $\psi_{|W}$ ist eine nilpotente Abbildung von einem Nilpotenzgrad $s' \leq s$; wenn wir also einen Vektor $\vec{w} \in W$ hernehmen, für den $\psi^{(s')}(\vec{w}) \neq \vec{0}$ ist, können wir die gleiche Kontruktion wie oben mit $\vec{v}$ noch einmal durchführen und erhalten einen neuen invarianten Unterraum $U' \leq W$ mit einer Basis, bezüglich derer φ ein JORDAN-Kästchen als Abbildungsmatrix hat.

Falls $U' = W$ ist, sind wir damit fertig; anderfalls können wir wieder wie oben ein invariantes Komplement W' von U' in W finden und einen weiteren Teilraum abspalten, *usw.* Jeder solche Teilraum führt auf ein JORDAN-Kästchen, und das Verfahren bricht schließlich ab, da wir in einem endlichdimensionalen Vektorraum arbeiten.

In jedem der konstruierten Teilräume liegt genau ein eindimensionaler Teilraum aus Eigenvektoren (und dem Nullvektor), nämlich der vom ersten Basisvektor aufgespannte. Der Eigenraum zu λ wird also von diesen ersten Basisvektoren aufgespannt und seine Dimension, die geometrische Vielfachheit von λ, ist damit gleich der Anzahl der JORDAN-Kästchen zu λ. Die algebraische Vielfachheit ist wegen der speziellen Gestalt der Abbildungsmatrix natürlich die Anzahl der λ in der Hauptdiagonalen, d.h. gleich der Summe der Zeilenzahlen der JORDAN-Kästchen zu λ.

■

Um wenigstens ein ganz einfaches Beispiel zu sehen, betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vom Ende des vorigen Abschnitts. Links oben steht schon ein JORDAN-Kästchen zum Eigenwert zwei, rechts unten müssen wir noch etwas arbeiten.

Die Basis des $\mathbb{R}^5$ sei $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_5\}$; davon können wir $\vec{b}_1 = \vec{e}_1$ und $\vec{b}_2 = \vec{e}_2$ als Basis von H_2 gleich übernehmen. H_1 wird von $\vec{e}_3, \vec{e}_4$ und $\vec{e}_5$ aufgespannt; ein Vektor aus diesem dreidimensionalen Raum, der unter

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

den maximalen Nilpotenzgrad hat, ist etwa $\vec{e}_5$, denn $\vec{e}_5$ wird abgebildet auf $3\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4$; da e_3 auf den Nullvektor geht und $\vec{e}_4$ auf $2\vec{e}_3$, wird dieser Vektor weiter abgebildet auf $8\vec{e}_3$, was schließlich auf den Nullvektor abgebildet wird. Mit

$$\vec{b}_3 = 2\vec{e}_3, \quad \vec{b}_4 = 3\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4 \quad \text{und} \quad \vec{b}_5 = \vec{e}_5$$

geht also $\vec{b}_5$ unter N auf $\vec{b}_4$ und weiter auf $\vec{b}_3$; daher ist

$$A\vec{b}_3 = \vec{b}_3, \quad A\vec{b}_4 = \vec{b}_4 + \vec{b}_3 \quad \text{und} \quad A\vec{b}_5 = \vec{b}_5 + \vec{b}_4\,,$$

und die Matrix A hat bezüglich der Basis $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_5\}$ die Gestalt

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit den beiden JORDAN-Kästchen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

§3: Anwendung auf lineare Differentialgleichungen

a) Systeme homogener linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Beliebige Systeme homogener linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten können genauso behandelt werden wie das Beispiel aus §2*g)*, und eigentlich wissen wir bereits alles, was wir brauchen. Trotzdem seien die wesentlichen Punkte hier noch einmal zusammenfassend dargestellt:

Wir betrachten ein Differentialgleichungssystem

$$\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)\,,$$

wobei A eine reelle oder komplexe $n \times n$-Matrix ist. Zumindest über den komplexen Zahlen zerfällt ihr charakteristisches Polynom in Linearfaktoren, es gibt also eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{C}^n$, bezüglich derer A als obere Dreiecksmatrix geschrieben werden kann.

Ist B die komplexe $n \times n$-Matrix, deren Spalten die Vektoren aus $\mathcal{B}$ sind, ist dann also

$$A = BCB^{-1}$$

mit einer Dreiecksmatrix $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann ist auch

$$e^{At} = Be^{Ct}B^{-1}\,,$$

und e^{Ct} kann berechnet werden, da $C = D + N$ Summe einer Diagonalmatrix und einer damit kommutierenden oberen Dreiecksmatrix mit Nullen in der Hauptdiagonalen ist. Insgesamt ist also

$$e^{At} = Be^{Dt}e^{Nt}B^{-1}\,,$$

und jeder der vier Faktoren rechts ist ein endlich vielen Schritten berechenbar.

Wie wir weiterhin wissen, hat jede Lösung der Differentialgleichung $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ die Form

$$\vec{y}(t) = e^{At}\vec{y}_0 \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{y}_0 = \vec{y}(0) \in \mathbb{C}^n\,;$$

wir kennen also alle Lösungen des Systems. Falls Anfangsbedingungen vorgegeben sind, die sich auf einen beliebigen Zeitpunkt $t = t_0$ beziehen, können wir die Lösung entsprechend schreiben als

$$\vec{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\vec{y}(t_0)\,.$$

Solange wir in der Lage sind, die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A zu berechnen, können wir also jedes Anfangswertproblem in Gestalt eines Systems linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten lösen.

b) Langzeitverhalten der Lösung

Nicht immer ist es notwendig oder auch nur möglich, ein Differentialgleichungssystem zur exakten numerischen Vorhersage der weiteren Entwicklung eines Systems zu verwenden; gelegentlich reicht auch ein qualitativer Überblick. Dabei geht es vor allem um das Langzeitverhalten des Systems: Nähert es sich einem Gleichgewicht, „explodiert“ es, oder wird es auf lange Sicht periodisch, wie wir es etwa vom Fall der erzwungenen Schwingung her kennen.

Für solche Aussagen reicht es im Falle eines linearen homogenen Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$, die Eigenwerte der Matrix A zu kennen: Bezüglich einer Basis aus Hauptvektoren läßt sich A in der Form $D + N$ schreiben mit einer Diagonalmatrix D, für die e^{Dt} Diagonalmatrix ist mit den Funktionen $e^{\lambda t}$ als Einträgen, wobei λ die Eigenwerte von A durchläuft. Die Matrix e^{Nt} hat Polynome in t als Einträge; das Produkt $e^{Dt}e^{Nt}$ hat also wegen der speziellen Formen von D und N Produkte von Polynomen in t mit e^{λ^t} als Einträge, wobei der Grad des Polynoms höchstens die um eins verminderte größte Stufe eines Hauptvektors zu λ ist. Bei der Rücktransformation auf die Ausgangsbasis entstehen Linearkombinationen solcher Funktionen, die bei der Multiplikation mit dem Vektor der Anfangswerte selbst wieder linear kombiniert werden. Insgesamt ist also jede Lösungsfunktion eine Linearkombination von Termen der Form $t^j e^{\lambda t}$.

Falls nur ein Eigenwert λ von A positiven Realteil hat, muß das System fast unweigerlich explodieren, da der Betrag von $e^{\lambda t}$ für hinreichend

großes t jede vorgegebene Grenze überschreitet. Zwar sind eventuell Anfangsbedingungen möglich, bei denen $e^{\lambda t}$ nicht in der Lösung des Anfangswertproblems auftritt, aber da die Anfangswerte in der Praxis nie durch Naturgesetze gegeben sind, sondern durch fehlerbehaftete Meßwerte, kann schon eine kleine Störung den Term $e^{\lambda t}$ wieder ins Spiel bringen, und auch für sehr kleines c dominiert $ce^{\lambda t}$ langfristig jede beschränkte Funktion.

Haben dagegen *alle* Eigenwerte von A negativen Realteil, geht jeder Term $t^j e^{\lambda t}$ gegen Null für $t \to \infty$ und damit auch jede Lösungsfunktion; der Lösungsvektor nähert sich also immer mehr der Gleichgewichtslösung $\vec{y}(t) \equiv 0$.

Bleibt noch der Fall von Eigenwerten mit Realteil null. Hier werden die bei mehrfachen Eigenwerten möglichen Polynome wichtig, denn während der Betrag von $e^{\lambda t}$ konstant ist, geht der Betrag der mit einem nichtkonstanten Polynom multiplizierten Funktion gegen $\pm\infty$.

Schließlich sollten wir auch die Imaginärteile der Eigenwerte nicht ganz vergessen: Falls A, wie in den meisten Anwendungen, eine reelle Matrix ist, ist mit jedem nichtreellen Eigenwert λ auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert derselben Vielfachheit wie λ. Mit $\lambda = a + ib$ ist

$$e^{\lambda t} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt) \quad \text{und} \quad e^{\overline{\lambda} t} = e^{at}(\cos bt - i \sin bt)\,,$$

jede Linearkombination von $e^{\lambda t}$ und $e^{\overline{\lambda} t}$ läßt sich also auch als Linearkombination der beiden reellen Funktionen

$$e^{at}\cos bt \quad \text{und} \quad e^{at}\sin bt$$

schreiben. Die Imaginärteile bringen also Schwingungsanteile in die Lösungsfunktionen.

Um einen ersten Eindruck vom Lösungsverhalten linearer homogener Differentialgleichungssysteme mit reellen Koeffizienten zu bekommen, wollen wir uns überlegen, was in niedrigen Dimensionen möglich ist.

Im Eindimensionalen besteht das „System“ einfach aus der Differentialgleichung $\dot{y}(t) = ay(t)$ mit Lösung $y(t) = y(0)e^{at}$; für $a > 0$ geht dies je

nach Vorzeichen von $y(0)$ gegen plus oder minus unendlich für $t \to \infty$, für $a < 0$ gegen null, und für $a = 0$ ist $y(t) = y(0)$ konstant.

Etwas interessanter ist es im Zweidimensionalen: Hier hat die Matrix A einen oder zwei Eigenwerte.

Falls es nur einen gibt und dieser die geometrische Vielfachheit zwei hat, ändert sich nichts wesentliches gegenüber der eindimensionalen Situation: Die Lösungsfunktion ist $\binom{x(0)}{y(0)} \cdot e^{\lambda t}$.

Falls der Eigenwert nur die algebraische Vielfachheit eins hat, sind die Lösungsfunktionen Linearkombinationen von $e^{\lambda t}$ und $te^{\lambda t}$, also Produkte lineare Funktionen mit $e^{\lambda t}$. Jetzt können die Lösungen auch im Fall $\lambda = 0$ unbeschränkt werden.

Wenn es zwei verschiedene Eigenwerte gibt, können diese entweder beide reell oder aber konjugiert komplex sein.

Im reellen Fall können beide positiv sein; dann geht jede nichttriviale Lösung ins Unendliche, oder aber beide können negativ sein; dann nähert sich jede Lösung immer mehr dem Nullpunkt. Alternativ könnte einer positiv und einer negativ sein; in diesem Fall nähern sich alle Lösungskurven einer Geraden, gehen aber mit dieser ins Unendliche. Schließlich könnte noch ein Eigenwert null sein; dann liegen alle Lösungskurven auf Geraden und gehen dort je nach Vorzeichen des anderen Eigenwerts gegen einen festen Punkt oder aber ins Unendliche.

Bleibt noch der Fall zweier konjugiert komplexer Eigenwerte $a \pm ib$; in diesem Fall sind die Lösungsfunktionen Linearkombinationen von $e^{at}\cos t$ und $e^{at}\sin t$.

Für $a = 0$ haben wir einfach reine Schwingungen; falls die beiden Eigenvektoren senkrecht aufeinander stehen, bekommen wir als Lösungskurven Kreislinien, ansonsten affine Verzerrungen davon, also Ellipsen.

Für $a \neq 0$ ergeben sich entsprechend Spiralen, die je nach Vorzeichen von a entweder ins Unendliche gehen oder aber sich auf den Nullpunkt zusammenziehen.

Betrachten wir als Beispiel das System

$$\dot{x}(t) = -10{,}2x(t) - 25y(t) \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = 5x(t) + 9{,}8y(t)\,.$$

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -10\frac{1}{5} & -25 \\ 5 & 9\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

hat das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 + \frac{2}{5}\lambda + 25\frac{1}{5}$$

mit Nullstellen $-\frac{1}{5} \pm 5i$, die Lösungskurven sind also sich nach innen zusammenziehende Spiralen. Mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $y(0) = 1$ erhalten wir die Lösung

$$x(t) = -5e^{-t/5} \sin 5t \quad \text{und} \quad y(t) = e^{-t/5}(\cos 5t + 2 \sin 5t)\,,$$

die in Abbildung 29 zu sehen ist.

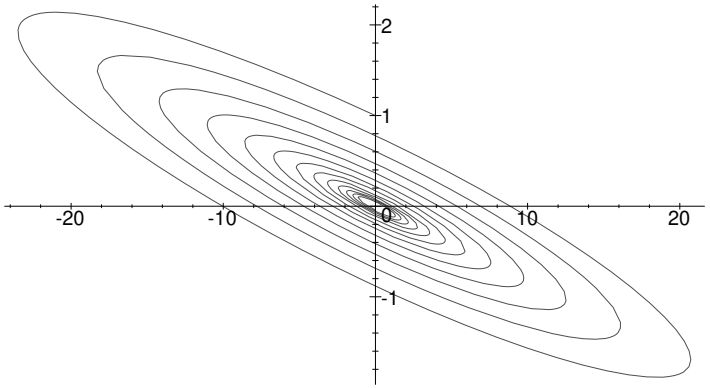


Abb. 29: Spiralförmige Annäherung an den Nullpunkt

Im Dreidimensionalen gibt es entsprechend mehr Möglichkeiten; ich möchte auf die weniger interessanten Fälle mit lauter reellen Eigenwerten verzichten und nur den betrachten, daß zwei konjugiert komplexe auftreten, etwa $a \pm ib$. Der dritte Eigenwert λ muß dann natürlich reell sein.

Falls er null ist, sind wir im wesentlichen in der zweidimensionalen Situation: Da dann in Richtung des dritten Eigenvektors alles konstant

ist, spielt sich alles in einer Ebenen ab, die parallel zu der von den ersten beiden Eigenvektoren aufgespannten liegt.

Falls er negativ ist, nähert sich in Richtung des dritten Eigenvektors alles der Ebenen, in der dessen Koordinate null ist, die also von den beiden anderen Eigenvektoren aufgespannt wird, und dort ist die Dynamik je nach Vorzeichen von a spiralförmig nach innen oder außen oder einfach ellipsenförmig. Abbildung 30 zeigt den Fall $a = -1/10$, $b = 2$ und $\lambda = -1/6$; die Eigenvektoren zeigen in Richtung der Koordinatenachsen.

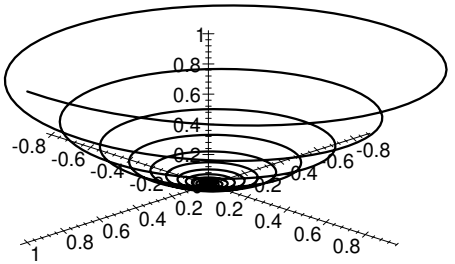


Abb. 30: Spiralförmige Annäherung an den Nullpunkt im Dreidimensionalen

In Abbildung 31 ist $a = +1/10$ und ansonsten alles unverändert; wie man sieht, nähert sich nun die Lösungskurve zwar der (x, y)-Ebenen, geht in dieser aber spiralförmig ins Unendliche.

Falls der dritte Eigenwert positiv ist, geht in Richtung seines Eigenvektors alles ins Unendliche; je nach Vorzeichen von a entfernen sich die Lösungskurven dabei spiralförmig von der durch diesen Eigenvektor aufgespannten Geraden oder aber gehen auf sie zu. Abbildung 32 zeigt den letzteren Fall mit $\lambda = +1/6$ und a, b wie in Abbildung 29.

Man beachte, daß die Abbildungen 31 und 32 zwar auf den ersten Blick sehr ähnlich aussehen, daß aber die Dynamik in Abbildung 31 in z-Richtung nach unten geht, in Abbildung 32 aber nach oben. Der Rotationssinn der Spiralen ist in beiden Fällen der Gegenuhrzeigersinn.

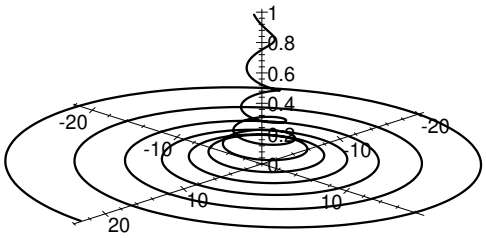


Abb. 31: Spirale, die sich der (x, y)-Ebenen nähert

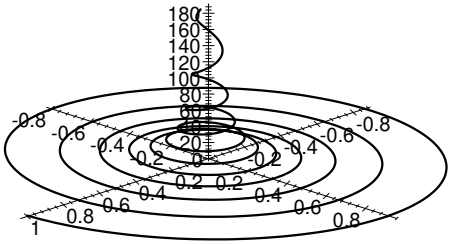


Abb. 32: Spirale, die sich der z-Achse nähert

c) Lineare homogene Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Eine der wichtigsten Anwendungen der Theorie aus den letzten Abschnitten in der Elektrotechnik sind lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Dieser Abschnitt soll zeigen, daß man in diesem Spezialfall weder Determinanten noch Eigen- und Hauptvektoren berechnen muß, um die Lösungsfunktionen zu finden.

Um zu sehen, was der allgemeine Ansatz in diesem Spezialfall ergibt, schreiben wir die Differentialgleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = 0 \quad \text{mit} \quad a_i \in \mathbb{C}\,.$$

als ein System

$$\begin{aligned}
\dot{y}_0(t) &= y_1(t)\\
\dot{y}_1(t) &= y_2(t)\\
&\vdots\\
\dot{y}_{n-2}(t) &= y_{n-1}(t)\\
\dot{y}_{n-1}(t) &= -a_{n-1}y_{n-1}(t) - \cdots - a_1\dot{y}_1(t) - a_0y_0(t)
\end{aligned}$$

oder kurz $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_0(t)\\ \vdots\\ y_{n-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen $\vec{y}(t)$ dieses Systems definieren Lösungen $y(t) = y_0(t)$ der obigen Gleichung, und umgekehrt ist auch für jede solche Lösung $y(t)$ der Vektor

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y(t)\\ \dot{y}(t)\\ \ddot{y}(t)\\ \vdots\\ y^{(n-2)}(t)\\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

eine Lösung des Systems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$.

Aus dem vorigen Abschnitt wissen wir, daß die Lösungen dieses Systems einen n-dimensionalen Vektorraum V von vektorwertigen Funktionen $t \mapsto \vec{y}(t)$ bilden. Jede einzelne Komponente jeder Lösung aus diesem Vektorraum ist darstellbar als Linearkombination von Funktionen $t^j e^{\lambda_i t}$, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte von A sind und die nichtnegative ganze Zahl j kleiner ist als die größte Stufe eines Hauptvektors zu λ_i, erst recht also kleiner als die algebraische Vielfachheit von λ_i. Insbesondere stehen daher bei einfachen Eigenwerten oder allgemeiner bei Eigenwerten, deren geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen ist, überhaupt keine echten t-Potenzen vor den Exponentialfunktionen.

Außerdem wissen wir, daß jedes Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist: Bei Anfangsbedingungen

$$y_0(t_0) = c_0, \quad \ldots, \quad y_{n-1}(t_0) = c_{n-1}$$

ist

$$\vec{y}(t) = e^{A(t-t_0)}$$

die Lösung. Vornehm ausgedrückt können wir auch sagen, daß für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ die Abbildung

$$V \to \mathbb{C}^n; \quad \vec{y}(t) \mapsto \vec{y}(t_0)$$

ein Isomorphismus ist.

Für jeden Lösungsvektor $\vec{y}(t)$ des Differentialgleichungssystems ist die nullte Komponenten $y_0(t)$ Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = 0\,,$$

und diese Komponente bestimmt auch die anderen Komponenten $y_i(t)$, die ja gerade die Ableitungen von $y_0(t)$ sind. Daher bilden auch die Lösungsfunktionen dieser Gleichung einen n-dimensionalen Vektorraum, d.h. auch die Abbildung $\vec{y}(t) \mapsto y_0(t)$ ist ein Isomorphismus, und wenn wir Anfangsbedingungen mit ins Spiel bringen folgt auch, daß es für jede Vorgabe von Werten $y(t_0), \dot{y}(t_0), \ddot{y}(t_0), \ldots, y^{(n-1)}(t_0)$ genau eine Lösung gibt.

Wie wir uns gerade überlegt haben, ist $y_0(t)$ Linearkombination von Funktionen der Art $t^j e^{\lambda_i t}$, wobei λ_i die Eigenwerte von A durchläuft und j kleiner als die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ_i ist.

Die Summe der algebraischen Vielfachheiten der (komplexen) Eigenwerte einer komplexen $n \times n$-Matrix ist gleich dem Grad des charakteristischen Polynoms, also gleich n; damit gibt es genau n solche Funktionen. Andererseits wissen wir, daß der Lösungsraum die Dimension n hat; somit werden alle diese Funktionen wirklich gebraucht und sie bilden eine Basis des Lösungsraums.

Für eine wirklich befriedigende Kenntniss des Lösungsraums fehlt uns nun nur noch ein Verfahren, wie wir die Eigenwerte λ_i und deren algebraische Vielfachheiten α_i direkt aus den Koeffizienten der Gleichung berechnen können.

Zumindest die Eigenwerte λ_i lassen sich leicht aus der Gleichung ablesen: Für die Funktion $y(t) = e^{\lambda t}$ ist $y^{(i)}(t) = \lambda^i e^{\lambda t}$, sie ist also genau dann eine Lösung der Differentialgleichung, wenn

$$\begin{aligned} &\lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda t} + \cdots + a_1\lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} \\ &= (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda t} \end{aligned}$$

verschwindet; da $e^{\lambda t}$ nirgends verschwindet, ist dies genau dann der Fall, wenn

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \qquad (*)$$

ist.

Definition: Die Gleichung $(*)$ heißt *charakteristische Gleichung* der Differentialgleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = 0\,.$$

Die Eigenwerte λ_i von A sind also genau die Nullstellen der charakteristischen Gleichung der Differentialgleichung. Da diese denselben Grad hat wie das charakteristische Polynom von A liegt die Vermutung nahe, daß sie (eventuell bis auf eine Konstante) damit übereinstimmt, und das ist auch tatsächlich der Fall:

Lemma: Die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung ist das mit $(-1)^n$ multiplizierte charakteristische Polynom von A.

Beweis: Für $n = 1$ ist die Differentialgleichung $\dot{y}(t) = ay(t)$ identisch mit dem zugehörigen System; die charakteristische Gleichung ist $\lambda - a$, und die „Matrix“ $A = (a)$ hat das charakteristische Polynom $a - \lambda$. Für $n = 1$ stimmt die Behauptung also.

Für $n > 1$ entwickeln wir das charakteristische Polynom

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix}$$

nach der ersten Spalte und erhalten

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{n-1}(-a_0) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

Die erste Determinate auf der rechten Seite ist von derselben Form wie das betrachtete charakteristische Polynom, hat aber nur die Größe $(n-1) \times (n-1)$. Wir können daher induktiv schließen, daß sie gleich

$$(-1)^{n-1}\left(a_n\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \dots + a_2\lambda + a_1\right)$$

ist. Die zweite Determinante läßt sich direkt ausrechnen: Wie man sich leicht überlegt (oder in **[HM1]**, Kapitel I, §4*f)* nachliest), ist die Determinante einer Dreiecksmatrix gleich dem Produkt ihrer Diagonalelemente;

die zweite Determinante ist also gleich eins. Damit folgt

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= (-\lambda)(-1)^{n-1}\left(a_n\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \dots + a_2\lambda + a_1\right) \\ &\quad + (-1)^{n-1}(-a_0) \\ &= (-1)^n\left(a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0\right), \end{aligned}$$

wie behauptet. ∎

Insbesondere haben also die charakteristische Gleichung einer Differentialgleichung und das charakteristische Polynom der zugehörigen Matrix nicht nur dieselben Nullstellen, sondern auch die Vielfachheiten dieser Nullstellen sind gleich; die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte lassen sich direkt aus der charakteristischen Gleichung ablesen.

Damit haben alle Bausteile zusammen und können das Ergebnis dieses Abschnitts im folgenden Satz zusammenfassen:

Satz: Die charakteristische Gleichung

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

der Differentialgleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = 0$$

habe die Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_r$; die Vielfachheit der Nullstelle λ_i sei α_i. Dann bilden die Lösungen der Differentialgleichung einen n-dimensionalen Vektorraum V mit Basis

$$\left\{e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{\alpha_1 - 1}e^{\lambda_1 t}, \quad \dots \quad e^{\lambda_r t}, te^{\lambda_r t}, \dots, t^{\alpha_r - 1}e^{\lambda_r t}\right\}.$$

Für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ ist die lineare Abbildung

$$V \to \mathbb{C}^n; \quad y \mapsto \left(y(t_0), \dot{y}(t_0), \ddot{y}(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)\right)$$

ein Isomorphismus; insbesondere ist jedes Anfangswertproblem

$$y(t_0) = c_0, \quad \dot{y}(t_0) = c_1, \quad \dots \quad y^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1}$$

eindeutig lösbar. ∎

Sofern wir uns für komplexwertige Lösungen interessieren, liefert uns dieser Satz alles was wir brauchen. Bei vielen Anwendungen hat man es aber mit Gleichungen mit reellen Koeffizienten zu tun, und von der Natur des Problems her interessieren nur reelle Lösungen. Mit unserem bisherigen Ansatz kommen wir auch bei diesen Problemen nicht um komplexe Lösungen herum; beispielsweise hat die wohlbekannte Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + y(t) = 0$$

die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

mit den beiden rein imaginären Lösungen $\lambda = \pm i$, die oben angegebene Basis des Lösungsraums ist also

$$\left\{e^{it},\ e^{-it}\right\}.$$

Falls wir noch nie etwas vom obigen Satz gehört hätten, würden wir stattdessen sagen, daß die Lösungen dieser Differentialgleichung genau die Linearkombinationen von Sinus und Cosinus sind, Basis des Lösungsraums ist also

$$\left\{\sin t,\ \cos t\right\}.$$

Über $\mathbb{C}$ sind beide Aussagen äquivalent, denn auf Grund der EULERschen Formeln

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right) \quad \text{und} \quad \sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$$

bzw.

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \quad \text{und} \quad e^{-it} = \cos t - i \sin t$$

erzeugen beide Basen denselben $\mathbb{C}$-Vektorraum. Wenn wir an reellen Lösungen interessiert sind, ist aber die zweite Basis erheblich nützlicher, denn sie erzeugt auch den $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Lösungen.

Entsprechend hätten wie auch für allgemeinere Differentialgleichungen mit reellen Koeffizienten gerne eine $\mathbb{C}$-Basis des (komplexen) Lösungsraums, die gleichzeitig $\mathbb{R}$-Basis des reellen Lösungsraums ist. Im Rest dieses Abschnitts wollen wir uns überlegen, wie wir diese Basis konstruieren können.

Wir gehen also aus von einer Differentialgleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = 0 \quad \text{mit} \quad a_i \in \mathbb{R}$$

und betrachten zunächst wieder die charakteristische Gleichung

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0\,.$$

Diese *kann* reelle Lösungen haben; diese bezeichnen wir mit λ_1 bis λ_p, und falls es keine gibt, setzen wir $p = 0$.

Falls p gleich der Gesamtzahl r der Nullstellen der charakteristischen Gleichung ist, sind wir fertig: Die Funktionen $t^j e^{\lambda_i t}$ sind allesamt reell, und die, bei denen j kleiner als die Vielfachheit der Nullstelle λ_i ist, spannen sowohl den komplexen als auch den reellen Lösungsraum auf.

Andernfalls gibt es auch noch nichtreelle Nullstellen. Für jede solche Nullstelle λ ist auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{\lambda}$ eine Nullstelle, denn da die Koeffizienten a_i reell sind, ist $\overline{a_i} = a_i$ und damit

$$\overline{\lambda}^n + a_{n-1}\overline{\lambda}^{n-1} + \ldots + a_1\overline{\lambda} + a_0 = \overline{\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0} = 0\,.$$

Nichtreelle Nullstellen treten also immer auf als Paare konjugiert komplexer Zahlen; außerdem haben λ und $\overline{\lambda}$ dieselbe Vielfachheit, denn eine Nullstelle ist genau dann eine r-fache Nullstelle eines Polynoms P, wenn sie Nullstelle von P und allen seinen Ableitungen bis zur $(r-1)$-ten ist. Da auch alle diese Ableitungen Polynome mit reellen Koeffizienten sind, zeigt die gleiche Rechnung wie oben, daß $P^{(j)}(\lambda)$ genau dann verschwindet, wenn auch $P^{(j)}(\overline{\lambda})$ verschwindet.

Wir fassen daher die nichtreellen Nullstellen zu Paaren $\left(\lambda_{p+j}, \overline{\lambda_{p+j}}\right)$ zusammen, wobei j von 1 bis zur Anzahl q dieser Paare läuft; die Gesamtzahl der Nullstellen ist also $r = p + 2q$.

Die Vielfachheit der Nullstelle λ_k sei weiterhin mit α_k bezeichnet; für $k > p$ ist das gleichzeitig auch die Vielfachheit der Nullstelle $\overline{\lambda}_k$.

Für $k > p$ wenden wir, genau wie im obigen Beispiel, die EULERschen Formeln an: Für

$$\lambda_k = \mu_k + i\nu_k \quad \text{mit} \quad \mu_k, \nu_k \in \mathbb{R}$$

ist

$$e^{\lambda_k t} = e^{\mu_k t}\big(\cos\nu_k t + i\sin\nu_k t\big) \quad \text{und} \quad e^{\overline{\lambda_k} t} = e^{\mu_k t}\big(\cos\nu_k t - i\sin\nu_k t\big)\,,$$

genauso ist für jedes j

$$t^j e^{\lambda_k t} = t^j e^{\mu_k t}\big(\cos\nu_k t + i\sin\nu_k t\big)$$

und

$$t^j e^{\overline{\lambda_k} t} = t^j e^{\mu_k t}\big(\cos\nu_k t - i\sin\nu_k t\big)\,.$$

Also spannt

$$\big\{t^j e^{\lambda_k t},\ t^j e^{\overline{\lambda_k} t}\big\}$$

denselben $\mathbb{C}$-Vektorraum auf wie

$$\big\{t^j e^{\mu_k t}\cos\nu_k t,\ t^j e^{\mu_k t}\sin\nu_k t\big\}\,,$$

und letztere Basis spannt gleichzeitig den $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reeller Funktionen aus diesem $\mathbb{C}$-Vektorraum auf.

Damit können wir auch eine Basis des reellen Lösungsraums angeben:

Satz: Die charakteristische Gleichung

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

der Differentialgleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = 0$$

habe die reellen Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sowie die Paare konjugiert komplexer Nullstellen $\big(\lambda_{p+1}, \overline{\lambda_{p+1}}\big), \ldots, \big(\lambda_{p+q}, \overline{\lambda_{p+q}}\big)$ mit $\lambda_k = \mu_k + i\nu_k$; die Vielfachheit der Nullstelle λ_i sei α_i. Dann bilden die Lösungen der Differentialgleichung einen n-dimensionalen Vektorraum V, der aufgespannt wird von den Funktionen

$$t^j e^{\lambda_i t} \quad \text{für } i = 1, \ldots, p$$

und

$$t^j e^{\mu_i t}\cos\nu_i t, \quad t^j e^{\mu_i t}\sin\nu_i t \quad \text{für } i = p+1, \ldots, p+q\,,$$

wobei j jeweils von null bis $\alpha_i - 1$ läuft. Für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ ist die lineare Abbildung

$$V \to \mathbb{R}^n; \quad y \mapsto \big(y(t_0), \dot{y}(t_0), \ddot{y}(t_0), \ldots, y^{(n-1)}(t_0)\big)$$

ein Isomorphismus; insbesondere ist jedes Anfangswertproblem

$$y(t_0) = c_0, \quad \dot{y}(t_0) = c_1, \quad \ldots \quad y^{(n-1)}(t_0)$$

eindeutig lösbar. ∎

d) Inhomogene Differentialgleichungen

Am Beispiel der Schwingungsdifferentialgleichungen haben wir gesehen, daß zur Beschreibung interessanter Phänomene homogene Differentialgleichungen oft nicht ausreichen; sobald etwa ein elektrischer Schwingkreis eine Stromquelle enthält, haben wir eine inhomogene Differentialgleichungen.

Wie schon im Falle der Schwingungsdifferentialgleichungen genügt es zur Lösung einer allgemeinen inhomogenen linearen Differentialgleichung, den Lösungsraum der zugehörigen homogenen Differentialgleichung zu kennen und dazu noch *eine* Lösung der inhomogenen, denn wegen der Linearität der linken Seite ist die Differenz zweier Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung Lösung der homogenen.

Wir kennen bereits eine Methode, uns eine solche spezielle Lösung zu verschaffen: Sobald wir uns Anfangswerte vorgeben, können wir die entsprechende Lösung des inhomogenen Problems mittels LAPLACE-Transformation finden – sofern wir die LAPLACE-Transformierte des inhomogenen Anteils kennen und aus der LAPLACE-Transformierten der Lösungsfunktion diese Funktion selbst bestimmen können. In vielen praktisch relevanten Fällen wird dies mit Hilfe von Tabellen möglich sein, sofern man nur die grundlegenden Regeln für den Umgang mit LAPLACE-Transformationen kennt.

Eine zweite Methode ist das *Erraten* einer Lösung. In der Praxis betrachtet man Differentialgleichungen meist, um das künftige Verhalten eines Systems vorauszusagen, und oft wird man (leider nicht immer richtige!) ungefähre Erwartungen haben, wie dieses Verhalten aussehen sollte.

Falls man diese als Ansatz mit unbestimmten Parametern in die Differentialgleichung einsetzt und die Erwartungen richtig war, kann man die Parameter bestimmen und hat eine Lösung gefunden; andernfalls muß man sich etwas neues überlegen.

Als Beispiel betrachten wir nochmals die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + \rho\dot{y}(t) + \sigma y(t) = f(t)\,.$$

Wir kamen auf diese Differentialgleichung bei der betrachtung eines elektrischen Schwingkreises, an den eine externe Spannung proportional $f(t)$ angelegt war, und für vernünftiges $f(t)$ sollte man erwarten, daß es Lösungen gibt, bei denen sich $y(t)$ völlig von $f(t)$ bestimmen läßt und daher von ähnlicher Gestalt ist.

Im Falle einer Gleichstromquelle $f(t) = c$ vermuten wir, daß es vielleicht eine Lösung gibt, bei der nur ein Gleichstrom fließt. Der Ansatz $y(t) = a$ führt auf

$$\sigma a = c \quad \text{oder} \quad a = \frac{c}{\sigma}\,,$$

falls $\sigma \neq 0$ ist.

Für $\sigma = 0$ haben wir *de facto* eine Differentialgleichung für $\dot{y}(t)$ statt für $y(t)$; man könnte es daher mit einem Ansatz der Form $\dot{y}(t) = b$ oder $y(t) = bt + a$ versuchen; für $\rho \neq 0$ führt das zu

$$\rho b = c \quad \text{oder} \quad b = \frac{c}{\rho}\,;$$

a ist hier natürlich beliebig.

Entsprechend können wir auch bei einer angelegten Wechselspannung vorgehen: Der Schwingkreis wird sicherlich die Amplitude und die Phase verändern, aber die permanent angelegte Wechselspannung sollte doch dem Schwingkreis ihre Frequenz aufzwingen, so daß es zumindest eine Lösung geben sollte, die eine reine Schwingung mit dieser Frequenz ist. Für

$$\ddot{y}(t) + \rho\dot{y}(t) + \sigma y(t) = A\cos\omega_0 t$$

versuchen wir es also mit

$$y(t) = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t$$

und berechnen die Ableitungen:

$$\dot{y}(t) = -a\omega_0\sin\omega_0 t + b\omega_0\cos\omega_0 t$$

und

$$\ddot{y}(t) = -a\omega_0^2\cos\omega_0 t - b\omega_0^2\sin\omega_0 t\,.$$

Einsetzen in die linke Seite der Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned}&\ddot{y}(t) + \rho\dot{y}(t) + \sigma y(t)\\ &= (-a\omega_0^2 + \rho b\omega_0 + \sigma a)\cos\omega_0 t + (-b\omega_0^2 - \rho a\omega_0 + \sigma b)\sin\omega_0 t\,,\end{aligned}$$

und das ist gleich $A\cos\omega_0 t$, falls

$$(\sigma - \omega_0^2)a + \rho\omega_0 b = A \quad \text{und} \quad (\sigma - \omega_0^2)b - \rho\omega_0 a = 0$$

ist.

Für $\sigma = \omega_0^2$ ist dies problemlos zu lösen: Dann ist einfach

$$a = 0 \quad \text{und} \quad b = \frac{A}{\rho\omega_0}\,.$$

Für $\sigma \neq \omega_0^2$ können wir die zweite Gleichung durch $(\sigma - \omega_0^2)$ dividieren und erhalten

$$b = \frac{\rho\omega_0}{\sigma - \omega_0^2}a\,.$$

Dies können wir in die erste Gleichung einsetzen:

$$(\sigma - \omega_0^2)a + \rho\omega_0\frac{\rho\omega_0}{\sigma - \omega_0^2}a = \frac{(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2\omega_0^2}{\sigma - \omega_0^2}a = A$$

oder

$$a = \frac{A(\sigma - \omega_0^2)}{(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2\omega_0^2} \quad \text{und} \quad b = \frac{A\rho\omega_0}{(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2\omega_0^2}\,.$$

In beiden Fällen gibt es also in der Tat eine Lösung der postulierten Form, die wir hiermit explizit bestimmt haben.

Im Prinzip haben wir diese Lösung bereits in §1*c)* berechnet, mit dem Ansatz hier ist die Situation nun aber sehr viel übersichtlicher: Im häufigsten Falle, in dem die homogene Gleichung eine gedämpfte Schwingung beschreibt etwa wissen wir nun, daß es eine feste reine Schwingung mit

der erregenden Frequenz gibt, gegen die *alle* Lösungen der Differentialgleichung langfristig konvergieren.

Für allgemeinen Aussagen ist also dieser Ansatz besser geeignet; falls wir dagegen ein konkretes Anfangswertproblem lösen wollen, liefert die LAPLACE-Transformation direkt die Lösung, während wir beim Weg über die allgemeine Lösung noch ein lineares Gleichungssystem lösen müssen, um die freien Parameter der allgemeinen Lösung an vorgegebene Anfangswerte anzupassen. (Falls man freilich die inversen LAPLACE-Transformationen über Partialbruchzerlegung wirklich konkret berechnet, wird man oft auf genau dasselbe lineare Gleichungssystem stoßen, das man zur Anpassung der allgemeinen Lösung an konkrete Anfangsbedingungen lösen muß.)

Falls man einigermaßen konkrete Erwartungen über das Verhalten zumindest einer Lösungsfunktion hat, ist das Erraten einer speziellen Lösung also oft erfolgversprechend. Das in §1*c)* behandelte Beispiel der Resonanzkatastrophe zeigt aber, daß es auch Fälle gibt, wo man nur mit ziemlicher Erfahrung eine spezielle Lösung erraten kann: Die Gleichung

$$\ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = \cos \omega_0 t$$

hat schließlich *keine* Lösung, die eine reine Schwingung der Frequenz ω_0 ist.

Zum Glück gibt es außer LAPLACE-Transformation und Erraten noch ein drittes, rein formales Verfahren, das ebenfalls häufig zum Ziel führt, die bereits von den linearen Differentialgleichung erster Ordnung her bekannte *Variation der Konstanten.* Diese werden wir, in einem leicht allgemeineren Zusammenhang, im nächsten Abschnitt betrachten.

e) Symmetriebetrachtungen

Viele Systeme haben eine natürliche oder konstruktionsbedingte Symmetrie; wenn man diese Symmetrie erkennt, hat man gleich zwei Werkzeuge in der Hand:

Einmal hat man eine Struktur des Lösungsraums erkannt und kann via Symmetrie eventuell aus einfachen, leicht erkennbaren Lösungen kompliziertere konstruieren. Dieser Aspekt spielt bei den linearen Differentialgleichungen, die wir hier betrachten, keine nennenswerte Rolle: Hier hat der Lösungsraum schließlich immer eine einfache Struktur als affiner Raum oder (im homogenen Fall) sogar Vektorraum – was andererseits natürlich gerade ein sehr einfacher Fall des gerade Gesagten ist.

Zum anderen kann man eventuell versuchen, die Symmetrie der Differentialgleichung durch Koordinatentransformationen auf eine *bekannte* Symmetrie zurückzuführen, die zu einem bekannten Typus von Differentialgleichungen gehört, von denen man weiß, wie sie gelöst werden können.

In diesem Abschnitt soll diese sehr vage Bemerkung anhand einiger konkreter Beispiele erläutert werden.

Die unproblematischste aller Differentialgleichungen ist

$$\dot{y}(t) = f(t)\,;$$

einfache Integration führt auf die Lösung

$$y(t) = \int f(t)\,dt + C\,. \qquad (*)$$

(Tatsächlich kann diese Integration alles andere als „einfach“ sein, aber wenn es um Lösungsformeln für Differentialgleichungen geht, wollen wir ein Problem auch dann als „gelöst“ betrachten, wenn die Formel noch Integrale enthält; das Auffinden von Stammfunktionen ist ein getrenntes Problem und hat seine eigenen Methoden.)

Wenn wir $(*)$ unter Symmetriegesichtspunkten betrachten, sehen wir, daß mit jeder Lösung $y(t)$ auch $y(t) + C$ eine Lösung ist.

Falls umgekehrt eine Differentialgleichung die Eigenschaft hat, daß mit $y(t)$ auch $y(t) + C$ für jede Konstante C eine Lösung ist, haben alle Lösungen dieselbe Ableitung, die Differentialgleichung läßt sich also auf die Form

$$\dot{y}(t) = f(t)$$

bringen. Somit sind die Differentialgleichungen, die durch eine einfache Integration gelöst werden können, dadurch charakterisiert, daß mit jeder

Lösungsfunktion $y(t)$ und jede Konstante C auch $y(t) + C$ eine Lösung ist.

Dies können wir dadurch ausnutzen, daß wir eine gegebene Differentialgleichung, in der wir eine Symmetrie erkennen können, so umformen, daß diese Symmetrie transformiert wird in die Addition einer Konstanten.

Ein Beispiel dafür kennen wir bereits, auch wenn wir damals anders vorgegangen sind: Die lineare homogene Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = f(t)y(t)$$

hat mit $y(t)$ auch jedes Vielfache $Cy(t)$ als Lösung. Die Modifikation, die aus Multiplikationen Additionen macht, ist der Logarithmus; wir müssen also schauen, welcher Differentialgleichung die Funktion

$$z(t) = \ln y(t)$$

genügt. Nach der Kettenregel ist

$$\dot{z}(t) = \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} ;$$

somit folgt aus der Ausgangsleichung, daß

$$\dot{z}(t) = f(t)$$

ist, und das läßt sich in der Tat durch direkte Integration lösen:

$$z(t) = \int f(t)\,dt + C \quad \text{und} \quad y(t) = e^{\int f(t)\,dt} .$$

Auch die Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = f(t)y(t) + g(t) ,$$

die in §1*d)* einfach vom Himmel gefallen war, läßt sich leicht aus Symmetriebetrachtungen herleiten: Ist $y(t)$ eine Lösung dieser Differentialgleichung und $u(t)$ eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) = f(t)u(t) ,$$

so ist für jede Konstante C auch

$$y(t) + Cu(t)$$

eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

Auch hier gibt es eine offensichtliche Modifikation, die aus $y(t)$ eine Funktion macht, die bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, nämlich

$$z(t) = \frac{y(t)}{u(t)} .$$

Für diese Funktion ist

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= \frac{u(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{u}(t)}{u(t)^2} = \frac{\dot{y}(t)}{u(t)} - \frac{y(t)}{u(t)}\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} \\ &= \frac{f(t)y(t) + g(t)}{u(t)} - z(t)f(t) = f(t)z(t) + \frac{g(t)}{u(t)} - z(t)f(t) \\ &= \frac{g(t)}{u(t)} ,\end{aligned}$$

wobei wir endgültige rechte Seite nach Lösung der homogenen Differentialgleichung kennen: Wegen

$$u(t) = e^{\int f(t)\,dt}$$

ist

$$\frac{g(t)}{u(t)} = e^{-\int f(t)\,dt} \quad \text{und} \quad y(t) = u(t)z(t) = e^{\int f(t)\,dt} \int e^{-\int^t f(\tau)\,d\tau}\,dt .$$

Diese Methode der Variation der Konstanten kann gelegentlich auch dann mit Erfolg angewandt werden, wenn man die ihrer Ableitung zugrundeliegende Symmetrie nicht direkt sieht: Ohne eine solche Symmetrie verliert die Methode zwar ihre Erfolgsgarantie, aber als Ansatz der *vielleicht* zum Erfolg führen kann, taugt sie allemal, und die Auflösung von Differentialgleichungen ist nunmal oft mehr Kunst als Wissenschaft.

Betrachten wir als Beispiel die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) - y(t) = 6\sinh t .$$

Erraten einer speziellen Lösung nach dem Motto, daß diese so ähnlich aussehen sollte wie die rechte Seite, legt hier einen Ansatz der Form

$$y(t) = a\cosh t + b\sinh t ,$$

nahe, aber der führt offensichtlich nicht zum Erfolg: Für jede solche Funktion die linke Seite identisch null ist.

Probieren wir es also mit Variation der Konstanten: Der obige Ansatz ist gleichzeitig die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (und konnte genau deshalb auch unmöglich zu einer Lösung der inhomogenen Gleichung führen); Variation der Konstanten macht daraus den Ansatz

$$y(t) = a(t)\cosh t + b(t)\sinh t\,.$$

Differenzieren führt auf

$$\dot{y}(t) = \dot{a}(t)\cosh t + a(t)\sinh t + \dot{b}(t)\sinh t + b(t)\cosh t$$

und

$$\ddot{y}(t) = \ddot{a}(t)\cosh t + 2\dot{a}(t)\sinh t + a(t)\cosh t + \ddot{b}(t)\sinh t + 2\dot{b}(t)\cosh t + b(t)\sinh t\,;$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\left(\ddot{a}(t) + 2\dot{b}(t)\right)\cosh t + \left(\ddot{b}(t) + 2\dot{a}(t)\right)\sinh t = 6\sinh t\,.$$

Das sieht nicht gerade sehr vielversprechend aus: Diese Differentialgleichung ist eher komplizierter als die ursprüngliche.

Zum Glück brauchen wir aber nicht die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung, sondern nur *irgendeine* Lösung. Daher können wir versuchsweise umformen auf neue Gleichungen, die zwar nicht äquivalent sind zur obigen, deren Lösungen – so wir welche finden können – aber zu Lösungen dieser Differentialgleichung führen.

Ein offensichtlicher Kandidat für einen Ansatz ist das System

$$\ddot{a}(t) + 2\dot{b}(t) = 0 \quad \text{und} \quad \ddot{b}(t) + 2\dot{a}(t) = 6\,.$$

Dieses System können wir auffassen als lineares Differentialgleichungssystem für die Ableitungen $\dot{a}(t)$ und $\dot{b}(t)$ und somit nach den allgemeinen Methoden, die wir bereits entwickelt haben, lösen.

Da wir nur eine Lösung suchen, können wir uns diese Mühe allerdings sparen, indem wir heutistisch vorgehen und versuchen, eine spezielle einfache Lösung zu erraten.

Die einfachste Lösung der ersten Gleichung

$$\ddot{a}(t) + 2\dot{b}(t) = 0$$

ist natürlich $a(t) = b(t) = 0$, aber damit können wir nicht die zweite Gleichung lösen. Tatsächlich genügt es aber für eine Lösung der ersten Gleichung bereits, daß

$$\ddot{a}(t) = \dot{b}(t) = 0$$

ist, und wenn wir dies in die zweite Gleichung

$$\ddot{b}(t) + 2\dot{a}(t) = 6$$

einsetzen, folgt, daß $\dot{a}(t) = 3$ sein muß.

Eine Lösung davon ist $a(t) = 3t$ und $b(t) = 0$; damit erhalten wir die spezielle Lösung

$$y(t) = 3t\cosh t\,.$$

Die allgemeine Lösung der Ausgangsgleichung ist daher

$$y(t) = 3t\cosh t + a\cosh t + b\sinh t$$

mit zwei beliebigen Konstanten a und b.

Dieser Lösungsweg sieht sehr nach Trickserei und Glück aus; wenn wir die Gleichung aber umschreiben in ein nichthomogenes lineares Differentialgleichungssystem, können wir die Variation der Konstanten wieder durch Symmetriebetrachtungen rechtfertigen und erhalten ein Verfahren, das (wenn wir Stammfunktionen finden können) stets zu einer Lösung führt.

Wir betrachten dazu gleich das allgemeine System

$$\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t) + \vec{b}(t)$$

mit einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und einem Vektor $\vec{b}(t)$ von Funktionen $b_i(t)$.

Bei der Suche nach Symmetrien dieses Systems können wir genauso vorgehen wie im eindimensionalen Fall: Ist $\vec{u}(t)$ eine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$\dot{\vec{u}}(t) = A\vec{u}(t)$$

und $\vec{y}(t)$ eine Lösung des inhomogenen Systems, so ist mit

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$$

auch

$$\begin{pmatrix} y_1(t) + C_1 u_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) + C_n u_n(t) \end{pmatrix}$$

für beliebige Konstanten $C_1, \ldots, C_n$ eine Lösung.

Beim System $\dot{\vec{y}}(t) = \vec{g}(t)$ ist mit $\vec{y}(t)$ auch $\vec{y}(t)+\vec{C}$ für jeden Vektor $\vec{C}$ von Konstanten eine Lösung und umgekehrt kann jedes System mit dieser Eigenschaft auf die Form $\dot{\vec{y}}(t) = \vec{g}(t)$ gebracht werden. Auch läßt sich, wie im Eindimensionalen, die Lösung auf Integrationen zurückführen: Die allgemeine Lösung ist

$$\vec{y}(t) = \int g(t)\,dt + \vec{C}\,,$$

wobei das Integral über die vektorwertige Funktion $\vec{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ einfach als Abkürzung dafür steht, daß wir jede der Komponenten g_i von $\vec{g}$ einzeln integrieren und die n Ergebnisse wieder zu einem Vektor zusammenfassen.

Für unser ursprüngliches Problem, die Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t) + \vec{b}(t)$ bedeutet dies, daß wir den Vektor

$$\vec{z}(t) \quad \text{mit} \quad z_i(t) = \frac{y_i(t)}{u_i(t)}$$

betrachten sollten, denn der ist wohlbestimmt bis auf die Addition eines konstanten Vektors.

Die Lösungsmenge des homogenen Systems $\dot{\vec{u}}(t) = A\vec{u}(t)$ besteht aus den Funktionen $e^{At}\vec{C}$ mit einem beliebigen Vektor $\vec{C} \in \mathbb{C}^n$; der Lösungsvektor $\vec{y}(t)$ des inhomogenen Systems entsteht daraus durch komponentenweise Multiplikation mit dem noch zu bestimmenden Vektor $\vec{z}(t)$, von dem wir aber immerhin schon wissen, daß er direkt durch Integration einer vektorwertigen Funktion bestimmt werden kann.

Komponentenweise Multiplikation ist keine übliche Vektoroperation; wenn wir mit Vektoren und Matrizen arbeiten wollen, sollten wir sie also möglichst schnell eliminieren.

Für eine Matrix M und zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zeigt die Multiplikationsformel sofort, daß $M\vec{v}$ komponentenweise multipliziert mit $\vec{w}$ das Gleiche ist wie M multipliziert mit dem komponentenweisen Produkt der Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$. In unserem Fall interessiert das komponentenweise Produkt $\vec{y}(t)$ von $\vec{u}(t) = e^{At}\vec{C}$ mit $\vec{z}(t)$, wobei die Wahl eines Konstantenvektors $\vec{C}$ uns überlassen bleibt.

Speziell für den Vektor $\vec{C}$, dessen Komponenten allesamt Einsen sind, ist das komponentenweise Produkt von $\vec{C}$ mit einem beliebigen Vektor $\vec{v}$ gleich $\vec{v}$, also ist für diese Wahl von $\vec{C}$

$$\vec{y}(t) = e^{At}\vec{z}(t)\,.$$

Damit können wir auch hier die Gleichung durch Variation der Konstanten lösen: Wir ersetzen einfach den konstanten Vektor $\vec{C}$ durch eine vektorwertige Funktion $\vec{z}(t)$ und müssen nun diese durch Integration bestimmen.

Da die LEIBNIZsche Produktregel auch für matrixwertige Funktionen gilt, ist

$$\dot{\vec{y}}(t) = Ae^{At}\vec{z}(t) + e^{At}\dot{\vec{z}}(t) = A\vec{y}(t) + e^{At}\dot{\vec{z}}(t)\,;$$

$\vec{y}(t)$ erfüllt also genau dann die Differentialgleichung

$$\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t) + \vec{b}(t)\,,$$

wenn

$$\vec{b}(t) = e^{At}\dot{\vec{z}}(t) \quad \text{oder} \quad \dot{\vec{z}}(t) = e^{-At}\vec{b}(t)$$

ist. Damit können wir die Komponenten von $\vec{z}(t)$ als Stammfunktionen der Komponenten des ganz rechts stehenden Vektors von Funktionen berechnen.

Zur Vereinfachung der Schreibweise vereinbaren wir, daß für eine vektorwertige Funktion $\vec{v}(t)$ gelten soll

$$\int \vec{v}(t)\,dt = \begin{pmatrix} \int v_1(t)\,dt \\ \vdots \\ \int v_n(t)\,dt \end{pmatrix} \quad \text{falls} \quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{pmatrix}\,;$$

dann ist

$$\vec{z}(t) = \int e^{-At}\vec{b}(t)\,dt\,,$$

und wir haben eine spezielle Lösung gefunden. Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems ist daher

$$\vec{y}(t) = e^{At}\left(\int e^{-At}\vec{b}(t)\,dt\right) + e^{At}\vec{y}_0$$

mit einem beliebigen konstanten Vektor $\vec{y}_0$.

Zur Anwendung dieser Formel auf das obige Beispiel müssen wir die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) - y(t) = 6\sinh t$$

umschreiben in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung, also in

$$\dot{y}(t) = z(t)$$
$$\dot{z}(t) = y(t) + 6\sinh t\,.$$

Hier ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6\sinh t \end{pmatrix}\;;$$

wir müssen zunächst die Matrix e^{At} berechnen.

Wie wir bereits zu Beginn von §1*e)* gesehen haben, ist A^2 die Einheitsmatrix und somit

$$e^{A} = \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix}\;;$$

im wesentlichen die gleiche Rechnung zeigt, daß

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

ist und

$$e^{-At} = \begin{pmatrix} \cosh(-t) & \sinh(-t) \\ \sinh(-t) & \cosh(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{pmatrix}\;.$$

Wir brauchen die Funktion

$$e^{-At}\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 6\sinh t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\sinh^2 t \\ 6\sinh t\cosh t \end{pmatrix}$$

und müssen diese integrieren.

Beginnen wir mit dem ersten Eintrag:

$$\begin{aligned}\int -6\sinh^2 t\,dt &= -6\int\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 dt = -\frac{3}{2}\int (e^{2t} + e^{-2t} - 2)\,dt \\ &= -\frac{3}{2}\left(\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} - 2t\right) + C \\ &= -\frac{3}{4}(e^t - e^{-t})(e^t + e^{-t}) + 3t + C' \\ &= -3\sinh t\cosh t + 3t + C'\,.\end{aligned}$$

Genauso finden wir auch eine Stammfunktion des zweiten Eintrags:

$$\begin{aligned}\int 6\sinh t\cosh t\,dt &= \frac{3}{2}\int (e^{2t} - e^{-2t})\,dt \\ &= \frac{3}{4}\left(e^{2t} + e^{-2t}\right) + C \\ &= \frac{3}{4}\left(e^{2t} + 2 + e^{-2t}\right) + C - \frac{3}{2} \\ &= 3\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 + C' = 3\cosh^2 t + C'\,.\end{aligned}$$

Da wir nur eine spezielle Lösung brauchen, können wir die beiden Integrationskonstanten unbesorgt auf null setzen; jede andere Wahl würde nur bedeuten, daß wir eine Lösung der homogenen Gleichung dazuaddieren. Also arbeiten wir mit

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} -3\sinh t\cosh t + 3t \\ 3\cosh^2 t \end{pmatrix}$$

und die gesuchte spezielle Lösung ist

$$e^{At}\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3\sinh t\cosh t + 3t \\ 3\cosh^2 t \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -3\sinh t\cosh^2 t + 3t\cosh t + 3\cosh^2 t\sinh t \\ -3\sinh^2 t\cosh t + 3t\cosh t + 3\cosh^3 t \end{pmatrix} .$$

In der ersten Zeile dieses Ergebnisses heben sich der erste und der dritte Term gegenseitig weg; in der zweiten ist

$$3\cosh^3 t - 3\sinh^2 t\cosh t = 3\cosh t(\cosh^2 t - \sinh^2 t) = 3\cosh t\,.$$

Als Endergebnis erhalten wir somit die spezielle Lösung

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{At}\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} 3t\cosh t \\ 3t\sinh t + 3\cosh t \end{pmatrix} .$$

Insbesondere ist

$$y(t) = 3t\cosh t$$

eine spezielle Lösung der Ausgangsgleichung

$$\ddot{y}(t) - y(t) = 6\sinh t\,,$$

und die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$y(t) = 3t\cosh t + a\cosh t + b\sinh t$$

mit beliebigen Konstanten a, b aus $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ – je nachdem, über welchem der beiden Körper wir das Problem betrachten.

Die Beispiele aus diesem Abschnitt zeigen nur einen winzigen Ausschnitt der Möglichkeiten, wie Symmetriebetrachtungen zu Lösungen von Differentialgleichungen führen können; ihre volle Nützlichkeit entfalten sie erst bei nichtlinearen Differentialgleichungen und Differentialgleichungssystemen. Im Rahmen dieser Vorlesung bleibt keine Zeit, näher darauf einzugehen; eine ausführliche Darstellung von Symmetriemethoden findet man etwa bei

G.W. BLUMAN, S. KUMEI: Symmetries and Differential Equations, *Springer,* 1989

Symmetriemethoden zur Lösung von Differentialgleichungen wurden ab etwa 1880 von dem norwegischen Mathematiker SOPHUS LIE (1842–1899) eingeführt. Insbesondere zeigte LIE auch, daß man nicht wirklich die (schwer bestimmbaren) Symmetrien eines Systems bestimmen muß, sondern daß bereits die mit linearer Algebra bestimmbaren sogenannten *infinitesimalen* Symmetrien ausreichen können, um Lösungen zu finden. Mit diesem Ansatz arbeiten auch die heutigen Computeralgebrasysteme; ein einfaches Beispiel dazu wird uns im nächsten Paragraphen bei der Suche nach integrierenden Faktoren begegnen.

Ausgebaut wurde die Methode von EMMY NOETHER (1882–1935), der Tochter des Mannheimer Mathematikers MAX NOETHER (1844-1921). Sie brachte Symmetrien mit den in den Naturwissenschaften allgegenwärtigen Erhaltungssätzen in Verbindung und bereitete damit auch EINSTEINs Relativitätstheorie vor. Bekannter ist sie allerdings als Mitbegründerin der modernen abstrakten Algebra. Nur dank der massiven Intervention HILBERTs durfte sie sich nach langem Kampf 1919 in Göttingen als erste Frau in Mathematik habilitieren. 1933 wurde sie als Jüdin von der Universität Göttingen entlassen und emigrierte nach USA, wo sie am Bryn Mawr College und dem Institute for Advanced Study in Princeton arbeitete.

§4: Nichtlineare Differentialgleichungen

Lineare Differentialgleichungen spielen vor allem deshalb eine so große Rolle in den Anwendungen, weil es dafür (wie wir im letzten Paragraphen gesehen haben) eine gut ausgebaute Lösungstheorie gibt. Oft werden deshalb sogar ihrem Wesen nach nichtlineare Probleme in einer linearen Approximation betrachtet um so wenigstens zu einem ungefähren Verständnis der Dynamik eines Systems zu gelangen.

Nichtlineare Differentialgleichungen können nur selten explizit in geschlossener Form gelöst werden; trotzdem lohnt sich die Suche nach einer Lösungsformel, denn eine solche Formel gestattet erstens bessere theoretische Aussagen über das Verhalten der Lösungen und zweitens kann eine einmal gefundene Lösungsformel immer wieder auf Systeme

mit anderen Anfangswerten und/oder Parametern angewandt werden, wohingegen eine numerische Lösung für jede Konstellation von Anfangswerten neu berechnet werden muß. Auch ist die Auswertung einer expliziten Lösungsformel zwar keinesfalls *immer* einfacher (oder numerisch stabiler) als eine direkte numerische Lösung, aber doch meistens.

Dieser Paragraph soll anhand einiger einfacher Beispiele und Sätze einen ersten Überblick über das sehr weite Gebiet der nichtlinearen Differentialgleichungen geben.

a) Eindeutigkeitsfragen

Wir hatten Differentialgleichungen eingeführt, um aus dem gegenwärtigen Zustand eines Systems Folgerungen über die künftige Entwicklung zu ziehen. Dies ist natürlich nur dann möglich, wenn das zugehörige Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist. Bei linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ist das, wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, immer der Fall; in diesem Abschnitt wollen wir uns überlegen, welche Probleme im nichtlinearen Fall auftreten können.

Betrachten wir als erstes die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{2y(t)}\,,$$

wobei wir uns hier wie bei allen Beispielen in diesem Abschnitt der Einfachheit halber auf *reelle* Lösungsfunktionen beschränken wollen.

Multiplikation beider Seiten mit $2y(t)$ führt auf

$$2\dot{y}(t)y(t) = 1\,,$$

die Ableitung von $y(t)^2$ ist also gleich 1. Damit ist

$$y(t)^2 = t + C \quad \text{oder} \quad y(t) = \pm\sqrt{t+C}$$

mit einer beliebigen Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Fordern wir noch, daß $y(0) = 0$ sein soll, so hat das entsprechende Anfangswertproblem die beiden Lösungen

$$y(t) = \sqrt{t} \quad \text{und} \quad y(t) = -\sqrt{t}\,,$$

von denen die eine für $t \to \infty$ gegen $+\infty$ geht, die andere gegen $-\infty$.

Als zweites Beispiel betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = 2\sqrt{|y(t)|} \quad \text{mit} \quad y(0) = 0\,.$$

Es hat natürlich die Nullfunktion als Lösung, aber auch die stetig differenzierbare Funktion

$$y(t) = \begin{cases} t^2 & \text{für } t \geq 0 \\ -t^2 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}.$$

($y(t) = t^2$ ist für $t < 0$ *keine* Lösung.) Da die Ableitung von $\pm t^2$ für $t = 0$ verschwindet, sind aber auch die beiden zusammengesetzten Funktionen

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \geq 0 \\ -t^2 & \text{für } t \leq 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad y(t) = \begin{cases} t^2 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

stetig differenzierbar und Lösungen.

Es kommt noch schlimmer: Für jedes $a \in \mathbb{R}$ löst

$$y(t) = (t-a)^2$$

für $t \geq a$ (und nur dort) die Differentialgleichung, wenn auch nicht das Anfangswertproblem. Für $a \geq 0$ können wir dazu die zusammengesetzte Funktion

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq a \\ (t-a)^2 & \text{für } t \geq a \end{cases}$$

betrachten; diese ist in jedem Punkt t stetig differenzierbar und erfüllt die Differentialgleichung samt Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

Auf Grund der Differentialgleichung und der Anfangsbedingung wissen wir also nur, daß die Funktion entweder konstant gleich null ist oder aber nach einem Zeitraum $a \geq 0$ damit beginnt, quadratisch gegen unendlich zu gehen – nicht gerade viel Information.

Bei der Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) + \frac{y(t)}{2t^3} = 0$$

schließlich überzeugt man sich leicht, daß für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ die Funktion $y(t) = \lambda e^{-1/t^2}$ eine Lösung ist. Diese Funktion ist zwar *a priori* für $t = 0$

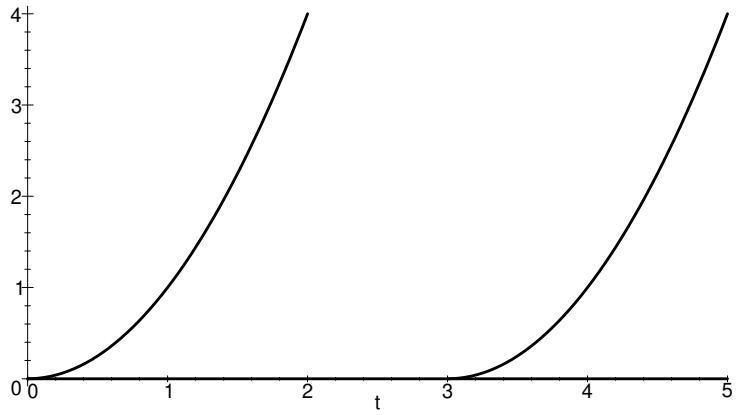


Abb. 33: Drei Lösungen von $\dot{y}(t) = \sqrt{|y(t)|}$ mit $y(0) = 0$

nicht definiert, sie kann aber stetig ergänzt werden durch die Vorschrift, daß ihr Wert dort gleich null sein soll. Genauso verhält es sich mit ihrer Ableitung

$$\dot{y}(t) = -\frac{y(t)}{2t^3} = -\frac{\lambda}{2t^3} \cdot e^{-1/t^2} ,$$

denn e^{-1/t^2} geht schneller gegen null als $\frac{\lambda}{2t^3}$ gegen unendlich. Also ist die Funktion stetig differenzierbar (sogar beliebig oft, wie man sich ohne große Schwierigkeiten überlegen kann). Ihr Wert an der Stelle $t = 0$ ist unabhängig von λ immer gleich null, d.h. das Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) + \frac{y(t)}{2t^3} = 0 \quad \text{und} \quad y(0) = 0$$

hat *jede* der Funktionen $y(t) = \lambda e^{-1/t^2}$ als Lösung, egal welchen Wert $\lambda \in \mathbb{R}$ man auch wählt. Über die Entwicklung eines Systems, das durch diese Gleichung beschrieben wird, läßt sich also *nichts* aussagen. Erst wenn $x(t_0)$ für einen Wert $t_0 \neq 0$ bekannt ist, lassen sich die Lösungen mit den verschiedenen Parameterwerten λ voneinander unterscheiden. Für $t \to \infty$ konvergiert die Lösungsfunktion gegen den Wert λ, der somit die entscheidende Größe für die Beschreibung des Langzeitverhaltens ist und trotzdem durch das Anfangswertproblem völlig unbestimmt gelassen wird.

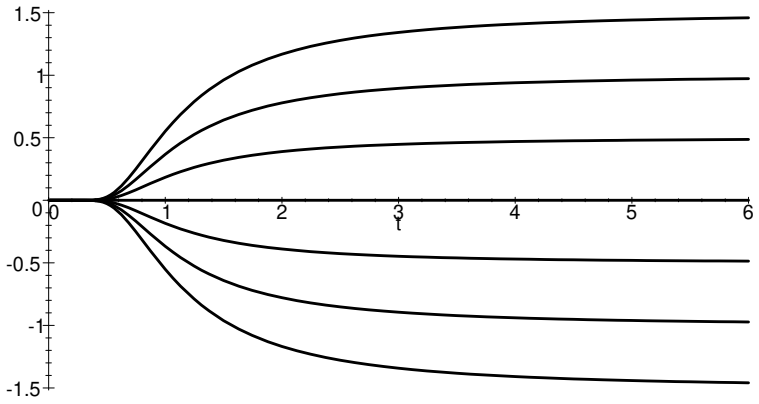


Abb. 34: Sieben Lösungen von $\dot{y}(t) + \frac{y(t)}{2t^3} = 0$ mit $y(0) = 0$

Falls man Differentialgleichungen zur Beschreibung und vor allem zur Vorhersage realer Phänomene einsetzt, ist es also definitiv kein überflüssiger Luxus, wenn man sich zunächst darum kümmert, ob die Differentialgleichung zusammen mit ihrer Anfangsbedingung überhaupt eine eindeutig bestimmte Lösungsfunktion festlegt. Ohne diese Vorüberlegung ist jede Lösungsfunktion wertlos.

b) Der Satz von Picard und Lindelöf

Wir betrachten in diesem Abschnitt das eindimensionale Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = f\big(y(t), t\big) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = c_0 .$$

Dabei sei

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \times [t_0,\, t_1] \to \mathbb{R} \\ \qquad (y, t) \mapsto f(y, t) \end{cases}$$

eine stetige Funktion, d.h. für jeden Punkt (y, t) aus dem Definitionsbereich und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß

$$\big|f\,(\widetilde{y}, \widetilde{t}) - f(y, t)\big| < \varepsilon \quad \text{falls} \quad |\widetilde{y} - y| < \delta \text{ und } \big|\widetilde{t} - t\big| < \delta .$$

Indem wir beide Seiten der Differentialgleichung ab t_0 integrieren, erhalten wir unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $y(t_0) = c_0$ die

neue Gleichung

$$y(t) = c_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(y(\tau), \tau\big)\, d\tau\,,$$

aus der durch Diffenzieren sofort folgt, daß jede ihrer Lösungen das obige Anfangswertproblem löst.

Wir bezeichnen die Funktion auf der rechten Seite mit $T(y)$, d.h.

$$T(y)(t) \underset{\text{def}}{=} c_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(y(\tau), \tau\big)\, d\tau\,.$$

Dies definiert einen Operator, der jeder stetigen Funktion auf $[t_0,\ t_1]$ wieder eine solche Funktion zuordnet, und wir können nun kurz sagen, daß wir eine Funktion suchen, die der Gleichung $y = T(y)$ genügt, oder, anders ausgedrückt, einen Fix„punkt“ des Operators T.

Um einen solchen Fixpunkt zu erhalten ‚starten wir mit einer beliebigen Funktion $y_0(t)$ auf dem Intervall $[t_0,\ t_1]$ und betrachten die Folge von Funktionen $y_n(t)$, die für $n \geq 1$ rekursiv durch $y_n = T(y_{n-1})$ definiert ist, d.h. $y_n = T^n(y_0)$. Falls diese Folge gegen eine Funktion y_∞ konvergiert, ist klar, daß diese Funktion Fixpunkt von T sein muß.

Als Beispiel betrachten wir das (wohlbekannte) Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = y(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = 1\,.$$

Hier ist

$$T(y)(t) = 1 + \int_{0}^{t} y(\tau)\, d\tau\,;$$

falls wir also von der konstanten Funktion $y_0(t) = 1$ ausgehen, ist

$$y_1(t) = 1 + \int_{0}^{t} d\tau = 1 + t\,,$$

$$y_2(t) = 1 + \int_{0}^{t} (1 + \tau)\, d\tau = 1 + t + \frac{t^2}{2}\,,$$

$$y_3(t) = 1 + \int_{0}^{t} \left(1 + \tau + \frac{\tau^2}{2}\right) d\tau = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}\,,$$

und so weiter. Ab hier wird man erraten, daß die Funktionen $y_n(t)$ gerade die TAYLOR-Polynome n-ten Grades der Exponentialfunktion sind, was sich dann leicht durch vollständige Induktion beweisen läßt. Somit ist

$$\lim_{n\to\infty} y_n(t) = e^t\,,$$

wie auch nicht anders zu erwarten war.

In diesem Beispiel geht also alles gut; in anderen Fällen kann es, wie die Beispiele aus dem vorigen Abschnitt zeigten, Probleme geben. Um zu positiven Ergebnisse zu kommen, wollen wir mehr von f verlangen als die bloße Stetigkeit und uns auch auf ein abgeschlossenes Intervall $[t_0,\ t_1]$ beschränken statt t auf der gesamten reellen Achse variieren zu lassen. Eine mögliche Verschärfung der Stetigkeitsforderung ist die

Lipschitz-Bedingung: Es gibt eine Konstante $L \in \mathbb{R}$, genannt LIPSCHITZ-Konstante, so daß für alle $t \in [t_0,\ t_1]$ und alle $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|f(y_2, t) - f(y_1, t)| \leq L\,|y_2 - y_1|\,.$$

RUDOLF OTTO SIGISMUND LIPSCHITZ (1832–1903) wurde in Königsberg geboren und starb in Bonn. Am besten bekannt ist er durch die gerade definierte LIPSCHITZ-Bedingung für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von Differentialgleichungen. Sein Hauptarbeitsgebiet waren die Differentialgleichungen der mathematischen Physik, jedoch beschäftigte er sich auch mit anderen Hilfsmitteln der mathematischen Physik wie etwa Matrizengruppen. Seine Arbeiten über dynamische Systeme haben wichtige Anwendungen in der Himmelsmechanik.

Die LIPSCHITZ-Bedingung muß glücklicherweise in vielen Fällen nicht explizit durch Abschätzungen nachgeprüft werden, denn es gilt

Lemma: Falls die partielle Ableitung von f nach y existiert und betragsmäßig beschränkt ist durch eine Konstante L, genügt f einer LIPSCHITZ-Bedingung mit L als LIPSCHITZ-Konstante.

Beweis: Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es für jedes feste t (das wir bezüglich der partiellen Ableitung wie eine Konstante betrachten können) und für je zwei Werte $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ einen Punkt $z \in [y_1,\ y_2]$ mit der Eigenschaft, daß

$$\frac{f(y_2,t) - f(y_1,t)}{y_2 - y_1} = \frac{\partial f}{\partial y}(z,t)$$

ist. Also ist

$$|f(y_2,t) - f(y_1,t)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(z,t)\right| \ |y_2 - y_1| \ ,$$

und da der Betrag der partiellen Ableitung überall höchstens L ist, erfüllt f eine LIPSCHITZ-Bedingung mit Konstante L.

∎

Wir betrachten nun wieder den oben eingeführten Operator T, von dem uns im Augenblick nur interessieren soll, daß er stetige Funktionen auf dem Intervall $[t_0,\ t_1]$ in ebensolche Funktionen überführt. Wir suchen eine Funktion $y(t)$ mit $T(y) = y$, die wir wie oben als Limes einer Funktionenfolge konstruieren wollen.

Um von einem solchen Limes reden zu können, brauchen wir zunächst eine Norm; wir verwenden dazu die *Supremumsnorm,* die für auf $[t_0,\ t_1]$ stetige Funktionen h durch

$$\|h\| \underset{\text{def}}{=} \sup_{\tau \in [t_0,\, t_1]} |h(\tau)|$$

definiert ist. Da eine stetige Funktion in einem abgeschlossenen Intervall ihr Maximum annimmt, existiert dieses Supremum und ist sogar ein Funktionswert von h.

Über dem Intervall $[0,\ 10]$ beispielsweise ist $\|\sin\| = \|\cos\| = 1$, und für die Funktion $g(t) = t^2$ ist $\|g\| = 10^2 = 100$.

Unser wichtigstes Hilfsmittel zur Untersuchung, wann eine Grenzfunktion existiert, ist der BANACHsche Fixpunktsatz, der in diesem Semester in der Numerik allgemein formuliert und bewiesen wird. Um keine neuen Begriffe einführen zu müssen, begnüge ich mich hier mit dem für unsere Zwecke notwendigen Spezialfall; der Beweis vereinfacht sich dadurch zwar nicht, aber die Formulierung des Satzes wird leichter verständlich.

Banachscher Fixpunktsatz: Für einen Operator T, der stetige Funktionen auf $[t_0,\ t_1]$ auf ebensolche Funktionen abbildet, gebe es eine Konstante $K < 1$ derart, daß für alle auf $[t_0,\ t_1]$ stetigen Funktionen $w(t), z(t)$ gilt

$$\|T(z) - T(w)\| \le K \, \|z - w\| \ .$$

Dann gibt es genau eine stetige Funktion $y\colon [t_0,\ t_1] \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $T(y) = y$.

Beweis: Zunächst ist klar, daß es *höchstens* eine solche Funktion gibt, denn sind $y(t)$ und $z(t)$ zwei Lösungen, so ist

$$\|z - y\| = \|T(z) - T(y)\| \le K \, \|z - y\| \ ,$$

was für $K < 1$ nur dann möglich ist, wenn $\|z - y\|$ verschwindet, wenn also überall $y(t) = z(t)$ ist.

Zum Nachweis der Existenz starten wir mit irgendeiner stetigen Funktion $y_0(t)$ und iterieren sie mit T, d.h. für $n > 0$ sei $y_n = T(y_{n-1})$.

Wir überlegen uns zunächst, daß für jedes feste $\tau \in [t_0,\ t_1]$ die Folge der reellen Zahlen $y_n(\tau)$ konvergiert. Nach dem CAUCHYschen Konvergenzkriterium müssen wir dazu zeigen, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$|y_m(\tau) - y_n(\tau)| \le \varepsilon \quad \text{falls} \quad m > n > N$$

ist. Da wir mit der Supremumsnorm arbeiten, ist

$$|y_m(\tau) - y_n(\tau)| \le \|y_m - y_n\| \ ,$$

und nach Voraussetzung ist für jedes $r \in \mathbb{N}$

$$\|y_{r+2} - y_{r+1}\| \le K \, \|y_{r+1} - y_r\| \ .$$

Induktiv folgt daraus, daß

$$\|y_{r+1} - y_r\| \le K^r \, \|y_1 - y_0\|$$

ist und damit nach der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}\|y_m - y_n\| &\le \|y_m - y_{m-1}\| + \cdots + \|y_{n+1} - y_n\| \\ &\le K^m \|y_1 - y_0\| + \cdots + K^n \|y_1 - y_0\| \\ &= (K^m + \cdots + K^n) \|y_1 - y_0\| \\ &= K^n(1 + K + \cdots + K^{m-n}) \|y_1 - y_0\| \\ &\le K^n \left(\sum_{i=0}^{\infty} K^i \right) \|y_1 - y_0\| = \frac{K^n}{1-K} \|y_1 - y_0\| \ .\end{aligned}$$

Wählen wir also N so, daß

$$\frac{K^N}{1-K} \|y_1 - y_0\| < \varepsilon$$

ist, gilt die Voraussetzung des CAUCHYschen Konvergenzkriteriums mit diesem N für alle $\tau \in [t_0,\, t_1]$. Somit konvergiert die Folge der Funktionen $y_n(t)$ *punktweise* gegen eine Funktion $y(t)$. Für jedes $\tau \in [t_0,\, t_1]$ ist dann

$$\begin{aligned}|y(\tau) - y_n(\tau)| &= \lim_{m\to\infty} |y_m(\tau) - y_n(\tau)| \le \lim_{m\to\infty} \|y_m - y_n\| \\ &\le \frac{K^n}{1-K} \|y_1 - y_0\| \ ,\end{aligned}$$

die Folge konvergiert also in $[t_0,\, t_1]$ *gleichmäßig* gegen $y(t)$. Damit ist $y(t)$ eine stetige Funktion, und der Satz ist bewiesen. ∎

STEFAN BANACH (1892–1945) wurde in Krakau geboren und ausgebildet, promovierte und arbeitete dann aber an der Universität von Lvov in der Ukraine, wo er unter schwierigen Bedingungen unter deutscher Besatzung den zweiten Weltkrieg verbrachte. Durch seine Arbeiten über lineare Operatoren und über Vektorräume von Funktionen wurde er zum Begründer der modernen Funktionalanalysis. Nach dem Krieg wollte er auf einen Lehrstuhl an der Universität Krakau wechseln, starb aber 1945 an Lungenkrebs. Das wichtigste mathematische Forschungsinstitut Polens, das Banach-Zentrum in Warschau, ist nach ihm benannt.

Als Anwendung erhalten wir den

Satz von Picard-Lindelöf: Die stetige Funktion

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \times [t_0,\, t_1] \to \mathbb{R} \\ \qquad (y,t) \mapsto f(y,t) \end{cases}$$

genüge einer LIPSCHITZ-Bedingung mit irgendeiner Konstanten $L \in \mathbb{R}$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = f\big(y(t), t\big) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = c_0$$

für jedes $c_0 \in \mathbb{R}$ eine in $[t_0,\, t_1]$ eindeutig bestimmte Lösung.

Beweis: Wir müssen zeigen, daß für den oben definierten Operator T mit

$$T(y)(t) \underset{\text{def}}{=} c_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(y(\tau), \tau\big)\, d\tau$$

und zwei beliebige stetige Funktionen z, w auf $[t_0,\, t_1]$

$$\|T(z) - T(w)\| \le K \|z - w\|$$

ist mit einer Konstanten $K < 1$. Links steht die Norm jener Funktion, die an der Stelle t den Wert

$$T(z)(t) - T(w)(t) = \int_{t_0}^{t} \Big(f\big(z(\tau), \tau\big) - f\big(w(\tau), \tau\big) \Big)\, d\tau$$

annimmt, und auf Grund der LIPSCHITZ-Bedingung ist

$$\big| f\big(z(\tau), \tau\big) - f\big(w(\tau), \tau\big) \big| \le L\, |z(\tau) - w(\tau)| \le L \|z - w\| \ .$$

Also ist für $t \in [t_0,\, t_1]$

$$\begin{aligned}&\left| \int_{t_0}^{t} \Big(f\big(z(\tau), \tau\big) - f\big(w(\tau), \tau\big) \Big)\, d\tau \right| \le \int_{t_0}^{t} L \|z - w\|\ d\tau \\ &= L \cdot (t - t_0) \|z - w\| \le L \cdot (t_1 - t_0) \|z - w\| \ .\end{aligned}$$

Falls $L \cdot (t_1 - t_0)$ kleiner als eins ist, haben wir eine Konstante $K < 1$ gefunden und können den BANACHschen Fixpunktsatz anwenden; er

liefert uns eine stetige Funktion $y(t)$, die der Bedingung

$$y(t) = c_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(y(\tau), \tau\right)\, d\tau$$

genügt. Da die rechte Seite wegen der Stetigkeit von f differenzierbar ist, haben wir sogar eine differenzierbare Funktion, und

$$\dot{y}(t) = f\left(y(t), t\right) .$$

Außerdem ist $y(t_0) = c_0$, da das Integral von t_0 bis t für $t = t_0$ verschwindet. Wir haben somit eine Lösung des Anfangswertproblems gefunden, und das ist die einzige Lösung, denn nach dem BANACHschen Fixpunktsatz hat T nur einen Fixpunkt.

Falls $L\cdot(t_1 - t_0)$ größer als eins ist, gibt es immerhin noch eine natürliche Zahl n, so daß $L \cdot (t_1 - t_0) < n$ ist. Wir unterteilen das Intervall $[t_0,\ t_1]$ in n gleich lange Teilintervalle $[\tau_i,\ \tau_{i+1}]$ mit Grenzen

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_{n-1} < \tau_n = t_1 ,$$

d.h. $\tau_i = t_0 + \dfrac{i}{n}(t_1 - t_0)$.

Für jedes dieser Intervalle ist dann $L \cdot (\tau_{i+1} - \tau_i) < 1$, insbesondere ist also das Anfangswertproblem im Anfangsintervall $[\tau_0,\ \tau_1]$ eindeutig lösbar.

Für die entsprechende Lösung sei $y(\tau_1) = c_1$. Dann betrachten wir im Intervall $[\tau_1,\ \tau_2]$ das entsprechende Anfangswertproblem mit $y(\tau_1) = c_1$ und erhalten eine in diesem Intervall eindeutige Lösung und so weiter, bis wir die Lösung auf ganz $[t_0, t_1]$ ausgedehnt haben. ∎

ÉMILE PICARD (1856–1941) wurde in Paris geboren und hatte an der dortigen Universität auch seine erste Stelle, bis er 1878 eine Professur in Toulouse bekam. 1898 wurde er Professor an der Sorbonne und kehrte nach Paris zurück, wo er auch starb. Seine Arbeiten beschäftigen sich mit der Analysis (z.B. dem gerade bewiesenen Satz) und der Geometrie.

Dort interessierte er sich für algebraische Flächen und die eng damit verbundenen algebraiscchen Funktionen zweier Veränderlichen sowie den zugehörigen Integralen. Weitere Arbeiten beschäftigen sich auch mit der Topologie von Flächen und wieder andere mit Anwendungen der Analysis in der Elektrodynamik, Wärmelehre und Elastizitätstheorie. Er war mit der Tochter von CHARLES HERMITE verheiratet.

ERNST LEONARD LINDELÖF (1870–1946) wurde in Helsinki geboren, als Finnland noch eine russische Provinz war. Sein Vater war Mathematikprofessor an der damals noch schwedischen (heute finnischen) Universität Helsingfors, an der später auch Lindelöf selbst sein Studium begann, unterbrochen durch Aufenthalte in Stockholm (1891), Paris (1893-1894) und Göttingen (1901). Der gerade bewiesene Satz stammt aus einer Arbeit von 1890; weitere Arbeiten beschäftigen sich mit analytischen Funktionen und Singularitäten. Nachdem er Professor in Helsingfors wurde, widmete er sich vor allem der Lehre und publizierte mehrere Bücher.

Die Anfangswertprobleme aus dem vorigen Abschnitt erfüllen offensichtlich allesamt *keine* LIPSCHITZ-Bedingung, denn sie sind ja nicht eindeutig lösbar. Im Falle von

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{2y(t)} \quad \text{mit} \quad y(0) = 0$$

ist

$$f(y, t) = \frac{1}{2y} ,$$

also

$$|f(y_2, t) - f(y_1(t)| = \left|\frac{1}{2y_2} - \frac{1}{2y_1}\right| = \frac{1}{|2y_1 y_2|}\,|y_2 - y_1| ,$$

und das kann man nur dann durch eine Schranke der Form $L\,|y_2 - y_1|$ abschätzen, wenn $1/\,|2y_1y_2|$ kleiner ist als L. In der Nähe des Nullpunkts kann $1/\,|2y_1y_2|$ aber beliebig groß werden, und somit kann hier keine LIPSCHITZ-Bedingung gelten.

Ähnlich verhält es sich beim Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = 2\sqrt{|y(t)|} \quad \text{mit} \quad y(0) = 0\,.$$

Hier ist

$$f(y,t) = 2\sqrt{|y(t)|}$$

zwar überall stetig, aber die Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y,t) = 2\frac{d}{dy}\sqrt{|y|} = \pm\frac{1}{\sqrt{|y|}}$$

mit Pluszeichen für $y > 0$ und Minuszeichen für $y < 0$ wächst bei Annäherung an den Nullpunkt betragsmäßig unbeschränkt, die Kurve wird also immer steiler, und damit zeigt der Mittelwertsatz der Differentialrechnung, daß es keine LIPSCHITZ-Konstante geben kann.

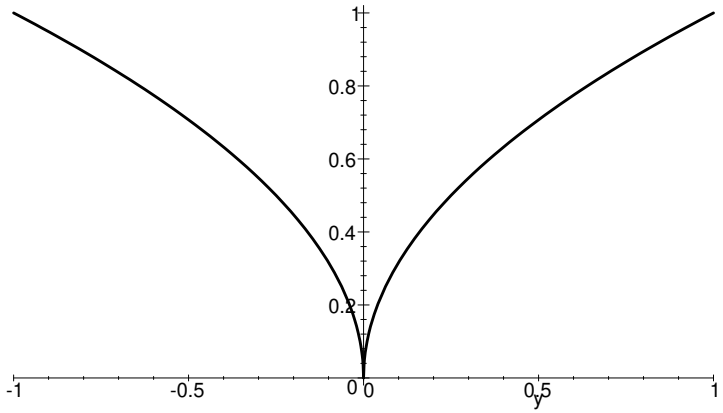


Abb. 35: Die Funktion $2\sqrt{|y|}$

Beim dritten Beispiel

$$\dot{y}(t) + \frac{y(t)}{2t^3} = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 0$$

schließlich ist

$$f(y,t) = -\frac{y}{2t^3}\,;$$

hier ist zwar die y-Abhängigkeit harmlos, aber

$$|f(y_2,t) - f(y_1,t)| = \frac{1}{|2t^3|}\,|y_2 - y_1|$$

läßt sich nicht durch durch eine Schranke der Form $L\,|y_2 - y_1|$ abschätzen, da $1/\,|2t^3|$ für t gegen null nicht beschränkt bleibt.

Obwohl in keinem der drei Fälle eine LIPSCHITZ-Bedingung erfüllt war, existierten doch immer Lösungen, und in der Tat reichen für die bloße Existenz von Lösungen deutlich schwächere Voraussetzungen als für Existenz und Eindeutigkeit. Nach einem Satz von PEANO etwa hat jedes Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = f\big(y(t),t\big) \quad \text{und} \quad y(t_0) = c_0$$

mit *stetigem* f mindestens eine Lösung. Der Beweis arbeiter wieder mit einer Iteration, nutzt allerdings die gleichgradige Stetigkeit einer Folge aus, um die Existenz und die Stetigkeit der Grenzfunktion zu zeigen. Da nichteindeutige Lösungen für Anwendungen meist nutzlos sind, wollen wir hier auf diesen Beweis verzichten.

GUISEPPE PEANO (1858–1932) war Sohn eines Landarbeiters und wuchs auf einem Bauernhof nahe Cuneo im Piemont auf. 1870 brachte ihn ein Bruder seiner Mutter nach Turin, wo er weiterführende Schulen und schließlich die Universität besuchte. Dort wurde er 1880 Assistent und 1890 Professor. Den gerade erwähnten Existenzsatz bewies er 1886, und 1890 zeigte er, daß das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = 3y^{2/3}$ mit $y(0) = 0$ mehrere Lösungen hat. Die berühmten PEANO-Axiome für die natürlichen Zahlen veröffentlichte er 1889, und zwar aus unerfindlichen Gründen in lateinischer Sprache. Später beschäftigte er sich vor allem mit Logik.

c) Eindeutigkeitsprobleme für Systeme

Natürlich können alle Probleme, die wir vom Eindimensionalen her kennen, auch im Mehrdimensionalen auftreten; auch bei Systemen von

Differentialgleichungen muß man sich also um die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen Gedanken machen. Zum Glück geht alles fast genauso wie im eindimensionalen Fall.

Wir betrachten ein Anfangswertproblem

$$\dot{\vec{y}}(t) = f\big(\vec{y}(t), t\big) \quad \text{und} \quad \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$$

mit einer Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^n \times [t_0,\, t_1] \to \mathbb{R}^n \,.$$

Ausgeschrieben ist also

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f(\vec{y}, t) = \begin{pmatrix} f_1(y_1, \ldots, y_n, t) \\ \vdots \\ f_n(y_1, \ldots, y_n, t) \end{pmatrix}$$

mit Funktionen $f_i\colon \mathbb{R}^n \times [t_0,\, t_1] \to \mathbb{R}$.

Wir versehen den $\mathbb{R}^n$ mit der Maximumsnorm

$$\|\vec{v}\| = \max_{i=1}^{n} |v_i|$$

und sagen, die Funktion f oder auch das obige System erfülle eine LIPSCHITZ-Bedingung, wenn es eine Konstante $L \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für alle $\vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ und alle $t \in [t_0,\, t_1]$ gilt

$$\big\| f\big(\vec{z}, t\big) - f\big(\big(\vec{y}, t\big)\big\| \le L \, \|\vec{z} - \vec{y}\| \,.$$

Dann gilt auch hier der

Satz von Picard und Lindelöf: Falls f stetig ist und eine LIPSCHITZ-Bedingung erfüllt, hat jedes Anfangswertproblem

$$\dot{\vec{y}}(t) = f\big(\vec{y}(t), t\big) \quad \text{mit} \quad \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$$

im Intervall $[t_0,\, t_1]$ eine eindeutig bestimmte Lösung.

Der *Beweis* geht fast wörtlich genauso wie im Eindimensionalen: Wir schreiben das System um als

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\vec{y}(\tau), \tau\big)\, d\tau \,,$$

wobei das Integral über einen Vektor von Funktionen einfach der Vektor der Integrale über die Komponenten sein soll:

$$\int_{t_0}^{t} f\big(\vec{y}(\tau), \tau\big)\, d\tau = \begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t} f_1\big(\vec{y}(\tau), \tau\big)\, d\tau \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{t} f_n\big(\vec{y}(\tau), \tau\big)\, d\tau \end{pmatrix} \,.$$

Sodann definieren wir eine Supremumsnorm durch

$$\|\vec{y}(t)\| \underset{\text{def}}{=} \max_{i=1}^{n} \sup_{t \in [t_0,\, t_1]} |y_i(t)| \,,$$

beweisen auch hierfür einen BANACHschen Fixpunktsatz und folgern schließlich daraus den Satz von PICARD und LINDELÖF. ∎

d) Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen

Es gibt eine ganze Reihe von Typen elementar integrierbarer nichtlinearer Differentialgleichungen; die meisten davon sind allerdings außerhalb von Lehrbüchern über Differentialgleichungen nur selten anzutreffen. Zwei Ausnahmen sind wichtig genug, um hier behandelt zu werden: Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen und exakte Differentialgleichungen.

Wir betrachten zunächst Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen.

Darunter versteht man Differentialgleichungen der Form

$$\dot{y}(t) = f\big(y(t), t\big) \,,$$

bei denen sich die Funktion $f(y, t)$ als Produkt einer Funktion von y und einer Funktion von t schreiben läßt. Da die Funktion von y besser keine Nullstellen haben sollte, setzen wir ihren Kehrwert in den Nenner und schreiben die Differentialgleichung somit als

$$\dot{y}(t) = \frac{g(t)}{h\big(y(t)\big)} \,.$$

Multiplikation mit dem Nenner und Integration führen auf

$$h\big(y(t)\big)\, \dot{y}(t) = g(t) \quad \text{und} \quad \int h\big(y(t)\big)\, \dot{y}(t)\, dt = \int g(t)\, dt \,.$$

Das linke Integral ist nach der Substitutionsregel einfach $\int h(y)\,dy$, wir erhalten also mit

$$\int h(y)\,dy = \int g(t)\,dt + C$$

eine Beziehung zwischen y und t. Damit sind die Lösungsfunktionen zumindest implizit dargestellt.

Falls eine Anfangsbedingung der Form $y(t_0) = y_0$ gegeben ist, können wir die spezielle Lösung mit dieser Anfangsbedingung auch direkt darstellen durch die Gleichung

$$\int_{y_0}^{y} h(\eta)\,d\eta = \int_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau\,,$$

die für $t = t_0$ und $y = y_0$ offensichtlich erfüllt ist.

Ein erstes Beispiel kennen wir bereits: Eine lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{y}(t) = a(t) \cdot y(t)$$

mit $y(t) \neq 0$ läßt sich auf diese Form bringen mit

$$g(t) = a(t) \quad \text{und} \quad h(y) = \frac{1}{y}\,;$$

wir erhalten also die Beziehung

$$\int \frac{dy}{y} = \int a(t)\,dt \quad \text{oder} \quad \ln y = \int a(t)\,dt + C\,.$$

Diese Gleichung läßt sich durch Anwendung der Exponentialfunktion auflösen; wir erhalten das Ergebnis

$$y(t) = e^{\int a(t)\,dt + C}\,.$$

Als zweites Beispiel betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = -\frac{t}{y(t)} \quad \text{mit} \quad y(0) = 2\,.$$

Trennung der Veränderlichen und Integration führt auf

$$\int_{2}^{y} \eta\,d\eta = -\int_{0}^{t} d\tau \quad \text{oder} \quad \frac{y^2}{2} - \frac{2^2}{2} = -\frac{t^2}{2}\,.$$

Dies führt auf

$$y(t)^2 = 4 - t^2 \quad \text{oder} \quad y(t) = \pm\sqrt{4 - t^2}\,,$$

aber tatsächlich ist die Anfangsbedingung $y(0) = 2$ nur dann erfüllt, wenn in Pluszeichen vor der Wurzel steht, d.h.

$$y(t) = \sqrt{4 - t^2}\,.$$

Beim Auflösen der Gleichung nach y muß also nochmals die Anfangsbedingung ins Spiel gebacht werden, was eigentlich niemanden verwundern sollte: Eine nichtlineare Gleichung hat nur selten eine eindeutig bestimmte Lösung, wohingegen der Satz von PICARD-LINDELÖF zeigt, daß Anfangswertprobleme oft eindeutig lösbar sind. Von den mehreren Lösungen der impliziten Gleichung, die wir bei einer Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen bekommen, wird daher meist nur eine das Anfangswertproblem lösen.

Etwas komplizierter ist das Beispiel

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{\cos^2 2t \cos^2 3y}\,;$$

Hier erhalten wir

$$\int \cos^2 3y\,dy = \int \frac{dt}{\cos^2 2t}\,.$$

Partielle Integration links und die Erinnerung an die Ableitung des Tangens für das rechte Integral führen auf die Beziehung

$$\frac{1}{6}\cos 3y \sin 3y + \frac{y}{2} = \frac{1}{2}\tan 2t + C\,,$$

die wir mittels der Beziehung

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

noch etwas vereinfachen können zu

$$y + \frac{1}{6}\sin 6y = \tan 2t + C' \,.$$

Trotzdem dürfte es ziemlich hoffnungslos sein, wenn wir versuchen, nach y aufzulösen. Die Auflösung nach t ist aber problemlos, so daß wir mit

$$t = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sin 6y}{6} + y - C'\right)$$

wenigstens die Umkehrfunktion der Lösungsfunktion explizit darstellen können.

Als letztes Beispiel schließlich wollen wir eine Differentialgleichung betrachten, die auch von unabhängigem Interesse ist, die *logistische Gleichung*

$$\dot{y}(t) = \lambda y(t)\big(K - y(t)\big) \quad \text{mit} \quad \lambda, K > 0 \,.$$

Sie beschreibt das Wachstum einer Population $y(t)$, deren Wachstumsrate sich immer weiter verlangsamt je mehr sich $y(t)$ an die Grenze K annähert. Für $y(t) = K$ ist $\dot{y}(t) = 0$, die Bevölkerungszahl bleibt also stabil, und für $y(t) > K$ ist $\dot{y}(t)$ negativ, d.h. die Bevölkerungszahl sinkt.

Dieses Modell wurde 1846 von dem belgischen Mathematiker PIERRE FRANÇOIS VERHULST (1804–1849) vorgeschlagen und unter anderem auf die Bevölkerungsentwicklung in Belgien angewandt. Er kam damals auf einen Schätzwert $K \approx 9\,400\,000$, der sich nicht sehr von der derzeitigen Bevölkerungszahl 10 152 000 *(Stand 1999)* unterscheidet

Da auf der rechten Seite der Differentialgleichung nur eine Funktion von y steht, haben wir trivialerweise eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen, und im interessanten Bereich

$$0 < y(t) < K$$

gibt es auch keine Probleme mit Nullstellen des Nenners. Wir erhalten damit

$$\int \frac{dy}{\lambda y(t)\big(K - y(t)\big)} = \int dt = t - t_0 \,,$$

wobei der Grund für die Schreibweise der Integrationskonstante als $-t_0$ gleich klar werden wird.

Das Integral links kann durch Partialbruchzerlegung berechnet werden; da

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{K - y} = \frac{K}{y(K - y)}$$

ist, folgt

$$\frac{1}{\lambda y(K - y)} = \frac{1}{\lambda K}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{K - y}\right)$$

und

$$\int \frac{dy}{\lambda y(t)\big(K - y(t)\big)} = \frac{1}{\lambda K}\big(\ln y - \ln(K - y)\big) = \frac{1}{\lambda K}\ln\frac{y}{K - y} \,.$$

Die Umkehrfunktion der Lösungsfunktion ist also

$$t = t_0 + \frac{1}{\lambda K}\ln\frac{y}{K - y} \,.$$

Wir können auch nach y auflösen:

$$\frac{y}{K - y} = e^{\lambda K(t - t_0)} \Longrightarrow \frac{K - y}{y} = e^{-\lambda K(t - t_0)} \Longrightarrow \frac{K}{y} = 1 + e^{-\lambda K(t - t_0)} \,,$$

und damit ist schließlich

$$y(t) = \frac{K}{1 + e^{-\lambda K(t - t_0)}} \,.$$

Speziell ist $y(t_0) = K/2$, die Integrationskonstante gibt also den Zeitpunkt an, zu dem die Population ihre halbe Maximalstärke erreicht hat.

Differenzieren der logistischen Differentialgleichung ergibt

$$\ddot{y}(t) = \lambda y(t)\big(-\dot{y}(t)\big) + \lambda\dot{y}(t)\big(K - y(t)\big) = \lambda\dot{y}(t)\big(K - 2y(t)\big) \,,$$

die Wachstumsrate $\dot{y}(t)$ steigt also, solange $y(t) < K/2$ oder $t < t_0$ ist, danach beginnt sie zu sinken. Dementsprechend ist der Graph der Lösungsfunktion $y(t)$ konkav für $t < t_0$ und konvex für $t > t_0$; bei $t = t_0$

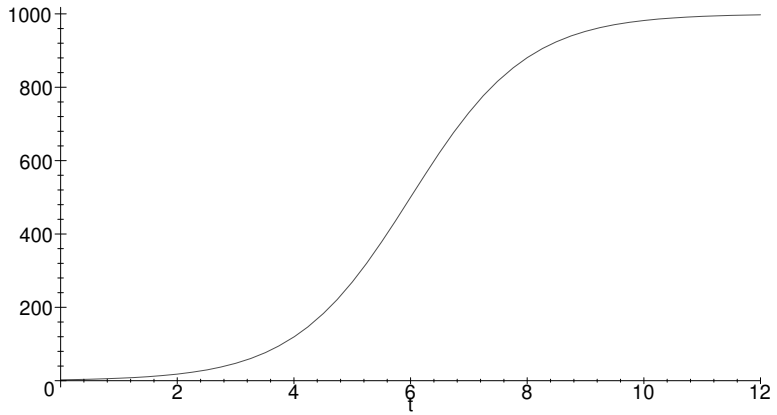


Abb. 36: Eine Lösungskurve der logistischen Differentialgleichung

sitzt der einzige Wendepunkt. Da diese Kurvenform an ein langestrecktes S erinnert, spricht man von einer *sigmoiden* Kurve; der Leser kann sich aussuchen, ob er sich eher an σ, ς oder Σ erinnert fühlt.

Solche Kurven werden beispielsweise bei Erneuerungsprozessen oft beobachtet; ist etwa $y(t)$ = Prozentsatz aller in Frage kommender Personen oder Firmen, die zum Zeitpunkt t bereits eine technische oder sonstige Neuerung eingeführt haben, so genügt auch $y(t)$ ungefähr einer logistischen Gleichung. Dies erscheint plausibel, denn ein potentieller Anwender erfährt von der Neuerung im Gespräch mit jemandem, der sie schon eingeführt hat; es gibt am Anfang also um so mehr Zuwachs bei $y(t)$ je größer $f(t)$ ist. Andererseits kann ein Prozentsatz nie größer als 100 werden, so daß die Steigerungsrate gegen Null gehen muß, wenn sich $y(t)$ der 100%-Grenze nähert. Vergleiche zwischen diesem Modell und vielen tatsächlichen Erneuerungsprozessen findet man etwa bei

C.T. FISCHER, R.H. PRY: A simple substitution model of technological change, *Technological Forecasting and Social Changes* **3** (1971), 75–88.

VERHULST führte die logistische Gleichung, wie bereits erwähnt, zur Modellierung des Bevölkerungswachstums ein, allerdings zeigen weder die Daten für die Bundesrepublik Deutschland noch die für die Weltbevölkerung eine gute Übereinstimmung mit diesem Modell. Seit 1940

immer wieder als Beispiel zitiert wird aber die Bevölkerung der Vereinigten Staaten von Amerika, das wir uns deshalb etwas genauer anschauen wollen:

Die Vereinigten Staaten führen seit 1790 in jedem zehnten Jahr einen „Census“ durch, in dessen Rahmen insbesondere auch die Gesamteinwohnerzahl festgestellt wird; sie bieten daher ein ideales Beispiel, für einen über einen langen Zeitraum hinweg dokumentierten Wachtumsprozess. Zwar hat sich das Territorium der USA seit 1790 gewaltig vergrößert, aber da Staaten wie das 1867 für $7 200 000 dazugekaufte Alaska kaum Einwohner haben, ist der Effekt dieser Änderungen auf die Bevölkerungszahlen fast vernachlässigbar – besonders wenn man bedenkt, daß Volkszählungsdaten notorisch unzuverlässig sind. Wir betrachten daher die Daten, wie sie bei den einzelnen Volkszählung für das jeweils aktuelle Territorium ermittelt wurden.

Das U.S. Department of Commerce, Bureau of the Census, veröffentlicht diese Daten ohne jegliche Rundung; in der folgenden Tabelle sind sie zur besseren Übersicht auf volle Hunderttausender gerundet und in Einheiten von einer Million Einwohner angegeben.

Bevölkerungsentwicklung in den USA 1790–2000

Jahr:	1790	1800	1810	1820	1830	1840
Bevölkerung:	3,9	5,3	7,2	9,6	12,9	17,1
Jahr:	1850	1860	1870	1880	1890	1900
Bevölkerung:	23,2	31,4	38,6	50,2	63,0	76,2
Jahr:	1910	1920	1930	1940	1950	1960
Bevölkerung:	92,2	106,0	123,2	132,2	151,3	179,3
Jahr:	1970	1980	1990	2000		
Bevölkerung:	203,3	226,5	248,7	281,4		

Quelle: http://www.census.gov/main/www/cen2000.html

Die graphische Darstellung in Abbildung 37 zeigt die Datenpunkte zusammen mit einer logistischen Kurve; wie man sieht, ist die Übereinstimmung recht gut, aber bei weitem nicht perfekt.

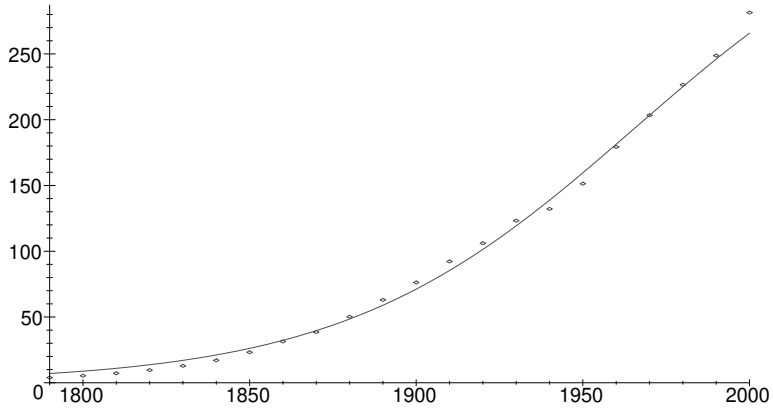


Abb. 37: U.S. Population Census 1790–2000 mit logistischer Kurve

Eine bessere Modellierung mit *zwei* logistischen Kurven zeigt Abbildung 38: Die erste Kurve, die den Datenpunkten bis 1940 angepaßt ist, hat eine Grenzkapazität K von 190 Millionen Einwohner, die zweite, für die Daten ab 1950, hat $K = 356$ Millionen.

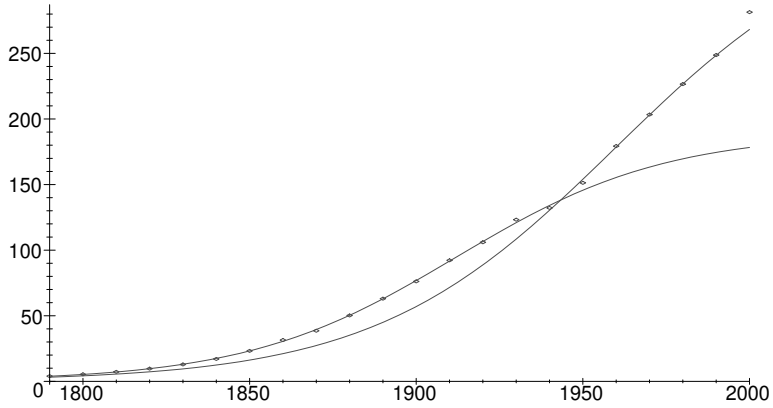


Abb. 38: U.S. Population Census 1790–2000 mit zwei logistischen Kurven

Historisch ist diese Beinahe-Verdoppelung leicht zu erklären: Schließlich

gingen die USA aus dem zweiten Weltkrieg als Weltmacht hervor, und eine solche hat die Macht, auch teilweise auf Kosten anderer Staaten zu leben. Von daher erscheint es durchaus nachvollziehbar, daß sich die Grenzkapazität des Systems USA nach dem zweiten Weltkrieg deutlich vergrößert hat.

Erklärungsbedürftig ist auch der deutlich über der Kurve liegende Wert für 2000. Anhand der vorhandenen Daten läßt sich allerdings nicht beurteilen, ob es sich hier um den Beginn eines neuen Trends handelt, oder ob die ermittelte Bevölkerungszahl für das Jahr 2000 womöglich einfach dadurch zu erklären ist, daß die Vereinigten Staaten im Jahr 2000 Probleme mit dem Zählen hatten. Wenn in fünfzig Jahren fünf weitere Werte vorliegen, wird man mehr sagen können.

e) Exakte Differentialgleichungen und integrierende Faktoren

Im letzten Abschnitt ließ sich die Lösung einer Differentialgleichung gelegentlich nur in der impliziten Form $\Phi(y, t, C) = 0$ angeben, wobei C die Integrationskonstante war.

Falls die Lösungsfunktionen, wie dies im allgemeinen der Fall sein wird, wirklich von C abhängen, kann die partielle Ableitung von Φ nach C nicht überall verschwinden; der Satz über implizite Funktionen (**[HM I]**, *Kap. 2,* §*3d*) sagt uns, daß die Gleichung $\Phi(y, t, C) = 0$ überall dort nach C aufgelöst werden kann, wo diese partielle Ableitung von Null verschieden ist. Dort lassen sich die Lösungen mit einer geeigneten Funktion F also auch in der Form

$$F(y, t) = C$$

schreiben.

Umgekehrt können wir jede Kurvenschar, die durch eine Gleichung dieser Art implizit gegeben ist, als Lösungsmenge einer linearen Differentialgleichung interpretieren: Setzen wir für y eine Funktion $y(t)$ ein, so ist nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}F\big(y(t), t\big) = \frac{\partial F}{\partial y}\big(y(t), t\big) \cdot \dot{y}(t) + \frac{\partial F}{\partial y}\big(y(t), t\big) \ .$$

Da $F\big(y(t),t\big) = 0$ ist, muß dies verschwinden; die gesuchte Differentialgleichung ist also

$$\frac{\partial F}{\partial y}\big(y(t),t\big) \cdot \dot{y}(t) + \frac{\partial F}{\partial y}\big(y(t),t\big) = 0\,.$$

Andererseits verschwindet die Ableitung einer Funktion genau dann, wenn die Funktion konstant ist; die Lösungen dieser Differentialgleichung sind also genau die Funktionen, die (in impliziter Form) gegeben sind durch

$$F\big(y(t),t\big) = C \quad \text{mit} \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Als Beispiel betrachten wir die Schar von Kreisen

$$y^2 + t^2 = r^2 \quad \text{mit} \quad r \in \mathbb{R}\,.$$

Hier ist $F(y,t) = y^2 + t^2$, also erhalten wir die Differentialgleichung

$$2y(t) \cdot \dot{y}(t) + 2t = 0\,,$$

was sich auch als

$$y(t) \cdot \dot{y}(t) = -t$$

schreiben läßt. In dieser Form haben wir eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen; Integration links und rechts liefert

$$\int y\,dy = -\int t\,dt \quad \text{oder} \quad \frac{y^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + C\,.$$

Da die Summe zweier Quadrate nicht negativ sein kann, hat diese Gleichung nur für $C \geq 0$ eine Lösung (wobei der Fall $C = 0$ in unserem Zusammenhang nichts brauchbares liefert), also können wir $C = r^2/2$ setzen und erhalten dann genau die obigen Kreisgleichungen.

Hier ist die implizite Lösung sogar nützlicher als die explizite: Auflösen nach y liefert die *beiden* Lösungen

$$y(t) = \pm\sqrt{r^2 - t^2}\,,$$

wobei man jeweils anhand der Anfangsbedingung das richtige Vorzeichen finden muß. Bei einer Anfangsbedingung der Form $y(t_0) = 0$ ist das nicht möglich; hier lösen beide Funktionen

$$y_1(t) = \sqrt{r^2 - t_0^2} \quad \text{und} \quad y_2(t) = -\sqrt{r^2 - t_0^2}$$

das Anfangswertproblem. Bei einer Anfangsbedingung der Form $y(t_0) = c_0 \neq 0$ dagegen gibt es nur die Lösung, bei der das Vorzeichen gleich dem von c_0 ist. Das ist natürlich auch genau das, was wir nach dem Satz von PICARD-LINDELÖF erwarten, denn die rechte Seite der Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = \frac{-t}{y(t)}$$

erfüllt überall dort eine LIPSCHITZ-Bedingung, wo y nicht verschwindet.

In diesem Abschnitt wollen wir uns allgemein mit Differentialgleichungen beschäftigen, deren Lösungen in einer impliziten Form

$$F(y,t) = C \quad \text{mit} \quad C \in \mathbb{R}$$

dargestellt werden können.

Wie wir oben gesehen haben, ist

$$\frac{\partial F}{\partial y}\big(y(t),t\big) \cdot \dot{y}(t) + \frac{\partial F}{\partial y}\big(y(t),t\big) = 0$$

eine Differentialgleichung mit diesen Lösungen; diese Differentialgleichung bezeichnen wir als *exakt:*

Definition: Die Differentialgleichung

$$a(y,t)\dot{y}(t) + b(y,t) = 0$$

heißt *exakt,* wenn es eine differenzierbare Funktion $F(y,t)$ gibt mit

$$\frac{\partial F}{\partial y}(y,t) = a(y,t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial t}(y,t) = b(y,t)\,.$$

Zu diesen exakten Differentialgleichungen zählen insbesondere auch die Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen aus dem letzten Abschnitt. Diese hatten wir in der Form

$$h\big(y(t)\big)\,\dot{y}(t) = g(t) \quad \text{oder} \quad h\big(y(t)\big)\,\dot{y}(t) - g(t) = 0$$

geschrieben; mit

$$F(y,t) = \int h(y)\,dy - \int g(t)\,dt$$

ist hier gerade

$$\frac{\partial F}{\partial y}(y,t) = h(y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial t}(y,t) = -g(t)\,.$$

Andererseits ist aber nicht jede Differentialgleichungen der Form

$$a(y,t)\dot{y}(t) + b(y,t) = 0 \qquad (\star)$$

exakt: Dazu brauchen wir noch zusätzlich eine Funktion $F(y,t)$, so daß

$$\frac{\partial F}{\partial y}(y,t) = a(y,t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial t}(y,t) = b(y,t)$$

ist oder, mit anderen Worten,

$$\nabla F(y,t) = \operatorname{grad} F(y,t) = \begin{pmatrix} a(y,t) \\ b(y,t) \end{pmatrix}.$$

Die Differentialgleichung $(\star)$ ist also genau dann exakt, wenn das Vektorfeld $\binom{a(y,t)}{b(y,t)}$ eine Stammfunktion hat.

Dies kann für differenzierbare Funktionen a und b nach dem Lemma von SCHWARTZ (**[HM I]**, Kapitel 2, §2) nur dann der Fall sein, wenn

$$\frac{\partial a}{\partial t}(y,t) = \frac{\partial b}{\partial y}(y,t)$$

ist. Umgekehrt reicht diese Bedingung nach **[HM I]**, Kapitel 2, §6*f)* aus für die Existenz einer Stammfunktion, *falls* das Vektorfeld auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet definiert ist, falls es also keine Löcher im Definitionsbereich gibt, wie sie etwa durch Nullstellen von Nennern verursacht sein können. Insbesondere reicht die Bedingung also aus, wenn beide Funktionen auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert sind oder in einem Rechteck oder einer Kreisscheibe.

Als Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung

$$te^{-ty(t)}\dot{y}(t) + 6t^2 + ye^{-ty(t)} = 0\,.$$

Diese Gleichung ist exakt, denn beide Koeffizientenfunktionen sind auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert und

$$\frac{\partial}{\partial t}te^{-ty(t)} = \frac{\partial}{\partial y}(6t^2 + ye^{-ty(t)}) = e^{-ty(t)} - tye^{-ty(t)}\,.$$

Für die Stammfunktion F des Vektorfelds ist einerseits

$$\frac{\partial F}{\partial y}(y,t) = te^{-ty}, \quad \text{also} \quad F(y,t) = -e^{-ty} + h_1(t)$$

mit irgendeiner nur von t abhängigen Funktion h_1 und andererseits

$$\frac{\partial F}{\partial t}(y,t) = 6t^2 + ye^{-ty(t)}, \quad \text{also} \quad F(y,t) = 2t^3 - e^{-ty} + h_2(y)$$

mit irgendeiner nur von y abhängigen Funktion h_2. Abgesehen von einer additiven Konstanten, die wir nach Belieben addieren können, passen die beiden Formeln genau dann zusammen, wenn

$$F(y,t) = 2t^3 - e^{-ty}$$

ist; für die Lösungsfunktionen der Differentialgleichung ist also

$$F\big(y(t),t\big) = 2t^3 - e^{-ty(t)} = C \quad \text{oder} \quad e^{-ty(t)} = 2t^3 - C$$

mit einer beliebigen Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Hier läßt sich diese implizite Gleichung unschwer nach $y(t)$ auflösen; wir erhalten

$$y(t) = -\frac{\ln(2t^3 - C)}{t} \quad \text{mit} \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Beispiel einer nichtexakten Differentialgleichung der Form $(\star)$ ist etwa

$$t^2y(t)\dot{y}(t) + t^3y(t) = 0 \quad \text{mit} \quad a(y,t) = t^2y \ \text{ und } \ b(y,t) = t^3\,,$$

denn hier ist

$$\frac{\partial a}{\partial t}(y,t) = 2ty, \quad \text{aber} \quad \frac{\partial b}{\partial y}(y,t) = 0\,.$$

Trotzdem können wir diese Differentialgleichung lösen: Wenn wir durch t^2 dividieren, erhalten wir die obige Differentialgleichung für konzentrische Kreise um den Nullpunkt, und da eine differenzierbare Funktion durch ihre Werte für $t \neq 0$ auch im Nullpunkt eindeutig festgelegt ist, verlieren wir durch die Division keine Lösungen.

Genau wie nur wenige Vektorfelder Stammfunktionen haben, sich auch nur wenige Differentialgleichungen exakt. In manchen Fällen kann man sie aber immerhin exakt machen: Die Differentialgleichung

$$t^2\dot{y}(t) + ty + 1 = 0$$

beispielsweise ist nicht exakt, da

$$\frac{\partial t^2}{\partial t} = 2t \quad \text{und} \quad \frac{\partial (ty+1)}{\partial y} = t$$

voneiander verschieden sind. Multipliziert man die Gleichung aber mit e^{ty}, so wird sie exakt, denn

$$\frac{\partial (t^2 e^{ty})}{\partial t} = \frac{\partial (ty+1)e^{ty}}{\partial y} = (t^2 y + 2t)e^{ty} ,$$

und in der Tat sind $t^2 e^{ty}$ und $(ty+1)e^{ty}$ die partiellen Ableitungen von $F(y,t) = te^{ty}$ nach y und nach t.

An den Lösungen der Gleichung ändert sich durch die Multiplikation mit der nirgends verschwindenden Funktion e^{ty} nichts, sie sind also also gegeben durch die implizite Gleichung

$$te^{ty(t)} = C$$

oder explizit durch

$$y(t) = \frac{1}{t} \ln \frac{C}{t} ,$$

wie man sich leicht durch Einsetzen überzeugen kann. Diese Lösung existiert bei positivem C nur für $t > 0$, bei negativem nur für $t < 0$. Für $C = 0$ definiert $te^{ty(t)} = 0$ keine Funktion $y(t)$.

Wenn eine Differentialgleichung durch Multiplikation mit einer Funktion $\varphi(y,t)$ exakt gemacht werden kann, nennt man $\varphi(y,t)$ einen *integrierenden Faktor*. Ihn zu finden, kann im allgemeinen sehr schwierig sein: Einen einfach zusammenhängenden Definitionsbereich vorausgesetzt, ist die Gleichung

$$\varphi\big(y(t),t\big)\, a\big(y(t),t\big)\, \dot{y}(t) + \varphi\big(y(t),t\big)\, b\big(y(t),t\big) = 0$$

genau dann exakt, wenn die partiellen Ableitungen des ersten Koeffizienten nach t und des zweiten Koeffizienten nach y miteinander übereinstimmen, wenn also

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(y,t) \cdot a(y,t) + \varphi(y,t) \frac{\partial a(y,t)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y,t) \cdot b(y,t) + \varphi(y,t) \frac{\partial b(y,t)}{\partial y}$$

ist. Diese Gleichung für gegebene Funktionen a und b zu lösen ist leider fast aussichtslos; lediglich in wenigen speziellen Fällen kann man eine eine Lösung wirklich hinschreiben:

Sucht man ein φ, das von t abhängt, vereinfacht sich obige Gleichung zu

$$\dot{\varphi}(t) \cdot a(y,t) = \varphi(t) \left(\frac{\partial b(y,t)}{\partial y} - \frac{\partial a(y,t)}{\partial t} \right)$$

oder

$$\frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)} = \frac{\frac{\partial b(y,t)}{\partial y} - \frac{\partial a(y,t)}{\partial t}}{a(y,t)} .$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist die Ableitung von $\ln \varphi(t)$; falls die rechte Seite unabhängig von y ist, also nur eine Funktion $\psi(t)$, so ist also

$$\varphi(t) = e^{\int \psi(t)\, dt} .$$

Entsprechend kann man argumentieren, wenn φ nur von y abhängen soll; bezeichnen wir die Ableitung nach y durch einen Strich, wird dann die Gleichung zu

$$\varphi'(y) \cdot b(y,t) = \varphi(y) \left(\frac{\partial a(y,t)}{\partial t} - \frac{\partial b(y,t)}{\partial y} \right)$$

oder

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \frac{\frac{\partial a(y,t)}{\partial t} - \frac{\partial b(y,t)}{\partial y}}{b(y,t)} .$$

Falls die rechte Seite nicht von t abhängt, also eine Funktion $\omega(y)$ ist, folgt wie oben

$$\varphi(y) = e^{\int \omega(y)\, dy} .$$

Ist also

$$\frac{\frac{\partial b(y,t)}{\partial y} - \frac{\partial a(y,t)}{\partial t}}{a(y,t)} \quad \text{unabhängig von } y$$

oder

$$\frac{\frac{\partial a(y,t)}{\partial t} - \frac{\partial b(y,t)}{\partial y}}{b(y,t)} \quad \text{unabhängig von } t ,$$

läßt sich ein integrierender Faktor auch algorithmisch produzieren; ansonsten kann sich die Suche als schwierig erweisen.

Im obigen Beispiel ist $a(y,t) = t^2$ und $b(y,t) = yt + 1$, also

$$\frac{\frac{\partial a(y,t)}{\partial t} - \frac{\partial b(y,t)}{\partial y}}{b(y,t)} = \frac{t}{yt+1}$$

auch von t abhängig, so daß es keinen integrierenden Faktor gibt, der nur von y abhängt. Da aber

$$\frac{\frac{\partial b(y,t)}{\partial y} - \frac{\partial a(y,t)}{\partial t}}{a(y,t)} = \frac{-t}{t^2} = -\frac{1}{t}$$

nur von t abhängt, gibt es einen integrierenden Faktor, der nur von t abhängt, nämlich

$$\varphi(t) = e^{-\int \frac{dt}{t}} = e^{-\ln t} = \frac{1}{t}\,.$$

In der Tat ist

$$t\dot{y}(t) + y + \frac{1}{t} = 0$$

eine exakte Differentialgleichung, und

$$F(y,t) = yt + \ln t$$

ist eine Stammfunktion, die (abgesehen von der etwas anderen Form der Integrationskonstanten) auf dieselbe Lösung führt wie das obige F.

Integrierende Faktoren, die sowohl von y als auch von t abhängen, können gelegentlich über Symmetriebetrachtungen gefunden werden: Die Differentialgleichung

$$a(y,t)\dot{y}(t) + b(y,t) = 0$$

habe die (unbekannte) Lösung $F(y,t) = C$ mit $C \in \mathbb{R}$. Angenommen, wie kennen eine Transformation der Koordinaten, die in Abhängigkeit von einem Paramter ε eine Lösungskurve $F(y,t) = C$ überführt in eine neue Lösungskurve $F(y_\varepsilon, t_\varepsilon) = C_\varepsilon$, wobei $\varepsilon = 0$ der Ausgangslösung entsprechen soll. Nach dem Satz über implizite Funktionen können wir dann auch eine Transformation finden, für die $C_\varepsilon = C + \varepsilon$ ist. Es könnte schwierig sein, so eine Transformation explizit anzugeben; es reicht uns

allerdings, wenn wir sie nur in erster Näherung kennen, d.h. bis auf Terme, die schneller gegen null gehen als ε:

$$y_\varepsilon = y + \varepsilon\eta(y,t) + o(\varepsilon) \quad \text{und} \quad t_\varepsilon = t + \varepsilon\tau(y,t) + o(\varepsilon)\,.$$

Dann ist

$$C + \varepsilon = F(y_\varepsilon, t_\varepsilon) = F(y,t) + \varepsilon\big(F_y(y,t)\eta(y,t) + F_t(y,t)\tau(y,t)\big) + o(\varepsilon)\,,$$

also

$$F_y(y,t)\eta(y,t) + F_t(y,t)\tau(y,t) = 1\,. \qquad (*)$$

Außerdem ist nach dem Satz über implizite Funktionen

$$\dot{y}(t) = -\frac{F_t(y,t)}{F_y(y,t)}\,;$$

da $y(t)$ Lösung der Differentialgleichung ist, folgt

$$-a(y,t)\frac{F_t(y,t)}{F_y(y,t)} + b(y,t) = 0$$

oder

$$-b(y,t)F_y(y,t) + a(y,t)F_t(y,t) = 0\,.$$

Diese Gleichung, zusammen mit Gleichung $(*)$ ist ein lineares Gleichungssystem für $F_y(y,t)$ und $F_t(y,t)$; nach der CRAMERschen Regel hat es die Lösung

$$F_y(y,t) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \tau(y,t) \\ 0 & a(y,t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \eta(y,t) & \tau(y,t) \\ -b(y,t) & a(y,t) \end{vmatrix}} = \frac{a(y,t)}{\eta(y,t)a(y,t) + \tau(y,t)b(y,t)}$$

und

$$F_t(y,t) = \frac{\begin{vmatrix} \eta(y,t) & 1 \\ -b(y,t) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \eta(y,t) & \tau(y,t) \\ -b(y,t) & a(y,t) \end{vmatrix}} = \frac{b(y,t)}{\eta(y,t)a(y,t) + \tau(y,t)b(y,t)}\,.$$

Insbesondere ist

$$\frac{F_y(y,t)}{a(y,t)} = \frac{F_t(y,t)}{b(y,t)} = \frac{1}{\eta(y,t)a(y,t) + \tau(y,t)b(y,t)}$$

ein integrierenden Faktor.

f) Qualitative Theorie

Ein allgemeines System

$$\dot{\vec{y}}(t) = f\left(\vec{y}(t), t\right)$$

wird nur selten eine Lösung haben, die sich in geschlossener Form angeben läßt; meist wird man sich mit (nicht immer unproblematischen) numerischen Näherungslösungen begnügen müssen. In diesem letzten Abschnitt des Paragraphen über Differentialgleichungen wollen wir uns, hauptsächlich anhand von Beispielen, überlegen, wie man auch bei solchen nicht explizit lösbaren Gleichungen zu Aussagen über das Verhalten der Lösungsfunktionen kommen kann.

Eine wesentliche Rolle spielen dabei die Gleichgewichtslösungen:

Definition: Ein Punkt $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt *Fixpunkt* oder *Gleichgewichtslösung* des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = f\left(\vec{y}(t), t\right)$, wenn die konstante Funktion $\vec{y}(t) = \vec{y}_0$ eine Lösung ist.

Anschaulich bedeutet dies, daß der Zustand eines Systems, das durch diese Differentialgleichung beschrieben wird, für $\vec{y}(t) = \vec{y}_0$ zeitlich konstant ist, das System befindet sich also im Gleichgewicht.

Da die Ableitung einer konstanten Funktion verschwindet, sind die Fixpunkte des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = f\left(\vec{y}(t), t\right)$ gerade die Lösungen des Gleichungssystems

$$f(\vec{y}_0, t) = 0 \quad \text{für alle } t \in [t_0,\ t_1]\,.$$

Bei einem nichtlinearen Differentialgleichungssystem ist das natürlich ein nichtlineares Gleichungssystem, man wird sich also auch hier bei der Lösung oft mit Näherungsverfahren begnügen müssen. Die Variable t tritt hier natürlich nur bei nichtautonomen Systemen auf; bei den in Naturwissenschaft und Technik häufigen autonomen Systemen haben wir ein Gleichungssystem, in dem nur die Komponenten von $\vec{y}_0$ vorkommen.

Ein klassisches Beispiel, bei dem sich die Fixpunkte leicht ausrechnen lassen, ist das Raubtier-Beutetier-Modell, das 1925 von LOTKA und

VOLTERRA vorgeschlagen wurde: In einem Gebiet gebe es eine Population von Raubtieren, die sich von genau einer Art von Beutetieren ernähren. Für die Beutetiere sei genügend Nahrung vorhanden, so daß diese sich, falls es keine Raubtiere gäbe, beliebig vermehren könnten. Wenn wir die Populationsstärke zum Zeitpunkt t mit $x(t)$ bezeichnen, können wir also annehmen, daß die Beutetiere bei Abwesenheit der Raubtiere eine konstanter Wachstumsrate hätten, d.h.

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) \quad \text{mit} \quad \alpha > 0\,.$$

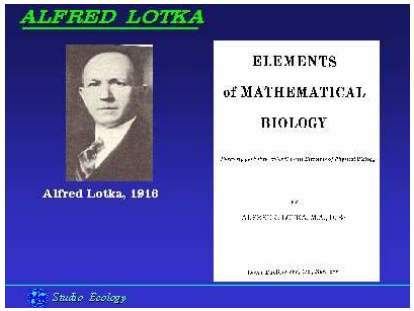
Die Raubtiere, deren Bestand zum Zeitpunkt t wir mit $y(t)$ bezeichnen wollen, würden in Abwesenheit der Beutetiere relativ schnell verhungern und somit aussterben, was wir durch eine negative Wachstumsrate modellieren können:

$$\dot{y}(t) = -\gamma y(t) \quad \text{mit} \quad \gamma > 0\,.$$

Nun sind aber die Raubtiere und die Beutetiere nicht isoliert voneinander, sondern es kommt zu Begegnungen zwischen den beiden Populationen. Deren Häufigkeit ist etwa proportional zum Produkt der beiden Populationsstärken, und die Auswirkung einer solchen Begegnung ist positiv für die Wachstumsrate der Raubtiere, aber negativ für die der Beutetiere. Unser Modell läßt sich somit beschreiben durch das System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \ \ \alpha x(t) - \beta x(t) y(t) \\ \dot{y}(t) &= -\gamma y(t) + \delta x(t) y(t) \end{aligned}$$

mit positiven reellen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.



Der amerikanische Wissenschaftler ALFRED LOTKA (1880–1949) war von der Ausbildung her ein Mathematiker, interessierte sich aber Zeit seines Lebens stark für Physik, insbesondere Thermodynamik, und war einer der ersten, der die Evolution unter physikalischen Gesichtspunkten betrachtete. Er zählt zu den Pionieren der Selbstorganisation, der Bioenergetik und (auch für eine Versicherung) der Demographie.

VITO VOLTERRA (1860–1940) wurde in Ancona im damaligen Kirchenstaat geboren. Er studierte bereits als Elfjähriger mathematische Literatur, promovierte dann aber in Physik über ein Thema aus der Hydrodynamik. Er hatte Lehrstühle für Mechanik und für mathematische Physik in Pisa, Turin und Rom. Seine wichtigsten Arbeiten beschäftigen sich mit partiellen Differentialgleichungen und vor allem Integralgleichungen. Ab 1922 kämpfte er im italienischen Parlament gegen den Faschismus und verlor deshalb 1931 nach Auflösung des Parlaments seinen Lehrstuhl in Rom. Den Rest seines Lebens verbrachte er größtenteils im Exil.

Zur Bestimmung der Gleichgewichtslösungen müssen wir für $x(t)$ und $y(t)$ Konstanten einsetzen; dies führt auf die Gleichungen

$$0 = \quad \alpha x_0 - \beta x_0 y_0 = x_0(\alpha - \beta y_0)$$

$$0 = -\gamma\, y_0 + \delta x_0 y_0 = y_0(\gamma - \delta x_0)\,.$$

Es gibt somit genau zwei Gleichgewichtslösungen: Einmal die uninteressante Lösung $x(t) = y(t) \equiv 0$, die im wesentlichen besagt, daß ohne Raub- und Beutetiere in diesem System nichts passiert, und dann noch die Lösung

$$x(t) \equiv \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{und} \quad y(t) \equiv \frac{\alpha}{\beta}\,.$$

Falls die beiden Populationen diese Stärken haben, fressen also die Raubtiere genau so viele Beutetiere weg, wie nachwachsen; umgekehrt reichen die Beutetiere gerade aus, um die Raubtierpopulation zu ernähren.

Was passiert, wenn die Populationen nicht im Gleichgewicht sind? Wir haben offensichtlich kaum Chancen, das Differentialgleichungssystem explizit zu lösen, aber wir können trotzdem versuchen, etwas über die Lösungs*kurven* in Erfahrung zu bringen.

Wenn wir y als Funktion von x betrachten, ist

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot y(t)}{\dot x(t)} = \frac{-\gamma y + \delta x y}{\alpha x - \beta x y} = \frac{y}{\alpha - \beta y} \cdot \frac{\delta x - \gamma}{x}\,,$$

wir haben also eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Trennung der Variablen führt auf

$$\int \left(\frac{\alpha}{y} - \beta\right)\, dy = \int \left(\delta - \frac{\gamma}{x}\right)\, dx$$

oder

$$\alpha \ln y - \beta y = \delta x - \gamma \ln x + C\,.$$

Anwendung der Exponentialfunktion macht daraus

$$\frac{y^\alpha}{e^{\beta y}} = \frac{e^{\delta x}}{x^\gamma} \cdot e^C\,.$$

Diese Gleichung können wir zwar weder nach y noch nach x auflösen, aber eine einfache Kurvendiskussion der Funktionen

$$f(y) = \frac{y^\alpha}{e^{\beta y}} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{e^{\delta x}}{x^\gamma}$$

zeigt, daß die Ableitung in beiden Fällen außer im Nullpunkt noch in genau einem weiteren Punkt verschwindet, nämlich dort wo x *bzw.* y gleich der entsprechenden Koordinate des nichttrivialen Gleichgewichtspunkts ist. f hat in diesem Punkt ein Maximum, g ein Minimum, und für $t \to 0$ oder $t \to \infty$ geht f gegen null und g gegen unendlich.

Da beide Funktionen im positiven Bereich der reellen Achse nur positive Werte annehmen, gibt es für eine vorgegebene positive Zahl c somit höchstens zwei Werte, an denen sie von f *bzw.* g angenommen wird; für zu große c, gibt es kein y mehr mit $f(y) = c$, und für zu kleine c kein x mit $g(x) = c$.

Daraus folgt nach kurzer Überlegung, daß die Lösungskurven (abgesehen von den beiden Fixpunkten) auf geschlossenen Kurven um den nichttrivialen Fixpunkt liegen. Da kein Punkt auf einer solchen Kurve Fixpunkt ist, kann keine Lösungskurve für $t \to \infty$ gegen einen Punkt einer solchen Kurve konvergieren, die Lösungskurven müssen also den nichttrivialen Gleichgewichtspunkt permanent umrunden.

Betrachten wir eine konkrete Lösung $\big(x(t), y(t)\big)$ des Differentialgleichungssystems, das wir der Einfachheit halber kurz als

$$\begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix} = F\big(x(t), y(t)\big)$$

schreiben wollen, und fixieren wir einen Zeitpunkt t_0; für diesen sei $x(t_0) = a$ und $y(t_0) = b$. Dann muß es nach obiger Diskussion ein kleinste Zeitspanne T geben, so daß auch

$$x(t_0 + T) = a \quad \text{und} \quad y(t_0 + T) = b$$

ist. Für die beiden Funktionen

$$u(t) \underset{\text{def}}{=} x(t+T) \quad \text{und} \quad v(t) \underset{\text{def}}{=} y(t+T)$$

ist dann $u(t_0) = a$ und $v(t_0) = b$; außerdem ist

$$\begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t+T) \\ \dot{y}(t+T) \end{pmatrix} = F\big(x(t+T), y(t+T)\big) = F\big(u(t), v(t)\big) ,$$

$\big(x(t), y(t)\big)$ und $\big(u(t), v(t)\big)$ lösen also dasselbe Anfangswertproblem. Falls wir zeigen können, daß F eine LIPSCHITZ-Bedingung erfüllt, müssen die beiden Funktionen also übereinstimmen.

Im betrachteten Beispiel ist

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha x - \beta xy \\ -\gamma y + \delta xy \end{pmatrix} ,$$

also

$$\|F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)\| = \left\| \begin{pmatrix} \alpha(x_1 - x_2) - \beta(x_1 y_1 - x_2 y_2) \\ -\gamma(y_1 - y_2) + \delta(x_1 y_1 - x_2 y_2) \end{pmatrix} \right\| .$$

Im Quadrat $-R \le x, y \le R$ ist

$$|\alpha(x_1 - x_2) - \beta(x_1 y_1 - x_2 y_2)| \le |\alpha(x_1 - x_2)| + |\beta(x_1 y_1 - x_2 y_2)|$$

und

$$\begin{aligned} |(x_1 y_1 - x_2 y_2)| &= |x_1 y_1 - x_1 y_2 + x_1 y_2 - x_2 y_2| \\ &= |x_1(y_1 - y_2) + y_2(x_1 - x_2)| \\ &\le |x_1(y_1 - y_2)| + |y_2(x_1 - x_2)| \\ &\le R\big(|y_1 - y_2| + |x_1 - x_2|\big) , \end{aligned}$$

also ist

$$\begin{aligned} &|\alpha(x_1 - x_2) - \beta(x_1 y_1 - x_2 y_2)| \\ &\le \alpha\,|(x_1 - x_2)| + \beta R\big(|y_1 - y_2| + |x_1 - x_2|\big) . \end{aligned}$$

Analog folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned} &|\gamma(y_1 - y_2) + \delta(x_1 y_1 - x_2 y_2)| \\ &\le \gamma\,|(y_1 - y_2)| + \delta R\big(|y_1 - y_2| + |x_1 - x_2|\big) . \end{aligned}$$

Wir arbeiten hier mit der Maximumsnorm von Vektoren, $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|$ ist also das Maximum von $|x|$ und $|y|$, und entsprechend ist

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\| = \max\big\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\big\} .$$

Mit

$$L = \max\{\alpha + 2\beta R, \gamma + 2\delta R\}$$

ist somit

$$\|F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)\| \le L \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\| ;$$

F erfüllt also eine LIPSCHITZ-Bedingung, so daß wir aus dem Satz von PICARD-LINDELÖF folgern können, daß das Anfangswertproblem in jedem abgeschlossenen Quadrat eindeutig lösbar ist.

Da jede Lösungskurve in einem abgeschlossenen Quadrat liegt (sonst müßte sie irgendwo gegen unendlich gehen), ist also

$$u(t) = x(t) \quad \text{und} \quad v(t) = y(t) \quad \text{für alle } t \ge t_0$$

d.h.

$$x(t+T) = x(t) \quad \text{und} \quad y(t+T) = y(t) \quad \text{für alle } t \ge t_0 .$$

Damit wissen wir, daß alle Lösungsfunktionen periodisch sind.

In der unmittelbaren Umgebung der nichttrivialen Gleichgewichtslösung können wir sogar noch etwas mehr sagen: Durch TAYLOR-Entwicklung der oben betrachteten Funktionen f und g überzeugt man sich leicht davon, daß die Lösungskurven dort näherungsweise als Ellipsen aufgefaßt werden können.

Nach all diesen Vorbereitungen sollten wir uns endlich eine konkrete Lösungskurve anschauen, d.h. wir sollten das Problem in einem Spezialfall numerisch lösen.

Abbildung 39 zeigt das Ergebnis; die spiralförmige Kurve entspricht genau unseren Erwartungen.

Besser können wir diese überprüfen, wenn wir eine Reihe von Lösungskurven in der xy-Ebene betrachten; Abbildung 40 zeigt solche Kurven

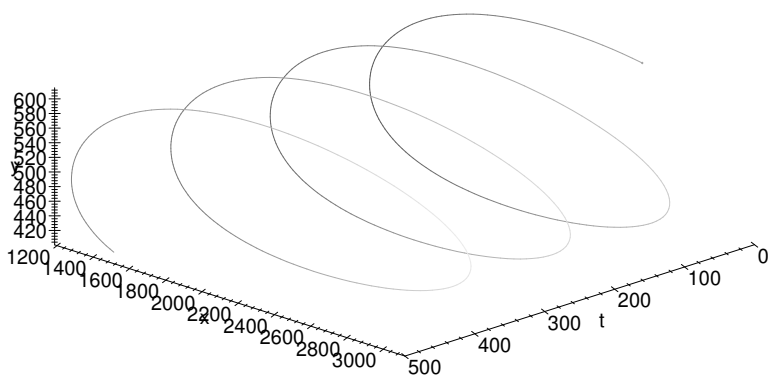


Abb. 39: Numerische Simulation des Raubtier-Beutetier-Systems

zu verschiedenen Anfangsbedingungen. Abgesehen von der Gleichgewichtslösung, die einfach ein Punkt ist, sieht man die vorhergesagten geschlossenen Kurven, die das Gleichgewicht umrunden.

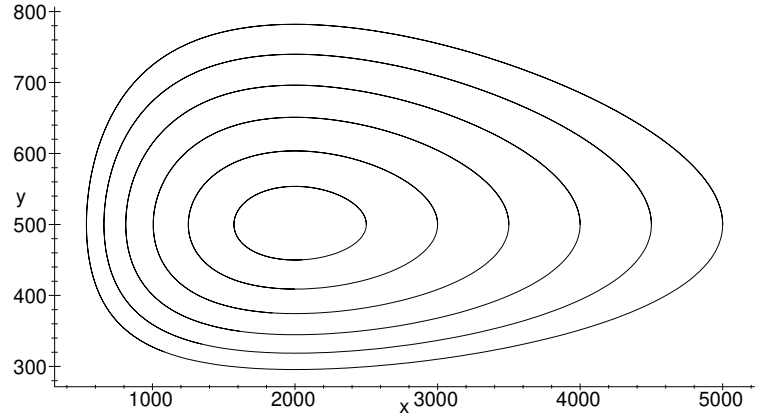


Abb. 40: Lösungskurven in der xy-Ebene

Man kann sich leicht klarmachen, was der Umlauf auf so einer Lösungskurve biologisch bedeutet: Im jeweils untersten Punkt ist die

Raubtierpopulation minimal, so daß sich die Beutetiere stark vermehren können; dadurch verbessert sich die Nahrungsgrundlage für die Raubtiere, was nun auch zu deren Vermehrung führt, so daß die Kurve auf ihren am weitesten rechts gelegenen Punkt zusteuert, in dem die Beutetiere ihre maximale Populationsstärke erreichen. Die gestiegene Raubtierpopulation frißt nun, nachdem sie ihren Gleichgewichtswert überschritten hat, mehr Beutetiere als nachwachsen, kann sich aber wegen der großen Anzahl vorhandener Beutetiere weiterhin vermehren auf ein Maximum hin, das am obersten Punkt der Lösungskurve erreicht ist. Danach reicht der bereits gesunkene Bestand an Beutetieren nicht mehr aus als Nahrungsgrundlage für die Raubtiere, ihre Population geht also zurück, reicht aber immer noch aus, um die Beutetiere weiter zu dezimieren. Im Punkt links außen hat deren Bestand schließlich sein Minimum erreicht; die weiterhin sinkende Raubtierpopulation frißt nun weniger Beutetiere als nachwachsen und leidet trotzdem weiter an Nahrungsmangel. Sobald sie ihr Minimum erreicht hat, schließt sich der Kreis, und der gleiche Zyklus beginnt von vorne.

Auch wenn Raubtiere und Beutetiere in der Technischen Informatik keine große Rolle spielen, sollten wir uns doch zumindest kurz fragen, ob die mathematische Lösung irgendetwas mit der biologischen Realität zu tun hat – der Zusammenhang zwischen idealisierten mathematischen Modellen und realen Systemen ist schließlich auch in der Technischen Informatik von Bedeutung.

Wie in vielen praktischen Anwendungen der Mathematik sind die Annahmen des Modells auch hier viel zu einfach: Es gibt kaum je zwei Arten, die völlig isoliert vom Rest der Welt leben. Trotzdem wurden die vorhergesagten Zykel schon beobachtet: Die Hudson Bay Company sammelte rund hundert Jahre lang Daten über gekaufte Felle von Luchsen (Raubtieren) und Schneehasen (deren Beute); da die Trapper kaum beeinflussen können, was in ihre Fallen läuft, sollten diese Anzahlen ungefähr proportional sein zu den jeweiligen Populationszahlen. Abbildung 41 zeigt ungefähr die vorhergesagten zyklischen Schwankungen – auch wenn die Schwankungen zwischen 1875 und 1905 in die falsche Richtung gehen: Dort wird der Gleichgewichtspunkt nicht gegen den Uhrzeigersinn umrundet, sondern im Uhrzeigersinn.

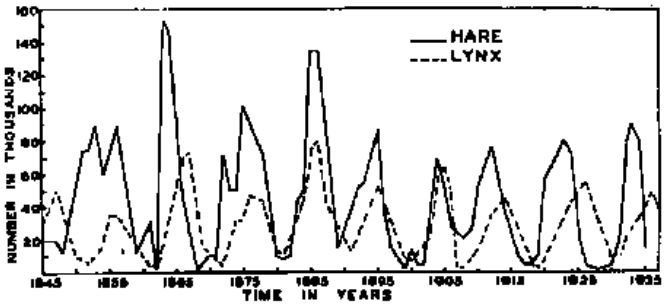


Abb. 41: Luchse und Schneehasen

Über den genauen Grund dafür gibt es immer noch viele Spekulationen; der Grund, warum Abweichungen vom Modell auftreten müssen ist aber einfach zu verstehen: Die Realität deutlich komplizierter ist als das extrem vereinfachte Modell von LOTKA und VOLTERRA.

Das vorliegende Beispiel ist natürlich, wie fast alle Beispiele in einer Anfängervorlesung, viel zu elementar: Im allgemeinen kann man einer Differentialgleichung nicht auf so einfache Weise so viele Eigenschaften der Lösungen ansehen.

Die qualitative Theorie der Differentialgleichungen wendet denn auch viele Methoden an, die weit jenseits des Stoffs dieser Vorlesung liegen, und selbst damit kann sie in komplizierteren Fällen nur deutlich weniger Information aus der Differentialgleichung extrahieren als in diesem Beispiel.

Einen ersten Überblick über das Verhalten der Lösungen einer *autonomen* Differentialgleichung in nur zwei Variablen liefert auch bei beliebig komplizierten Systemen ein graphisches Verfahren: Bei einer autonomen Differentialgleichung

$$\dot{\vec{y}}(t) = F\left(\vec{y}(t)\right)$$

definiert die Funktion F ein Vektorfeld, wie wir es aus **[HM1]**, *Kapitel 2,* kennen.

Spätestens an dieser Stelle wird klar, daß wir in diesem Kapitel bei der Unterscheidung von Punkten und Vektoren geschlampt haben: Für die linearen homogenen Differentialgleichungssysteme, die den Hauptinhalt dieses Kapitels bilden, war es völlig in Ordnung, nur von Vektoren zu reden: Dort gibt es einen wohldefinierten Nullpunkt, so daß sich Punkte und Vektoren in kanonischer Weise entsprechen.

Zur geometrischen Interpretation von $\dot{\vec{y}}(t) = F\left(\vec{y}(t)\right)$ ist es aber sinnvoller, das Argument $\vec{y}$ von F als Punkt $\boldsymbol{y}$ aufzufassen und den Funktionswert als Tangenten*vektor* in diesem Punkt zu interpretieren. Eine Lösungskurve der Differentialgleichung ist dann eine Kurve, die in jedem Punkt $\boldsymbol{y}$ den Vektor $F(\boldsymbol{y})$ als Tangentenvektor hat.

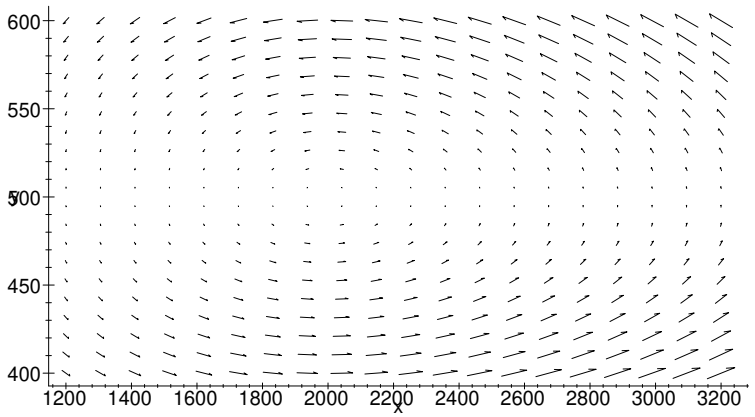


Abb. 42: Das Vektorfeld zur Raubtier-Beutetier-Gleichung

Abbildung 42 zeigt das Vektorfeld im betrachteten Beispiel; es legt zumindest die Vermutung nahe, daß die Lösungen zyklisch um einen Punkt rotieren. *Genau* können das wir freilich aufgrund der graphischen Information nicht sagen: Eine visuell nicht wahrnehmbare Richtungsänderung der Vektoren gehört zu einer Lösung die sich spiralförmig auf den Gleichgewichtspunkt zusammenzieht oder aber spiralförmig ins Unendliche geht.

Schon bei der Visualisierung von Vektorfeldern haben wir gesehen,

daß es gelegentlich übersichtlicher ist, auf die Längeninformation zu verzichten und nur die Richtung zu betrachten. Bei Differentialgleichungen, bei denen es bei einer graphischen Lösung praktisch nur auf die *Richtung* des Vektorfelds in jedem Punkt ankommt, gilt dies umso mehr; oft versucht man daher die Lösungskurve durch ein auf Einheitslänge normiertes Vektorfeld zu führen. Abbildung 43 zeigt, wie dies im vorliegenden Beispiel aussieht.

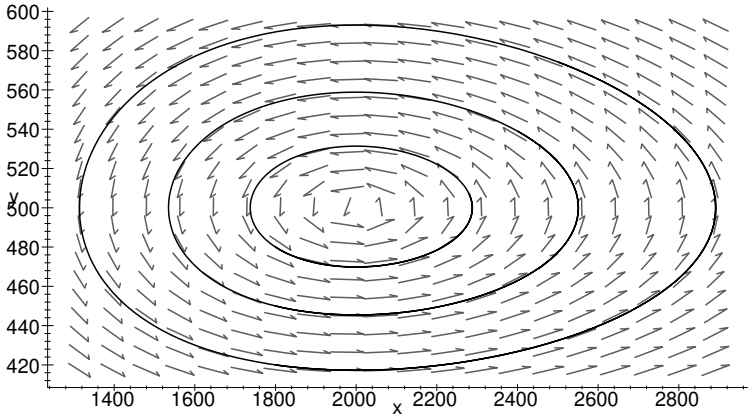


Abb. 43: Anpassung von Lösungskurven an das Vektorfeld

g) Stabilitätsfragen

Die Beschreibung eines realen Systems durch ein mathematisches Modell wie ein Differentialgleichungssystem ist abgesehen von einigen ganz einfachen Fällen immer mit einer Idealisierung verbunden; das reale System verhält sich daher nicht *exakt* so wie das Modell es vorhersagt. Auch die Anfangsbedingungen des Modells, die dem Zustand des realen Systems zu einem vorgegebenen Anfangszeitpunkt entsprechen, lassen sich nur durch fehlerbehaftete Messungen bestimmen. Hinzu kommt, daß man bei der Auswertung des mathematischen Modells nur selten wirklich mit reellen Zahlen rechnet; meistens rechnet man per Computer und somit (falls man keine sehr spezialisierte Mathematiksoftware benutzt) mit rundungsfehlerbehafteten Gleitkommaoperationen.

Aus einem mathematischen Modell abgeleiteten Aussagen können daher nur dann nützlich für die Vorhersage von realen Systemen sein, wenn sie stabil sind gegenüber kleineren Änderungen von Koeffizienten und Anfangsbedingungen.

Betrachten wir dazu ein Beispiel: Eine Größe $y(t)$ sei beschrieben durch das Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = y(t) + 2e^{-t} \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 \,.$$

Wie man sich sofort durch Einsetzen überzeugt, ist $y(t) = e^{-t}$ eine Lösung. Die rechte Seite

$$F(y, t) = y - e^{-t}$$

genügt offensichtlich auf ganz $\mathbb{R}^2$ einer LIPSCHITZ-Bedingung mit Konstante eins, denn $F_y(y, t) \equiv 1$, und man sieht auch direkt, daß

$$|F(y_1, t) - F(y_2, t)| = |y_1 - y_2| \leq 1 \cdot |y_1 - y_2|$$

ist. Somit ist $y(t) = e^{-t}$ die *einzige* Lösung des Anfangswertproblems.

Trotzdem ist diese Lösung für alle praktischen Zwecke völlig wertlos:

$$\dot{y}(t) = y(t) - 2e^{-t}$$

ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung, deren zugehörige homogene Gleichung

$$\dot{y}(t) = y(t)$$

die allgemeine Lösung

$$y(t) = \lambda e^{t}$$

hat. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist daher

$$y(t) = e^{-t} + \lambda e^{t} \quad \text{und} \quad y(0) = 1 + \lambda \,.$$

Sobald also die Anfangsbedingung auch nur minimal gestört wird, geht die Lösung für große t nicht mehr gegen null, sondern je nach Vorzeichen von λ gegen $\pm\infty$. Bei einem solchen *schlecht gestellten* oder *strukturell instabilen* Problem läßt sich also mathematisch nichts vorhersagen.

Auch eine numerische Lösung des Anfangswertsproblems wird wegen allfälliger Rundungsfehler über kurz oder lang die exakte Lösungskurve

$y(t) = e^{-t}$ verlassen und auf eine der zumindest anfänglich benachbarten anderen Kurven überwechseln, so daß auch sie für $t \to \infty$ divergiert. Abbildung 44 zeigt eine mit einem RUNGE-KUTTA-Verfahren der Ordnung vier/fünf berechnete numerische Lösung; wie man sieht, hat sie ab etwa $t = 14$ nichts mehr mit der korrekten Lösung zu tun.

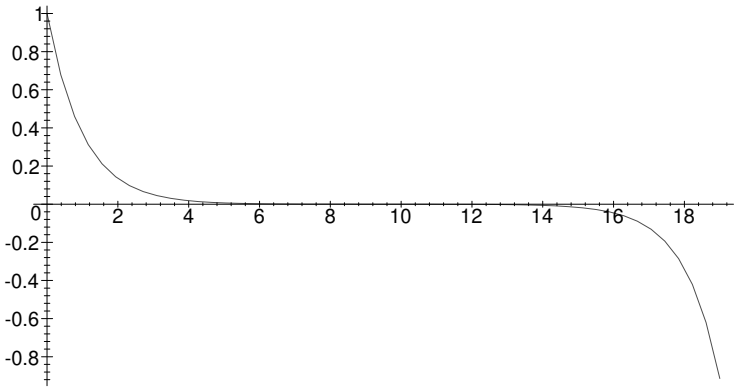


Abb. 44: Divergenz einer numerisch berechneten Lösungskurve

Anders sieht es aus beim Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = -y(t) + 1 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 \,.$$

Hier überzeugt man sich leicht, daß $y(t) = 1$ die einzige Lösung ist, aber jetzt hat die zugehörige homogene Differentialgleichung die allgemeine Lösung $y(t) = \lambda e^{-t}$; die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = -y(t) + 1$$

ist also

$$y(t) = 1 + \lambda e^{-t} \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 + \lambda \,.$$

Kleine Störungen λ des Anfangswerts werden jetzt durch den Faktor e^{-t} weggedämpft; unabhängig von solchen Störungen bleibt also die Lösung $y \equiv 1$ stabil.

Um allgemeiner zu sehen, was in der Umgebung eines Gleichgewichts passieren kann, versuchen wir, die Gleichung in der Umgebung des

Gleichbewichts anzunähern durch die einzige Klasse von Differentialgleichungen, die wir wirklich beherrschen, die linearen homogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Dazu erinnern wir uns an die Definition einer differenzierbaren Funktion mehrerer Veränderlicher: $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_n$ ist im Punkt $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar, wenn in einer Umgebung des Punktex gilt

$$F(\boldsymbol{x} + \vec{h}) = F(\boldsymbol{x}) + J_F(\boldsymbol{x})\vec{h} + o\big(\big\|\vec{h}\big\|\big) \,,$$

wobei $J_F(\boldsymbol{x})$ die JACOBI-Matrix von F in $\boldsymbol{x}$ ist.

Wir betrachten ein autonomes Differentialgleichungssystem

$$\dot{\vec{y}}(t) = F\big(\vec{y}(t)\big)$$

mit einer differenzierbaren Funktion F mit Fixpunkt $\vec{y}_0$. In der Umgebung des Fixpunkts ist dann

$$F(\vec{y}_0 + \vec{h}) = F(\vec{y}_0) + J_F(\vec{y}_0)\vec{h} + o\big(\big\|\vec{h}\big\|\big) = \vec{y}_0 + J_F(\vec{y}_0)\vec{h} + o\big(\big\|\vec{h}\big\|\big) \,;$$

falls wir den Fehlerterm $o\big(\big\|\vec{h}\big\|\big)$ vernachlässigen, genügt also die Differenz

$$\vec{u}(t) \underset{\text{def}}{=} \vec{y}(t) - \vec{y}_0$$

zwischen der Gleichgewichtslösung und einer nahe benachbarten Lösung näherungsweise einer linearen homogenen Differentialgleichung

$$\dot{\vec{u}}(t) = J_F(\vec{y}_0)\vec{u}(t) \,.$$

Das Langzeitverhalten von deren Lösungen hängt, wie wir aus §3*c)* wissen, von den Eigenwerten der Matrix $J_F(\vec{y}_0)$ ab: Falls diese allesamt negativen Realteil haben, konvergiert jede Lösung $\vec{u}$ für $t \to \infty$ gegen den Nullpunkt; falls alle Eigenwerte positiven Realteil haben, divergiert jede Lösung außer der Null ins Unendliche. Im ersten Fall sprechen wir von einem *stabilen* oder *anziehenden* Fixpunkt, im zweiten von einem *instabilen* oder *abstoßenden.* Falls einige Eigenwerte positiven und andere negativen Realteil haben, reden wir von einem *Sattelpunkt;* hier hängt es von der Richtung ab, ob eine Störung weggedämpft wird oder nicht, allerdings wird in der Praxis fast jede Störung zur Divergenz führen, denn nur im linearen Unterraum, der von den Eigenvektoren

zu den Eigenwerten mit negativem Realteil aufgespannt wird, werden die Störungen weggedämpft. Eine zufällige Störung wird aber meist sehr schnell aus diesem Unterraum herausführen, so daß dann auch Eigenwerte mit positivem Realteil eine Rolle spielen.

Bei Eigenwerten mit Realteil null reicht die Linearisierung nicht aus, um zu Aussagen über das Stabilitätsverhalten zu kommen, da dann die Terme höherer Ordnung das Geschehen dominieren. Es kann sehr schwer sein, in so einem Fall die Dynamik vorherzusagen.

Abbildung 45 zeigt das Vektorfeld in der Nähe eines stabilen Fixpunkts; alle Lösungskurven laufen auf diesen Punkt zu. Bei einem instabilen Fixpunkt hätten wir dasselbe Bild, nur daß dann alle Pfeile in Gegenrichtung zeigen würden.

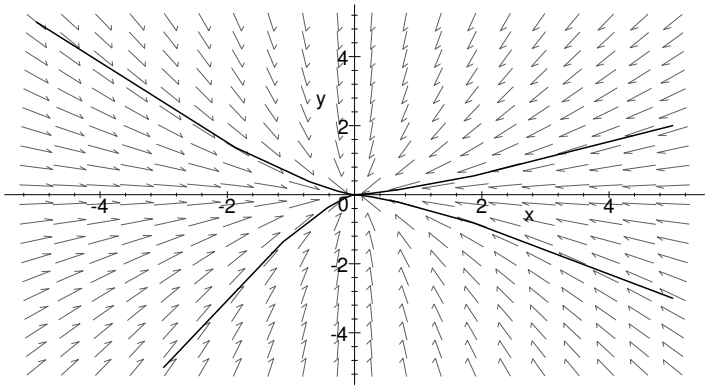


Abb. 45: Die Umgebung eines stabilen Fixpunkts

Auch in Abbildung 46 ist ein stabiler Fixpunkt zu sehen; hier hat aber die JACOBI-Matrix zwei konjugiert komplexe Eigenwerte, so daß sich benachbarte Lösungen spiralförmig auf den Fixpunkt zusammenziehen. Bei einem abstoßenden Fixpunkt hätten wir wieder im wesentlichen dasselbe Bild, aber mit umgedrehten Pfeilen.

Abbildung 47 zeigt die Umgebung eines Sattelpunkts; hier haben wir

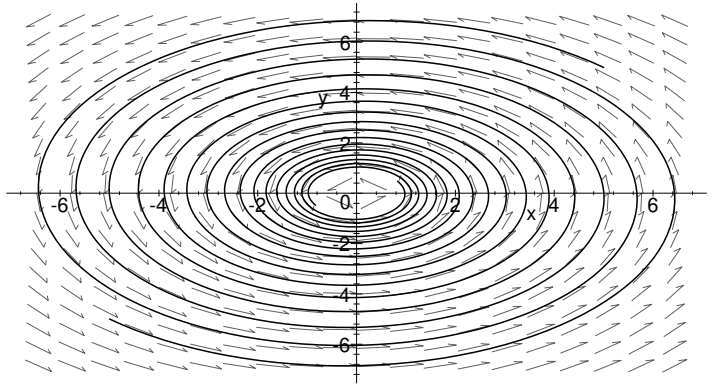


Abb. 46: Zwei konjugiert komplexe Eigenwerte mit negativem Realteil

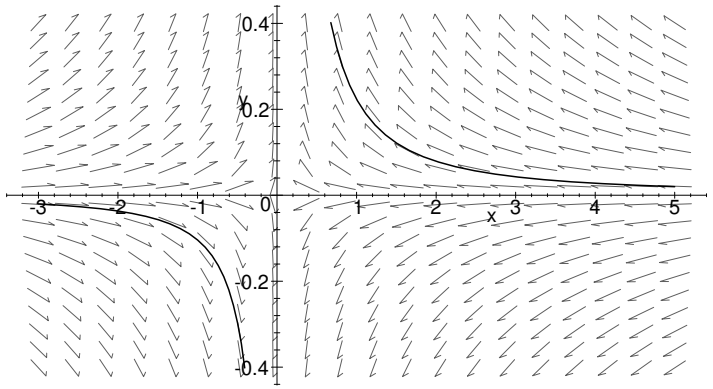


Abb. 47: Umgebung eines Sattelpunkts

Lösungskurven, die sich zwar asymptotisch der y-Achse annähern, auf dieser aber gegen plus oder minus unendlich gehen.

Als Beispiel wollen wir die Lösungen der LORENZ-Gleichungen

$$\dot{x}(t) = p\big(y(t) - x(t)\big)$$
$$\dot{y}(t) = rx(t) - y(t) - x(t)z(t)$$
$$\dot{z}(t) = -bz(t) + x(t)y(t)$$

untersuchen. Dieses Differentialgleichungssystem ist eine extreme Vereinfachung der sogenannten NAVIER-STOKES-Gleichung, einer partiellen Differentialgleichung, die Strömungsphänomene beschreibt. Für technische Informatiker interessanter ist wohl, daß dasselbe System nach HAKEN (Phys. Lett. A53 (1975), 77–78) auch das Verhalten von Lasern beschreiben kann.

Die Funktionen $x(t), y(t)$ und $z(t)$ verlieren im Vereinfachungsprozeß ihre unmittelbare physikalische Bedeutung; die Parameter lassen sich allerdings physikalisch interpretieren: Für die atmosphärische Konvektion ist nach LORENZ

$$p = 10, \quad r = 28 \quad \text{und} \quad b = \frac{8}{3}$$

eine sinnvolle Wahl.

EDWARD NORTON LORENZ wurde 1917 im US-Bundesstaat Connecticut geboren; er studierte Mathematik in Dartmouth College (A.B. 1938) und Harvard (M.A. 1940). Nach seinem Kriegsdienst ging er ans MIT, wo er 1948 über Meteorologie promovierte. Sowohl dem MIT, wo er 1981 als Professor emeritiert wurde, als auch der Meteorologie blieb er fortan treu. Zu seinen vielen Auszeichnungen gehört unter anderem der Kyoto-Preis von 1991, der wohl höchstdotierte Wissenschaftspreis.

Da uns der erste Augenschein nichts über das Verhalten der Lösungen zeigt, empfiehlt es sich, daß wir uns durch numerische Simulation einen ersten Eindruck verschaffen. Abbildung 48 zeigt die Lösung des Anfangswertproblems mit $x(0) = 2$ und $y(0) = z(0) = 10$; die meisten werden ähnliche Bilder wohl schon gesehen haben.

Leider ist dieses Bild einerseits etwas unübersichtlich, andererseits zeigt es nur eine einzige Lösungskurve. Um besser zu verstehen, was hier passiert, beschränken wir uns auf die Funktion $x(t)$ und betrachten diese

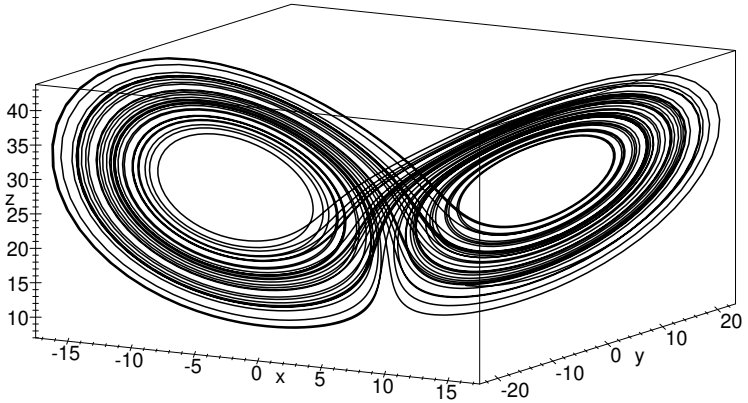


Abb. 48: Eine Bahnkurve des LORENZ-Systems

für zwei Lösungskurven; Abbildung 49 zeigt die für die Anfangsbedingungen

$$x(0) = 2, \quad y(0) = z(0) = 10 \quad \text{und} \quad x(0) = 2{,}01, \quad y(0) = z(0) = 10\,.$$

Wie man sieht, sind die beiden Lösungskurven bis etwa zum Zeitpunkt $t = 6{,}5$ praktisch ununterscheidbar, danach gehen sie aber recht schnell auseinander und haben ab etwa $t = 10$ nichts mehr miteinander zu tun.

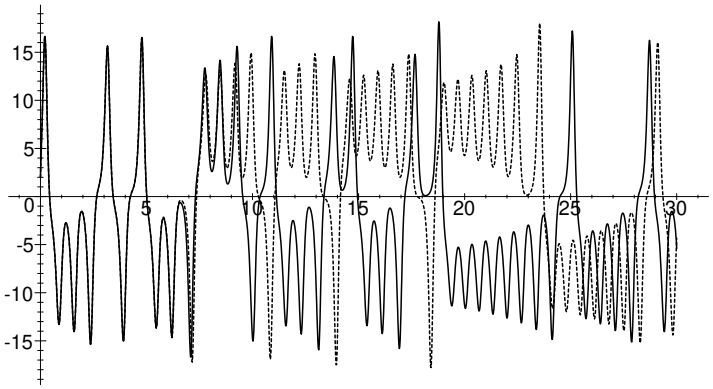


Abb. 49: Die x-Koordinaten zweier Lösungen mit benachbarten Anfangswerten

Fast das gleiche Bild ergibt sich, wenn wir die gestrichelte Kurve nicht mit $x(0) = 2{,}01$ anfangen lassen, sondern – bei sonst unveränderten Werten – bei

$$x(0) = 2{,}000001 = 2 + 10^{-6}\,.$$

Jetzt sind die Kurven zwar bis etwa $t = 16$ praktisch ununterscheidbar, aber spätestens ab etwa $t = 20$ haben sie auch hier nichts mehr miteinander zu tun.

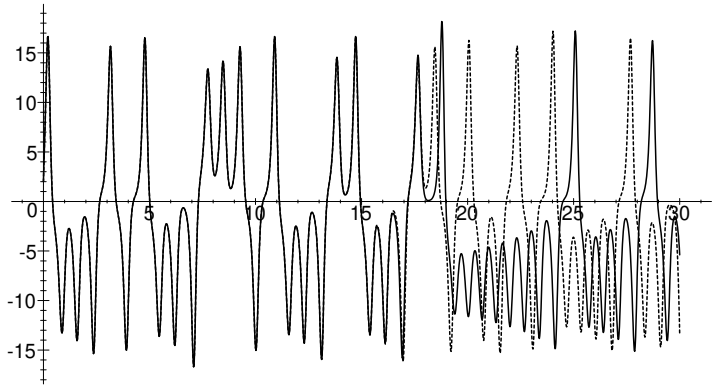


Abb. 50: Effekt einer Störung des Anfangswerts um 10^{-6}

Gerade beim zweiten Fall sollte uns das zu denken geben: Wenn wir Differentialgleichungen zur Vorhersage benutzen, stammen die Anfangsbedingungen im allgemeinen aus einer Messung. Man kann aber nur selten so genau messen, daß sich die beiden Werte 2 und 2,000001 unterscheiden ließen; um eine sinnvolle Voraussage über das Verhalten der Lösung zum Zeitpunkt $t = 20$ zu machen, *muß* man aber nach Abbildung 50 den Wert $x(0)$ mit dieser Genauigkeit kennen.

Es kommt noch schlimmer: In Abbildung 51 ist die dick ausgezogene Kurve wieder eine numerische Simulation der Lösung zu den Anfangsbedingungen $x(0) = 2$ und $y(0) = z(0) = 10$, die gestrichelte Kurve allerdings auch! Die beiden Kurven unterscheiden sich nur dadurch, daß die numerische Simulation bei der dick ausgezogenen Kurve (wie

auch bei allen anderen bisherigen Kurven) mit Schrittweite 0,02 arbeitete, wohingegen die Schrittweite für die gestrichelte Kurve mit 0,01 nur halb so groß war. Auch das reicht schon, daß die Kurven ab etwa $t = 10$ nichts mehr miteinander zu tun haben, und damit dürfte wohl auch klar sein, daß keine der bislang betrachteten Kurven für größere Werte von t irgendetwas mit der „wahren“ Lösungsfunktion $x(t)$ zu tun hatte.

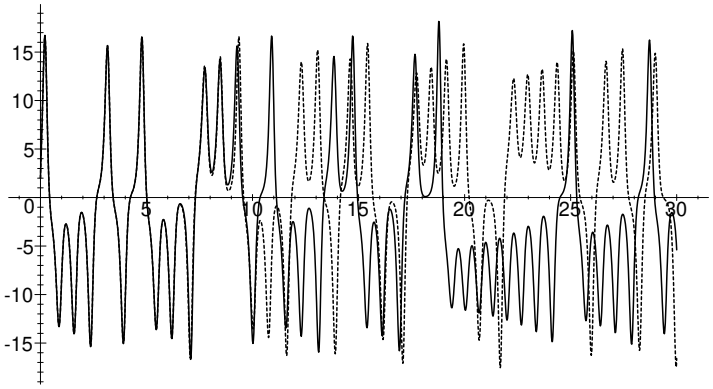


Abb. 51: Effekt einer Schrittweitenhalbierung bei der numerischen Simulation

LORENZ mußte dieses Verhalten der Lösungen auf die harte Weise lernen: Er fand zu seinem großen Erstaunen, daß sich seine Rechenergebnisse nicht reproduzieren ließen, wenn er Zwischenergebnisse für Kontrollrechnungen nur in gerundeter Form eintippte: Der geringe Rundungsfehler bei der Eingabe des Startwerts reichte bereits aus, um das Langzeitverhalten des Systems grundlegend zu verändern.

Falls das gleiche Phänomen auch in der wirklichen Atmosphäre auftritt, können also minimale Veränderungen etwa des Luftdrucks oder der Temperatur auf längere Sicht zu einer dramatisch anderen Entwicklung des Wetters führen – eine Idee, die vielen Meteorologen damals als zu phantastisch erschien um ernstgenommen zu werden: Am 22. Januar 1963 berichtete LORENZ vor der New York Academy of Sciences über seine Ergebnisse *(Trans. N.Y. Acad. Sci.* **25** *(1963), 409–432)* und schloß seinen Vortrag mit den Worten:

Als die Instabilität eines gleichförmigen Flusses gegenüber infinitesimalen Störungen erstmals als Erklärung für das Auftreten von Zyklonen und Antizyklonen in der Atmosphäre vorgeschlagen wurde, war diese Idee nicht allgemein akzeptiert. Ein Meteorologe bemerkte, daß, falls die Theorie korrekt wäre, ein Flügelschlag einer Möwe ausreichen würde, um die Entwicklung des Wetters für immer zu verändern. Die Kontroverse ist noch nicht entschieden, aber die neueste Evidenz scheint für die Möwen zu sprechen.

Inzwischen ist der Sieg der Möwen bekanntlich allgemein anerkannt; man fordert sogar nicht einmal mehr den relativ kräftigen Flügelschlag einer Möwe, um das Wetter permanent zu verändern: Im Dezember 1972 hielt LORENZ vor der American Association for the Advancement of Sciences in Washington, DC, einen Vortrag mit dem Titel *Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil set off a Tornado in Texas,* und seitdem geht das Wort vom *Schmetterlingseffekt* um die Welt.

Auch das Wort *Chaos* wird heute meist auf diese Weise definiert: Kleinste Änderungen bei den Anfangsbedingungen führen zu dramatischen Veränderungen des Langzeitverhaltens. Allerdings muß man hier aufpassen: Bei der Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = y(t)$$

mit Anfangsbedingungen

$$y(0) = 1 \quad \text{und} \quad y(0) = 1 + \varepsilon$$

unterscheiden sich die Lösungen $y(t) = e^t$ und $y(t) = (1+\varepsilon)\cdot e^t$ zur Zeit t um $\varepsilon \cdot e^t$, was auch bei kleinsten ε-Werten sehr schnell eine sehr große Zahl wird: bei $\varepsilon = 10^{-6}$ und $t = 50$ etwa ist die Differenz bereits größer als $5 \cdot 10^{15}$. Trotzdem wird hier niemand von Chaos reden, denn beide Lösungen gehen sehr schnell gegen den „Gleichgewichtspunkt" unendlich. Von „echtem" Chaos verlangt man daher auch noch, daß die Lösungen nicht gegen eine (endliche oder unendliche) Gleichgewichtslösung konvergieren und auch nicht gegen eine periodische Lösung. Chaos in diesem Sinne ist sehr schwer nachzuweisen; für die LORENZ-Gleichung mit den klassischen Parameterwerten wurde erst Ende September 1999 ein *preprint* veröffentlicht, in dem dies (mit

großem theoretischen wie auch rechnerischem Aufwand) gezeigt wird; siehe `http://www.math.gatech.edu/~mischaik/papers/lor3.ps` .

Chaos heißt nun allerdings nicht, daß wir dann überhaupt nichts über das Verhalten der Lösungen aussagen können. Beispielsweise können wir bereits mit unseren einfachen Mitteln zeigen, daß das Bild in Abbildung 48 zumindest qualitativ das Verhalten der Lösungskurven korrekt wiedergibt – quantitativ ist natürlich ab spätestens etwa $t = 10$ alles falsch.

Dazu berechnen wir zunächst die Gleichgewichtslösungen: Im Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= p(y-x) \\ 0 &= rx - y - xz \\ 0 &= -bz + xy \end{aligned}$$

zeigt die erste Gleichung, falls wir den uninteressanten Fall $p = 0$ ausschließen, daß die x-Koordinate und die y-Koordinate eines jeden Fixpunkts übereinstimmen müssen.

Falls beide Koordinaten verschwinden, zeigt die dritte Gleichung ($b \neq 0$ vorausgesetzt), daß dann auch die z-Koordinate verschwinden muß; Einsetzen in die Gleichungen zeigt, daß der Nullpunkt in der Tat ein Fixpunkt ist.

Im Fall $x \neq 0$ können wir y in der zweiten Gleichung durch x ersetzen und dann durch x dividieren; dies ergibt die z-Koordinate

$$z = r - 1 \,.$$

Damit zeigt die dritte Gleichung, daß es für $r \neq 1$ noch zwei weitere Fixpunkte gibt mit

$$x = y = \pm\sqrt{b(r-1)} \quad \text{und} \quad z = r - 1 \,.$$

Die Untersuchung des relativ uninteressanten Nullpunkts sei dem Leser als Übungsaufgabe überlassen; hier seien nur die beiden anderen Fixpunkten betrachtet. Für

$$x = y = \pm\sqrt{b(r-1)} \quad \text{und} \quad z = r - 1$$

führen wir, wie oben im allgemeinen Fall, neue Variablen u, v und w ein, die den Abstand zum Fixpunkt beschreiben, d.h.

$$x = \pm\sqrt{b(r-1)} + u, \quad y = \pm\sqrt{b(r-1)} + v \quad \text{und} \quad z = r - 1 + w\,.$$

Zur Linearisierung in der Nähe des Gleichgewichtspunkt vernachlässigen wir alle nichtlinearen Terme in $u(t), v(t)$ und $w(t)$; das entstehende lineare Differentialgleichungssystem hat dann die JACOBI-Matrix im Fixpunkt als Matrix, ist also

$$\begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{w}(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -p & p & 0 \\ 1 & -1 & \mp\sqrt{b(r-1)} \\ \pm\sqrt{b(r-1)} & \pm\sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}\,.$$

Das charakteristische Polynom

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 - (b + 1 + p)\lambda^2 - b(r - p)\lambda - 2pb(r - 1)$$

ist für beide Fixpunkte dasselbe, verleitet aber nicht dazu, es allgemein lösen zu wollen. Wir setzen daher die von LORENZ vorgeschlagenen speziellen Parameterwerte ein und erhalten

$$-\lambda^3 - \frac{41}{3}\lambda^2 - \frac{304}{3}\lambda - 1440\,,$$

was immer noch so schlimm ist, daß wir es besser numerisch lösen. Die drei Lösungen ergeben sich näherungsweise als

$$-13{,}85457791 \quad \text{und} \quad 0{,}09395562396 \pm 10{,}19450522i\,.$$

Es gibt also einen negativen Eigenwert und zwei konjugiert komplexe Eigenwerte mit positivem Realteil. Damit ist klar, wie Lösungskurven des linearisierten Systems in der Nähe der beiden Fixpunkte aussehen: Der negative Eigenwert sorgt dafür, daß die Lösungen asymptotisch in die Ebene gedrückt werden, die von den Eigenvektoren zu den beiden anderen Eigenwerten aufgespannt wird, und die beiden komplexen Eigenwerte sorgen dafür, daß sie dort spiralförmig nach außen gehen.

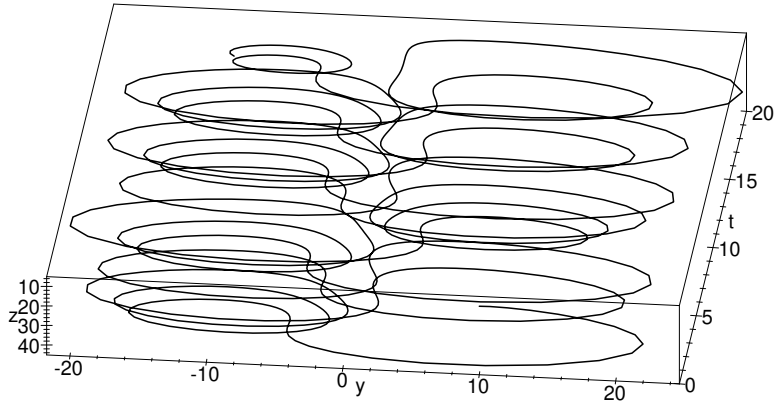


Abb. 52: y- und z-Koordinate als Funktion von t

Damit wird das Verhalten des LORENZ-Systems klar: Wir haben zwei Ebenen, die jeweils einen Sattelpunkt enthalten; kommt eine Lösung in die Nähe eines solchen Sattelpunkts, wird sie von der entsprechenden Ebenen eingefangen und geht dort spiralförmig nach außen. Wenn sie sich hinreichend weit vom Sattelpunkt entfernt hat, sind die Voraussetzungen für die obige Linearisierung nicht mehr gegeben; die Lösung kann daher der Ebenen entkommen, wird aber über kurz oder lang von der Ebenen des anderen Sattelpunkts eingefangen und so weiter. Abbildung 52 zeigt dieses Verhalten etwas klarer als Abbildung 48: Hier sind die die y- und die z-Koordinate der Lösungskurve über der Zeit aufgetragen.

Kapitel 5
Optimierung, Fehlerrechnung und Statistik

In der Schule werden Ableitungen hauptsächlich benutzt, um die Extremwerte einer Funktion zu bestimmen; ein Gesichtspunkt, der im letzten Semester bei der Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher keine Rolle spielte. In diesem letzten Kapitel der Vorlesung soll dies nachgeholt werden, wobei insbesondere die Anwendungen auf die Fehler- und Ausgleichsrechnung wichtige Beispiele liefern. Zu deren besseren Verständnis sollen auch einige Grundbegriffe der Statistik erörtert werden.

§1: Extrema von Funktionen mehrerer Veränderlicher

a) Der eindimensionale Fall

Erinnern wir uns an die Schule: Wenn die stetig differenzierbare Funktion $f\colon (a,\ b) \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in (a,\ b)$ ein Extremum annimmt, verschwindet dort die Ableitung $f'(x_0)$. Der Grund ist klar: Nach Definition der Differenzierbarkeit ist

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + o(h)\,;$$

falls $f'(x_0)$ nicht verschwindet, ist $f(x_0 + h)$ für kleine h mit demselben Vorzeichen wie $f'(x_0)$ größer und für solche mit entgegengesetztem Vorzeichen kleiner als $f(x_0)$. In x_0 kann f somit weder ein Maximum noch ein Minimum annehmen.

Die Umkehrung gilt nicht: Standardbeispiel ist die Funktion $f(x) = x^3$, für die $f'(0)$ verschwindet, ohne daß im Nullpunkt ein Maximum oder Minimum wäre.

Für zweimal stetig differenzierbare Funktionen gibt es bekanntlich auch eine hinreichende Bedingung sowie die Möglichkeit, Maxima und Minima voneinander zu unterscheiden: Falls $f'(x_0)$ verschwindet und $f''(x_0)$ negativ ist, hat f im Punkt x_0 ein Maximum; bei positivem $f''(x_0)$ liegt ein Minimum vor. Auch hier folgt alles sofort aus der Definition der zweimaligen Differenzierbarkeit: Wegen

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + o(h^2) \\ &= f(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + o(h^2) \end{aligned}$$

sieht der Graph von f in diesen Fällen in der unmittelbaren Umgebung von x_0 aus wie eine nach unten *bzw.* oben geöffnete Parabel.

b) Verallgemeinerung aufs Mehrdimensionale

Nun betrachten wir eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$. Dann bedeutet Differenzierbarkeit bekanntlich, daß es in jedem Punkt $\boldsymbol{x}_0 \in D$ einen Vektor

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}_0) \in \mathbb{R}^n$$

gibt, den Gradienten, so daß für hinreichend kleine Vektoren $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \vec{h}) = f(\boldsymbol{x}) + \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \vec{h} + o\big(|\vec{h}|\big)\ .$$

Hier muß also für jeden Extremwert $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}_0)$ gleich dem Nullvektor sein, denn setzt man für $\vec{h}$ ein kleines Vielfaches $t \cdot \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}_0)$ des Gradienten ein, wäre sonst

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \vec{h}) = f(\boldsymbol{x}) + t\big(\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}_0)\big) + o\big(|\vec{h}|\big)$$

für kleine positive t größer als $f(x_0)$ und für kleine negative t kleiner.

Die Frage, welche Nullstellen des Gradienten wirklich Extremwerten entsprechen, ist schwieriger; in der Praxis wird es oft am einfachsten sein, sich die Umgebung des betreffenden Punktes mit irgendwelchen *ad hoc*-Methoden genauer anzusehen und dann zu entscheiden.

Klassisches Beispiel eines Punkts, in dem der Gradient verschwindet, ohne daß ein Extremwert vorliegt, ist der in Abbildung 53 gezeigte

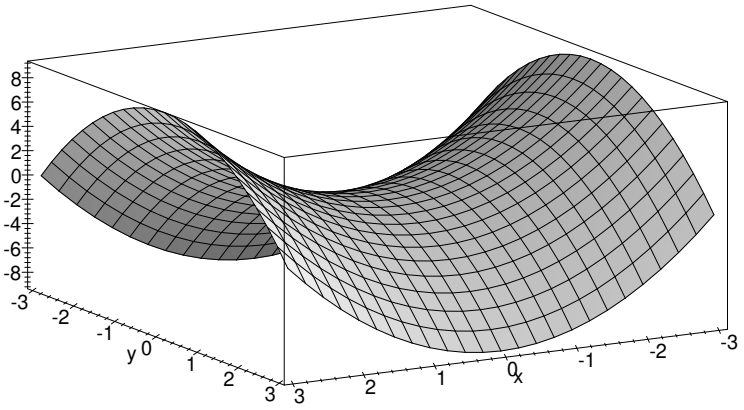


Abb. 53: Graph der Funktion $f(x,y) = x^2 - y^2$

Sattelpunkt, hier dargestellt als Funktionswert über dem Punkt $(0,0)$ für die Funktion $f(x,y) = x^2 - y^2$.

Für zweifach stetig differenzierbare Funktionen kann man genau wie im eindimensionalen Fall ein hinreichendes Kriterium finden, das nur von der zweiten Ableitung im Punkt $\boldsymbol{x}_0$ abhängt:

Die zweite Ableitung von $f \in \mathcal{C}^2(D,\mathbb{R})$ im Punkt $\boldsymbol{x}_0 \in D$ ist bekanntlich gegeben durch die HESSE-Matrix

$$H_f(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

und zweimalige Differenzierbarkeit bedeutet, daß

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \vec{h}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \vec{h} + \tfrac{1}{2}\,{}^t\vec{h}\, H_f(\boldsymbol{x}_0)\, \vec{h} + o\big(\big|\vec{h}^{\,2}\big|\big)$$

ist für kleine $\vec{h}$.

Wenn $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}_0)$ verschwindet, hängt also das Verhalten von f in der Umgebung von $\boldsymbol{x}_0$ ab von der quadratischen Form

$$\vec{h} \mapsto {}^t\vec{h}\, H_f(\boldsymbol{x}_0)\, \vec{h}\,.$$

Definition: *a)* Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *positiv definit,* wenn für alle Vektoren $\vec{v} \neq \vec{0}$ aus $\mathbb{R}^n$ gilt:

$${}^t\vec{v} A(\boldsymbol{x}_0)\vec{v} > 0\,.$$

b) A heißt *negativ definit,* wenn für alle $\vec{v} \neq \vec{0}$ aus $\mathbb{R}^n$ gilt:

$${}^t\vec{v} A(\boldsymbol{x}_0)\vec{v} < 0\,.$$

c) A heißt *indefinit,* wenn es Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

$${}^t\vec{v} A(\boldsymbol{x}_0)\vec{v} > 0 \quad \text{und} \quad {}^t\vec{w} A(\boldsymbol{x}_0)\vec{w} < 0\,.$$

Mit dieser Terminologie ist das folgende Lemma klar:

Lemma: Wenn die differenzierbare Funktion $f \in \mathcal{C}^1(D,\mathbb{R})$ im Punkt $\boldsymbol{x}_0 \in D$ ein lokales Extremum hat, ist dort ihr Gradient gleich dem Nullvektor.
Falls umgekehrt für $f \in \mathcal{C}^2(D,\mathbb{R})$ der Gradient im Punkt $\boldsymbol{x} \in D$ verschwindet, gilt:
a) Falls die HESSE-Matrix $H_f(\boldsymbol{x}_0)$ positiv definit ist, hat f im Punkt $\boldsymbol{x}_0$ ein Minimum.
b) Falls $H_f(\boldsymbol{x}_0)$ negativ definit ist, hat f im Punkt $\boldsymbol{x}_0$ ein Maximum.
c) Falls $H_f(\boldsymbol{x}_0)$ indefinit ist, hat f im Punkt $\boldsymbol{x}_0$ kein Extremum. ∎

Damit uns das etwas nützt, brauchen wir jetzt nur noch ein Kriterium, mit dem wir feststellen können, welche Definitheitseigenschaften die HESSE-Matrix hat. Dazu erinnern wir uns daran, daß die HESSE-Matrix symmetrisch ist, und daß nach Kapitel 4, §2*d)* jede symmetrische Matrix diagonalisierbar ist.

Für eine Diagonalmatrix A mit Einträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und einen Vektor $\vec{v}$ mit Komponenten $v_1, \ldots, v_n$ wird obige quadratische Form zu

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1^2 + \cdots + \lambda_n v_n^2\,;$$

eine Diagonalmatrix ist also genau dann positiv definit, wenn alle Diagonaleinträge positiv sind und genau dann negativ definit, wenn sie alle

negativ sind. Falls es sowohl positive als auch negative Diagonaleinträge gibt, ist die Matrix indefinit.

Nun ist es für den Wertebereich einer Funktion irrelevant, bezüglich welches Koordinatensystems wir die Argumente ausdrücken; wir können eine symmetrische Matrix also bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren betrachten, wo sie zur Diagonalmatrix wird mit den Eigenwerten als Einträgen. Daher gilt:

Lemma: Eine symmetrische Matrix ist genau dann positiv definit, wenn alle ihre Eigenwerte positiv sind und genau dann negativ definit, wenn alle ihre Eigenwerte negativ sind. Falls es sowohl positive als auch negative Eigenwerte gibt, ist sie indefinit. ∎

Da die Determinante einer Matrix gleich dem Produkt ihrer Eigenwerte ist, folgt, daß eine Matrix nur dann positiv definit sein kann, wenn ihre Determinante positiv ist; für negativ definite $n \times n$-Matrizen muß die Determinante bei geradem n ebenfalls positiv sein, bei ungeradem negativ.

Für symmetrische 2×2-Matrizen läßt sich daraus leicht ein notwendiges und hinreichendes Kriterium machen: Das charakteristische Polynom von

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

mit Eigenwerten λ_1 und λ_2 ist

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - b^2) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\,;$$

daher ist

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + d\,.$$

(In der Tat rechnet man auf genau die gleiche Weise leicht nach, daß für jede $n \times n$-Matrix die Summe der n Eigenwerte gleich der Summe der n Diagonaleinträge ist, die sogenannte *Spur* der Matrix.)

Wenn $\det A = ad - b^2$ positiv ist, haben nicht nur λ_1 und λ_2, sondern auch a und d dasselbe Vorzeichen, das somit gleich dem von $a + d = \lambda_1 + \lambda_2$ ist. Also ist A genau dann positiv definit, wenn $\det A > 0$ und $a > 0$

ist, negativ definit, wenn $\det A > 0$ und $a < 0$ ist, und indefinit wenn $\det A < 0$ ist. (Anstelle von a könnte hier natürlich überall auch d stehen.)

Beispielsweise ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ positiv definit, denn sie hat Determinante eins und positive Diagonaleinträge. Im obigen Beispiel des Sattelpunkts mit $f(x,y) = x^2 - y^2$ ist

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

offensichtlich indefinit, was man nicht nur an der negativen Determinanten sieht.

§2: Maxima und Minima unter Nebenbedingungen

Bei einem realen physikalischen oder technischen Prozeß können sich die Variablen selten frei im gesamten $\mathbb{R}^n$ bewegen: Physikalisch sinnvoll ist meist nur eine beschränkte Teilmenge. Im Gegensatz zur Dimension eins, wo diese Teilmenge praktisch immer ein Intervall ist, gibt es aber im Mehrdimensionalen keinen Grund, warum diese Teilmenge offen oder zumindest der Abschluß einer offenen Teilmenge sein sollte: Im $\mathbb{R}^3$ kann man sich beispielsweise auch interessieren für das Maximum oder Minimum der Ladungsdichte auf einer Kugeloberfläche oder die elektrische Feldstärke oder Temperaturverteilung auf der Innenhaut eines Reaktordruckbehälters.

Diese Maxima oder Minima sind im allgemeinen keine lokalen Maxima oder Minima der betrachteten Funktion: Wenn man die jeweilige Fläche verläßt, läßt sich der Funktionswert selbst für einen solchen Extremwert meist noch – je nach Richtung – sowohl vergrößern als auch verkleinern. Dementsprechend können die Methoden, die wir in §1 diskutiert haben, solche Extremwerte üblicherweise nicht finden; wir brauchen weitere Werkzeuge, die in diesem Paragraphen bereitgestellt werden sollen.

Die Situation, um die es hier geht, ist typischerweise die folgende: Gegeben ist eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, möglicherweise auch nur auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ definiert, deren Extremwerte nicht auf $\mathbb{R}^n$

oder D gesucht werden, sondern nur auf einer Teilmenge, die beispielsweise durch das Verschwinden einer weiteren Funktion $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben ist. Falls wir uns für Extremwerte auf einer Kugel vom Radius r um den Nullpunkt interessieren, wäre dies etwa die Funktion

$$g\colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto x^2+y^2+z^2-r^2 \end{cases}.$$

Eine mögliche Strategie zur Lösung solcher Probleme besteht darin, die Gleichung $g = 0$ nach einer der Variablen aufzulösen, diese dann in f einzusetzen und sodann eine gewöhnliche Extremwertaufgabe zu lösen. Diese Auflösung ist *explizit* nur in sehr einfachen Fällen möglich, aber selbst wenn wir nur wissen, daß eine solche Auflösung *existiert,* können wir doch damit argumentieren und Kriterien ableiten.

Unter Maxima und Minima sollen hier *lokale* Extrema verstanden werden, so daß wir die üblichen Kriterien anwenden können:

Definition: Wir sagen, die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ habe im Punkt $\boldsymbol{a} \in D$ ein lokales $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ unter der Nebenbedinung $g = 0$, wobei $g\colon D \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion ist, wenn $g(\boldsymbol{a}) = 0$ ist und es eine Umgebung U von $\boldsymbol{a}$ gibt, so daß für alle $\boldsymbol{x} \in U$ gilt: Ist $g(\boldsymbol{x}) = 0$, so ist $f(\boldsymbol{x}) \left\{\begin{matrix}\le\\ \ge\end{matrix}\right\} f(\boldsymbol{a})$.

Als Einstiegsbeispiel betrachten wir eine beliebte Schulbuchaufgabe zur Minimumsbestimmung: Eine Konservendose soll bei einem vorgegebenen Volumen von 100 cm^3 möglichst wenig Blech benötigen, d.h. ihre Oberfläche soll minimal sein.

Die Oberfläche eines Zylinders der Höhe h mit einer Grundfläche vom Radius r ist

$$f(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h\,;$$

die Nebenbedingung für das Volumen $V = \pi r^2 h$ besagt, daß

$$g(r,h) = \pi r^2 h - 100 = 0$$

sein soll.

Hier läßt sich natürlich die Nebenbedingung sofort nach h auflösen:

$$h = \frac{100}{\pi r^2},$$

und wir müssen nur noch die Funktion

$$F(r) = f\left(r, \frac{100}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{200}{r}$$

minimieren. Für diese ist

$$F'(r) = 4\pi r - \frac{200}{r^2},$$

und dies verschwindet genau dann, wenn

$$4\pi r^3 = 200 \quad \text{oder} \quad r = \sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}$$

ist.

In diesem einfachen Fall kann man solche Aufgaben also zurückführen auf gewöhnliche Extremwertaufgaben, indem man die Nebenbedingung nach einer der Variablen auflöst und diese dann in f einsetzt; in anderen Fällen kann man gelegentlich die Nebendedingung durch geeignete Parameterwahl oder Wahl eines angepaßten Koordinatensystems berücksichtigen. Im allgemeinen wird aber beides nicht möglich sein, so daß wir andere Methoden brauchen.

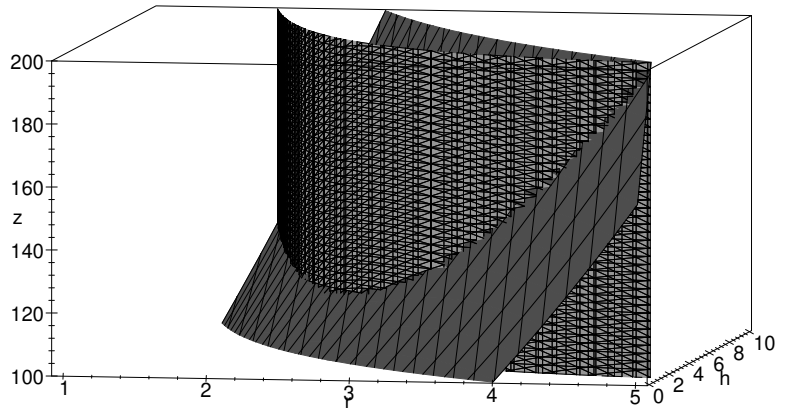


Abb. 54: Oberfläche einer Konservendose mit festem Volumen

Unser bisherige Theorie für lokale Extrema ist in dieser Situation nicht anwendbar, denn die lokalen Extrema von f werden nur in den seltensten Fällen die Nebenbedingung $g = 0$ erfüllen; im obigen Beispiel zeigt Abbildung 54 die Nebenbedingung als eng schraffierte Fläche dargestellt und der Graph von f als weiter schraffierte; wie man sieht, läßt sich der Wert von f problemlos verkleinern, wenn man nur die Fläche $g = 0$ verläßt, und in der Tat ist auch ohne jede Mathematik sofort klar, daß man mit weniger Blech auskommt, wenn man die Konservendose einfach schmäler oder kürzer macht.

Die Grundidee für ein alternatives Verfahren wird klar bei der Betrachtung der Niveaulinien in Abbildung 55: Die Niveaulinie für $g = 0$ ist gestrichelt eingezeichnet, verschiedene Niveaulinien von f als durchgezogene Kurven.

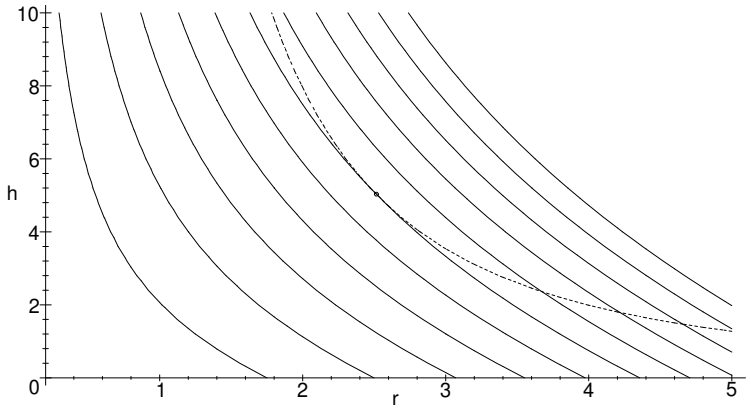


Abb. 55: Niveaulinien für Oberfläche und Volumen

Wie man sieht, schneiden einige dieser Niveaulinien die gestrichelte Kurve überhaupt nicht: Wenn man zu wenig Blech hat, kann man keine Dose mit 100 cm^3 Inhalt zusammenlöten. Wenn es dagegen genug Blech gibt, gibt es gleich zwei Schnittpunkte: Die Dose kann entweder eher höher oder eher breiter gemacht werden. In einem solchen Fall kann man die Niveaulinie durch eine zu einem etwas niedrigeren Niveau ersetzen,

die im allgemeinen auch wieder Schnittpunkte haben wird, so daß das Niveau noch nicht minimal sein kann. Erst wenn man im Minimum ist, fallen die beiden Schnittpunkte zusammen; wenn man nun das Niveau noch weiter erniedrigt, gibt es keine Schnittpunkte mehr.

Da somit im Minimum zwei Schnittpunkte zusammenfallen, berühren sich dort die Niveaulinien von f und von g, d.h. sie haben eine gemeinsame Tangente. Da der Gradient, wie wir wissen, senkrecht auf der Tangenten der Niveaulinien steht (die Richtungsableitung entlang einer Niveaulinie ist schließlich null), sind somit die Gradienten von f und g im Minimum zueinander parallel, d.h. der eine ist ein Vielfaches des anderen.

Dies gilt nicht nur im vorliegenden Beispiel, sondern allgemein:

Satz: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ sei eine offene Menge und $f, g \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ seien stetig differenzierbare Funktionen auf D. Falls f im Punkt $\boldsymbol{a} \in D$ ein Extremum hat unter der Nebenbedinung $g(\boldsymbol{x}) = 0$, so sind grad $f(\boldsymbol{a})$ und grad $g(\boldsymbol{a})$ linear abhängig.

Beweis: Die Grundidee ist einfach: Auch wenn wir die Nebenbedingung nicht *explizit* nach einer der Variablen auflösen können, sagt uns der Satz über implizite Funktionen in vielen Fällen dennoch, daß zumindest lokal eine Auflösung existiert. Diese Auflösung kennen wir zwar nicht, aber wir können mit ihr argumentieren und, zumindest formal, auch rechnen.

Falls grad $g(\boldsymbol{a})$ der Nullvektor ist, gibt es nichts mehr zu beweisen, denn jede Menge, die den Nullvektor enthält, ist linear abhängig.

Wir können daher annehmen, daß grad $g(\boldsymbol{a})$ mindestens eine von Null verschiedene Komponente hat, und durch Umnummerieren der Koordinaten können wir o.B.d.A. annehmen, daß dies die n-te Komponente ist, d.h. $g_{x_n}(\boldsymbol{a}) \neq 0$.

Dann gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen (**[HM I]**, *Kap. 2, §3d*) eine Umgebung U von $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ und eine Funktion $h\colon U \to \mathbb{R}$ mit $h(a_1, \ldots, a_{n-1}) = a_n$, so daß

$$g\big(x_1, \ldots, x_{n-1}, h(x_1, \ldots, x_{n-1})\big) = 0 \quad \text{für alle } (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in U\,.$$

Nachdem f in $\boldsymbol{a}$ ein lokales Extremum unter der Nebenbedinung $g = 0$ hat, nimmt die Funktion

$$F(x_1, \ldots, x_{n-1}) \underset{\text{def}}{=} f\big(x_1, \ldots, x_{n-1}, h(x_1, \ldots, x_{n-1})\big)$$

in $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ ein lokales Extremum im üblichen Sinne an, d.h. der Gradient von F verschwindet dort.

Nach der Kettenregel ist für $i = 1, \ldots, n-1$

$$F_{x_i}(a_1, \ldots, a_{n-1}) = f_{x_i}(\boldsymbol{a}) + f_{x_n}(\boldsymbol{a}) \cdot h_{x_i}(a_1, \ldots, a_{n-1}),$$

und nach dem Satz über implizite Funktionen ist $h_{x_i} = -g_{x_i}/g_{x_n}$, d.h.

$$F_{x_i}(a_1, \ldots, a_{n-1}) = f_{x_i}(\boldsymbol{a}) - f_{x_n}(\boldsymbol{a}) \frac{g_{x_i}(\boldsymbol{a})}{g_{x_n}(\boldsymbol{a})}.$$

Da die linke Seite verschwindet, gilt dasselbe auch für die rechte. Die rechte Seite ist im Gegensatz zur linken auch für $i = n$ definiert und verschwindet aus trivialen Gründen; also ist für alle i

$$f_{x_i}(\boldsymbol{a}) - \frac{f_{x_n}(\boldsymbol{a})}{g_{x_n}(\boldsymbol{a})} g_{x_i}(\boldsymbol{a}) = 0$$

oder, anders ausgedrückt,

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) - \frac{f_{x_n}(\boldsymbol{a})}{g_{x_n}(\boldsymbol{a})} \operatorname{grad} g(\boldsymbol{a}) = \vec{0}.$$

Damit sind die beiden Gradienten in der Tat linear abhängig. ∎

Falls der Gradient von g im Punkt $\boldsymbol{a}$ nicht verschwindet, gibt es somit eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) - \lambda \operatorname{grad} g(\boldsymbol{a}) = \vec{0}$$

ist, nämlich

$$\lambda = \frac{f_{x_n}(\boldsymbol{a})}{g_{x_n}(\boldsymbol{a})}.$$

Diese Zahl bezeichnet man als LAGRANGEschen Multiplikator; mit seiner inhaltlichen Interpretation werden wir uns in Kürze beschäftigen.

JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736–1813) wurde als GIUSEPPE LODOVICO LAGRANGIA in Turin geboren und studierte dort zunächst Latein. Erst eine alte Arbeit von HALLEY über algebraische Methoden in der Optik weckte sein Interesse an der Mathematik, woraus ein ausgedehnter Briefwechsel mit EULER entstand. In einem Brief vom 12. August 1755 berichtete er diesem unter anderem über seine Methode zur Berechnung von Maxima und Minima; 1756 wurde er, auf EULERs Vorschlag, Mitglied der Berliner Akademie; zehn Jahre später zog er nach Berlin und wurde dort EULERs Nachfolger als mathemascher Direktor der Akademie. 1787 wechselte er an die Pariser Académie des Sciences, wo er bis zu seinem Tod blieb und unter anderem an der Einführung des metrischen Systems beteiligt war. Seine Arbeiten umspannen weite Teile der Analysis, Algebra und Geometrie.

Zur praktischen Bestimmung von Extremwerten unter Nebenbedingungen geht man wie folgt vor: Über die Punkte, in denen der Gradient von g verschwindet, macht obiger Satz keine verwertbare Aussage; diese Punkte müssen also vorab berechnet und untersucht werden.

Danach müssen die Punkte gefunden werden, in denen es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so daß

$$\begin{aligned} f_{x_1}(\boldsymbol{x}) - \lambda g_{x_1}(\boldsymbol{x}) &= 0 \\ &\vdots \\ f_{x_n}(\boldsymbol{x}) - \lambda g_{x_n}(\boldsymbol{x}) &= 0 \\ g(\boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned}$$

ist. Dies ist ein System von $n+1$ Gleichungen für die $n+1$ Unbekannten, allerdings ist dieses Gleichungssystem nur selten linear und damit oft nicht mit bekannten Methoden lösbar. Manchmal kann man das Gleichungssystem durch geeignete Umformungen und Fallunterscheidungen vollständig lösen, in anderen Fällen helfen nur die aus der Numerik bekannten Näherungsverfahren wie etwa die Methode von NEWTON-RAPHSON.

Falls alle Gleichungen Polynomgleichungen sind (oder durch Einführung geeigneter zusätzlicher Variablen auf Polynomgleichungen zurückgeführt werden können), kann man im Falle einer endlichen Lösungsmenge diese auch exakt bestimmen: Genau wie der GAUSS-Algorithmus zur Lösung eines linearen Gleichungssystems dieses auf eine

Treppengestalt bringt, aus der man die Lösungen einfach ermitteln kann, gibt es in der Computeralgebra einen Algorithmus, der dasselbe für beliebige Systeme von Polynomgleichungen versucht; die Gleichungen, die dieser Algorithmus liefert, bezeichnet man als GRÖBNER-Basis oder Standardbasis. Zum Verständnis dieses Algorithmus, den man als eine Art Synthese aus EUKLIDischen Algorithmus und GAUSS-Algorithmus ansehen kann, sind Kenntnisse der kommutativen Algebra erforderlich, für die die Zeit in dieser Vorlesung nicht ausreicht; bei einigen Implementierungen werden zusätzlich auch noch Algorithmen aus der Informatik eingesetzt, die typischerweise nicht in Grundvorlesungen behandelt werden. Deshalb sei hier nur darauf hingewiesen, daß die gängigen universellen Computeralgebrasysteme wie Maple, Mathematica, MuPad allesamt entsprechende Routinen enthalten, mit denen man auch dann experimentieren kann, wenn man die dahinterstehende Theorie nicht versteht.

Als Beispiel, wie gelegentlich auch ein nichtlineares Gleichungssystem elementar gelöst werden kann, betrachten wir eine Anwendung aus den Wirtschaftswissenschaften: Die Gesamtproduktion eines Unternehmens oder eines Staats in Abhängigkeit von n eingesetzten Ressourcen $x_1, \dots, x_n$ wird oft modelliert durch eine sogenannte COBB-DOUGLAS-Funktion der Form

$$P(x_1, \dots, x_n) = \alpha x_1^{e_1} \dots x_n^{e_n} ,$$

benannt nach den beiden Wissenschaftlern, die dieses Modell 1928 für die amerikanische Gesamtproduktion in Abhängigkeit von Kapital und Arbeit in den Jahren 1899 bis 1922 entwickelten. (Sie fanden $P \approx 1{,}01 A^{3/4} K^{1/4}$ mit A = Anzahl der Beschäftigten und K = Kapitaleinsatz.)

Betrachten wir stattdessen die Produktion eines Wirtschaftsguts aus zwei Resourcen x, y gemäß der Funktion

$$f(x, y) = P(x, y) = x^{1/2} y^{1/4} .$$

Falls wir der Einfachheit halber annehmen, daß die Kosten pro Einheit für x und y gleich sind und die Gesamtkosten höchstens gleich zwölf sein dürfen, müssen wir f maximieren unter der Nebenbedingung

$$x + y \leq 12 .$$

Nun ist aber f eine monoton wachsende Funktion sowohl von x als auch von y, d.h. die maximale Produktion wird sicherlich erreicht in einem Punkt, für den $x + y = 12$ ist, denn für jeden anderen Punkt

(x, y) mit $x + y < 12$ ist $f(x, y) < f(x, 12 - x)$. Daher können wir die Nebenbedingung in der gewohnten Form

$$g(x, y) = x + y - 12 = 0$$

schreiben. Diese Nebenbedingung sowie die zu maximierende Funktion sind in Abbildung 56 dargestellt.

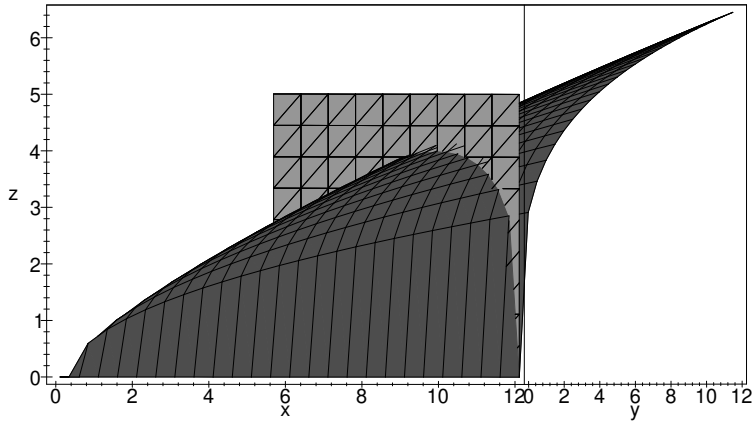


Abb. 56: Maximierung einer Produktionsfunktion bei festem Kapitaleinsatz

Ableitung beider Funktionen zeigt, daß

$$\operatorname{grad} g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} y^{1/4}/2x^{1/2} \\ x^{1/2}/4y^{3/4} \end{pmatrix}$$

ist; das zu lösende Gleichungssystem wird also zu

$$\begin{aligned} \frac{y^{1/4}}{2x^{1/2}} - \lambda &= 0 \\ \frac{x^{1/2}}{4y^{3/4}} - \lambda &= 0 \\ x + y - 12 &= 0 \end{aligned} .$$

(Die Nenner brauchen uns nicht zu stören, denn da $f(0, y) = f(x, 0) = 0$ ist, kommen Lösungen mit $x = 0$ oder $y = 0$ für das Maximum ohnehin nicht in Frage; wir können sie also getrost ausschließen.)

Als Ansatz zu einer möglichen Lösung können wir ausnutzen, daß λ in den beiden ersten Gleichungen isoliert steht; wenn wir danach auflösen und gleichsetzen, erhalten wir die Gleichung

$$\frac{y^{1/4}}{2x^{1/2}} = \frac{x^{1/2}}{4y^{3/4}} .$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner macht daraus

$$4y^{1/4}y^{3/4} = 2x^{1/2}x^{1/2} \quad \text{oder} \quad 2y = x .$$

Einsetzen in die dritte Gleichung ergibt $3y = 12$, also ist

$$y = 4 \quad \text{und} \quad x = 8 ;$$

der Maximalwert von f ist

$$f(8,4) = 8^{1/2} \cdot 4^{1/4} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4 .$$

Auch den LAGRANGEschen Multiplikator λ können wir noch ausrechnen:

$$\lambda = \frac{y^{1/4}}{2x^{1/2}} = \frac{4^{1/4}}{2 \cdot 8^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{4} .$$

Die Berechnung von λ war für die Bestimmung des Optimums eigentlich überflüssig; λ ist nur eine Hilfsgröße zur Berechnung des Extremums. Wir wollen uns als nächstes überlegen, daß wir λ auch inhaltlich interpretieren können: Dazu betrachten wir eine Nebenbedingung

$$g(x_1, \ldots, x_n) = c$$

mit *variabler* rechter Seite c und ein Extremum der Funktion

$$f(x_1, \ldots, x_n) .$$

Dieses Extremum wird natürlich von c abhängen; wir schreiben es in der Form

$$\big(x_1(c), \ldots, x_n(c)\big)$$

und nehmen an, daß die Funktionen $x_i(c)$ stetig differenzierbar seien. (Ein interessierter Leser kann sich anhand des Satzes über implizite Funktionen überlegen, welche Bedingungen f und g erfüllen müssen,

damit dies garantiert ist.) Der Optimalwert von f in Abhängigkeit von c ist dann

$$F(c) \underset{\text{def}}{=} f\big(x_1(c), \ldots, x_n(c)\big) .$$

Nach der Kettenregel aus **[HM I]**, *Kapitel 2,* §3*c)* ist

$$F'(c) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i(c)}{dc} .$$

Genauso können wir

$$G(c) \underset{\text{def}}{=} g\big(x_1(c), \ldots, x_n(c)\big)$$

betrachten und erhalten

$$G'(c) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{dx_i(c)}{dc} .$$

Da $\big(x_1(c), \ldots, x_n(c)\big)$ ein Optimum ist, sind dort die Gradienten von f und $g - c$ proportional mit Proportionalitätsfaktor λ. Da wir bei der Gradientenbildung nur nach den x_i ableiten, von denen die rechte Seite c nicht abhängt, ist der Gradient von $g - c$ gleich dem von g selbst, d.h.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} \qquad \text{für alle } i .$$

Somit ist $F'(c) = \lambda G'(c)$. Da der Punkt $\big(x_1(c), \ldots, x_n(c)\big)$ die Nebenbedingung mit rechter Seite c erfüllt, ist aber $G(c) = c$ und damit $G'(c) \equiv 1$. Also ist $\lambda = F'(c)$ die Wachstumsrate für das Optimum bei Änderung der rechten Seite der Nebenbedingung.

Im obigen Beispiel steigt also die Maximalmenge $f(x, y)$, die mit Kapitaleinsatz 12 produziert werden kann, für kleines h ungefähr um $h/4$, wenn wir den Kapitaleinsatz auf $12 + h$ erhöhen. Die Erhöhung des Kapitaleinsatzes lohnt sich, wenn für das fertige Produkt ein Preis pro Einheit erzielt werden kann, der größer ist als vier.

Als letztes wollen wir uns noch überlegen, was passiert, wenn wir nicht nur eine, sondern mehrere Nebenbedingungen erfüllen müssen. Es geht

also wieder darum, eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ zu optimieren, jetzt aber unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) \geq 0, \quad \ldots \quad g_r(x_1, \ldots, x_n) \geq 0\,.$$

(Es genügt, Bedingungen mit $\geq$ zu betrachten, denn durch Multiplikation mit minus Eins kann man jede Ungleichung mit $\leq$ in eine mit $\geq$ überführen. Auch Gleichungen $g_i = 0$ kann man zumindest formal durch die beiden Ungleichungen $g_i \geq 0$ und $-g_i \geq 0$ ausdrücken.)

Die wichtigsten Beispiele solcher Optimierungsaufgaben sind die Fälle mit linearen Funktionen f und g_i; hier redet man von *linearen Programmen.* (Das Wort *Programme* in diesem Zusammenhang hat natürlich nichts mit Computerprogrammen zu tun.) Das wichtigste Verfahren zur Lösung solcher Aufgaben, der Simplex-Algorithmus, wird in der Vorlesung *Numerik I* behandelt, so daß wir uns hier auf die *nichtlineare Programmierung* beschränken können.

Man überlegt sich leicht, daß im linearen Fall die Nebenbedingungen ein (endliches oder unendliches) Polyeder im $\mathbb{R}^n$ definieren und eine lineare Funktion, so sie ein endliches Maximum oder Minumum hat, dieses auf dem Rand dieses Polyeders annimmt, und dort sogar in einer Ecke, Man muß daher „nur“ die Ecken dieses Polyeders untersuchen – deren Anzahl allerdings exponentiell mit der Anzahl der Variablen wächst. Trotzdem führt der Simplex-Algorithmus selbst im Fall von Zehntausenden von Variablen im allgemeinen recht schnell ans Ziel, so daß das theoretische Problem der exponentiellen Komplexität im schlimmsten Fall für praktische Anwendungen keine Bedeutung hat.

Bei nichtlinearen Funktionen ist die Situation komplizierter, denn nun kann es auch im Innern Extrema geben: Die Funktion

$$f(x, y) = e^{-x^2-y^2} \quad \text{mit der Nebenbedingung} \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

etwa nimmt ihr Maximum im Punkt $(0, 0)$ an; auf dem Rand des Einheitskreises liegen nur die Minima. Im allgemeinen Fall eines nichtlinearen Programms kann ein Optimum also entweder ganz im Innern liegen oder aber eine beliebige Teilmenge der Nebenbedingungen exakt erfüllen.

Falls wir es mit inneren Punkte zu tun haben, sind diese lokale Maxima oder Minima ohne Nebenbedingungen, und wir haben uns bereits in §1

überlegt, wie man diese bestimmt: In jedem solchen Punkt verschwindet der Gradient der zu optimierenden Funktion.

Im Falle einer einzigen *Gleichung* als Nebenbedingung ist der Gradient von f linear abhängig vom Gradienten der Nebenbedingung; da der Nullvektor von jedem anderen Vektor linear abhängig ist, schließt dies auch den Fall der Optima bei inneren Punkten mit ein. Die naheliegende Verallgemeinerung auf den Fall mehrerer Nebenbedingungen ist daher der

Satz: Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$ habe im Punkt $\boldsymbol{a} \in D$ ein Extremum unter den Nebenbedingungen

$$g_1(\boldsymbol{a}) \geq 0, \quad g_2(\boldsymbol{a}) \geq 0, \quad \ldots, \quad g_r(\boldsymbol{a}) \geq 0\,.$$

Dann sind die $r + 1$ Vektoren

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}), \quad \operatorname{grad} g_1(\boldsymbol{a}), \quad \operatorname{grad} g_2(\boldsymbol{a}), \quad \ldots, \quad \operatorname{grad} g_r(\boldsymbol{a})$$

linear abhängig.

Der *Beweis* erfordert keine wesentlich neuen Ideen gegenüber dem Fall einer einzigen Nebenbedingung und sei daher nur kurz skizziert: Falls die Gradienten der g_i im Punkt $\boldsymbol{a}$ bereits untereinander linear abhängig sind, gibt es nichts mehr zu beweisen; nehmen wir also an, sie seien linear unabhängig. Dann gibt es (mindestens) r verschiedene Variablen x_{j_1} bis x_{j_r}, so daß

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_{j_i}}(\boldsymbol{a}) \neq 0$$

ist. Also kann nach dem Satz über implizite Funktionen jede Nebenbedingung zur Elimination einer anderen Variablen benutzt werden, und im wesentlichen dieselbe Rechnung wie im Fall einer Nebenbedingung zeigt die Behauptung. ∎

Die lineare Abhängigkeit der Vektoren

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}), \quad \operatorname{grad} g_1(\boldsymbol{a}), \quad \operatorname{grad} g_2(\boldsymbol{a}), \quad \ldots, \quad \operatorname{grad} g_r(\boldsymbol{a})$$

bezeichnet man als KUHN-TUCKER-Bedingung; sie ist eine offensichtliche Verallgemeinerung der Bedingung von LAGRANGE, ist allerdings deutlich jünger: Sie erschien 1951 in einer gemeinsamen Arbeit

von H.W. KUHN und A.W. TUCKER, vier Jahre, nachdem G. DANTZIG den Simplex-Algorithmus entwickelt hatte, und fast zweihundert Jahre, nachdem LAGRANGE seine Multiplikatoren zur Bestimmung von Extrema unter einer Nebenbedingung eingeführt hatte.

§3: Numerische Verfahren

Wie wir gesehen haben, führt die Methode der LAGRANGEschen Multiplikatoren im allgemeinen auf nichtlineare Gleichungssysteme, die nur in einfachen Fällen explizit lösbar sind. In allen anderen Fällen muß man mit numerischen Methoden arbeiten, und da bietet sich an, das Problem von vornherein ohne den Umweg über LAGRANGEsche Multiplikatoren Extrema numerisch zu bearbeiten.

a) Die Gradientenmethode

Für eine differenzierbare Funktion f auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist

$$f(\boldsymbol{x} + \vec{h}) = f(\boldsymbol{x}) + \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) \cdot \vec{h} + o\left(\left|\vec{h}\right|\right) ;$$

wenn wir ein Maximum (oder Minimum) von f ansteuern wollen, liegt es daher nahe, $\vec{h}$ so zu wählen, daß sich der Funktionswert möglichst stark vergrößert (oder verkleinert).

Nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung ist

$$\left|\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) \cdot \vec{h}\right| \leq \|\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x})\| \cdot \left\|\vec{h}\right\| ;$$

wir erhalten also die maximalmögliche Veränderung bei vorgegebener Länge von $\vec{h}$ genau dann, wenn $\vec{h}$ parallel zum Gradienten ist.

Damit bietet sich folgende Strategie an: Wir wählen irgendeinen Ausgangspunkt $\boldsymbol{x}_0$ und berechnen dort den Gradienten $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$. Weiter geben uns eine Länge ℓ_0 für den Vektor $\vec{h}$ vor, die von der Länge des Gradienten abhängen kann oder auch nicht. Dann setzen wir bei der Suche nach einem Maximum

$$\vec{h}_0 = \frac{\ell_0}{\|\nabla f(\boldsymbol{x}_0)\|} \nabla f(\boldsymbol{x}_0) ;$$

bei der Suche nach Minima nehmen wir das Negative davon.

Als nächstes betrachten wir den Punkt

$$\boldsymbol{x}_1 \underset{\text{def}}{=} \boldsymbol{x}_0 + \vec{h}_0 ,$$

berechnen dort den Gradienten $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$, setzen mit geeignetem ℓ_1

$$\vec{h}_1 = \pm \frac{\ell_1}{\|\nabla f(\boldsymbol{x}_1)\|} \nabla f(\boldsymbol{x}_1)$$

(+ für Maxima, − für Minima) zur Definition des nächsten Punkts

$$\boldsymbol{x}_2 \underset{\text{def}}{=} \boldsymbol{x}_1 + \vec{h}_1$$

und so weiter. In jedem Schritt erhöhen (oder erniedrigen) wir den Funktionswert soweit wie es mit der vorgegebenen Länge ℓ_i nur möglich ist in der Hoffnung, so irgendwann auf ein Maximum (oder Minimum) zu stoßen. Dieses können wir erreichen, wenn wir am Rand des Definitionsbereichs von f angelangt sind, oder aber wenn wir in einem Punkt sind, in dem der Gradient verschwindet: Von dort aus geht es mit diesem Verfahren nicht mehr weiter.

Da wir mit einem numerischen Verfahren nur ein verschwindend geringe Chance haben, exakt in einem Extremum zu enden, zeigt sich hier auch die Notwendigkeit einer intelligenten Wahl der Schrittweiten ℓ_i: Wenn diese zu groß sind, kann es passieren, daß wir endlos um ein Extremum herumoszillieren.

Theoretisch ist auch möglich, daß wir in einem Sattelpunkt landen, aber wenn man sich überlegt, wie die Gradienten in der Umgebung eines Sattelpunktes aussehen, wird schnell klar, daß dies nur sehr selten passiert.

Abbildung 57 zeigt ein einfaches Beispiel für einen mit der Gradientenmethode zurückgelegten Weg; hier wurde in jedem Schritt

$$\begin{pmatrix} h_i \\ k_i \end{pmatrix} = 0{,}1 \cdot \nabla f(x_i, y_i)$$

gesetzt. Der Weg geht offensichtlich recht zielstrebig auf das Maximum zu.

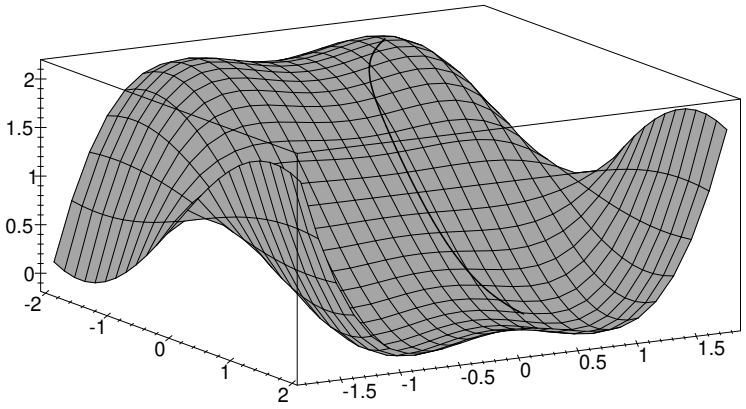


Abb. 57: Eine Anwendung der Gradientenmethode

Abbildung 58 zeigt dasselbe Bild in einen etwas größeren Zusammenhang; hier sehen wir, daß unser Streben nach kurzfristigen Gewinnen langfristig wohl doch nicht so erfolgreich war: Wenn wir vom Startpunkt aus nach rechts in die kleine Mulde abgestiegen wären, hätten wir auf dem gegenüberliegenden Hang deutlich größere Funktionswerte erreicht als im lokalen Maximum, in dem wir schließlich gelandet sind.

Dies ist ein grundsätzliches Problem von Gradientenverfahren: Falls man sie in der Nähe des (absoluten) Optimums starten läßt, führen sie schnell und zuverlässig ans Ziel, ansonsten aber ist die Gefahr sehr groß, daß man in einem nur lokalen Optimum steckenbleibt.

Um von dort wieder weiterzukommen, gibt es verschiedene Strategien. Eine anschaulich recht klare ist die sogenannte „Tunnelung“. Der Name entstand aus der Betrachtung von Minimisierungsproblemen; nehmen wir also an, wir wollen das Minimum der Funktion $f(x, y)$ in einem gewissen Bereich finden und ein Gradientenverfahren hat uns in einen Punkt $\boldsymbol{x}_M$ geführt, von dem aus es nicht mehr weiterkommt. Um zu sehen, ob $z_M = f(\boldsymbol{x}_M)$ wirklich der kleinste Wert ist, den f im betrachteten Bereich annehmen kann, versuchen wir, eine weitere Lösung der Gleichung

$$f(\boldsymbol{x}) = z_M$$

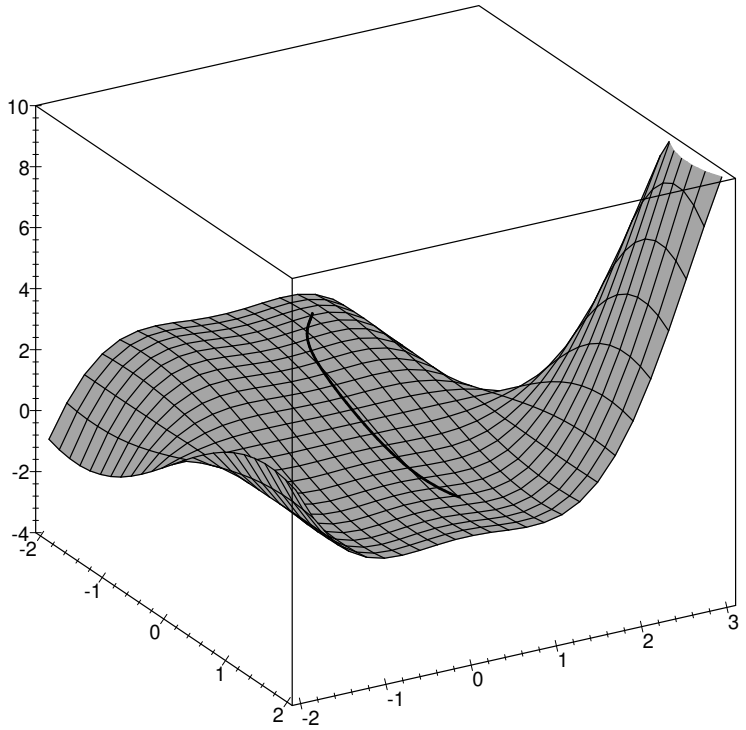


Abb. 58: Der Weg aus Abb. 57 aus einem weiteren Blickwinkel

zu finden. Dafür gibt es eine ganze Reihe numerischer Verfahren, z.B. das Verfahren von NEWTON-RAPHSON, mit denen sich zumindest ein solcher Punkt leicht finden läßt. Leider könnte dieser Punkt unser Ausgangspunkt $\boldsymbol{x}_M$ sein; deshalb sucht man tatsächlich nicht nach Lösungen der Gleichung $f(\boldsymbol{x}) = z_M$, sondern nach Lösungen einer leicht abgewandelten Gleichung der Form

$$\widetilde{f}(\boldsymbol{x}) = z_M \ ,$$

wobei $\widetilde{f}$ dadurch aus f entsteht, daß man die Funktionswerte in der

unmittelbaren Umgebung von (x_M, y_M) starkt anhebt, so daß das dortige Minimum verschwindet. Dazu kann man beispielsweise eine Funktion der Form

$$G(x,y) = ae^{\frac{(x-x_M)^2+(y-y_M)^2}{b}}$$

mit geeigneten Parametern a, b wählen, wie sie in Abbildung 59 zu sehen ist, und

$$\widetilde{f}(x,y) = f(x,y) + G(x,y)$$

setzen.

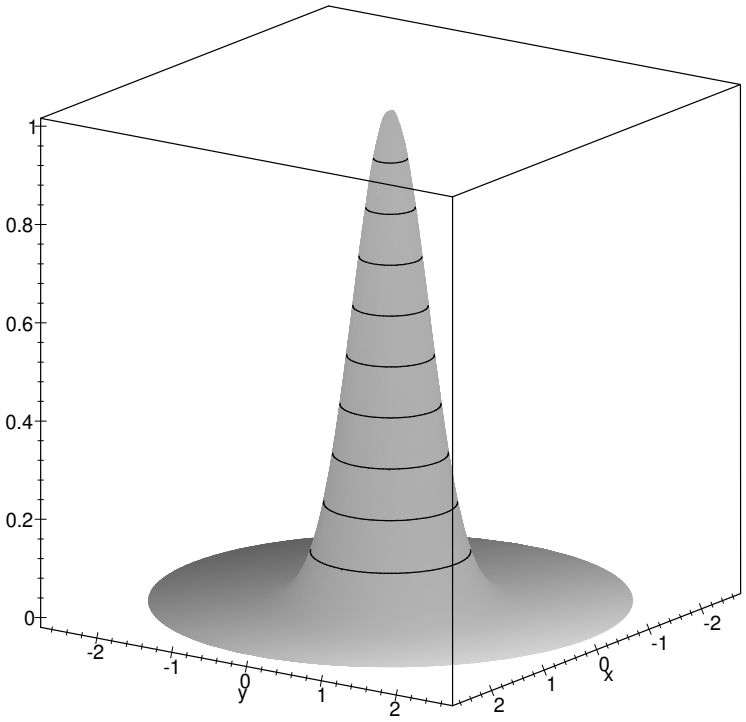


Abb. 59: $G(x,y) = e^{-3(x^2+y^2)}$

Dies bringt das Minimum im Punkt $\boldsymbol{x}_M$ zum Verschwinden und verändert die Funktion praktisch nicht, wenn man nur hinreichend weit entfernt ist von $\boldsymbol{x}_M$. (Je kleiner b ist, umso lokalisierter ist die Veränderung.) Eine Lösung der Gleichung

$$\widetilde{f}(\boldsymbol{x}) = z_M \ ,$$

so es eine gibt, liegt also nicht in der unmittelbaren Umgebung von $\boldsymbol{x}_M$ und ist daher ein guter Ausgangspunkt, um dort die Gradientenmethode noch einmal zu starten bis zum nächsten lokalen Minimum und so weiter. Sobald die Gleichung nicht mehr lösbar ist, können wir ziemlich sicher sein, daß z_M das globale Minimum ist – es sei denn, wir hätten die Parameter a und b sehr dumm gewählt.

Tunnelung ist auch ein wichtiges Konzept in der Physik: Dort versucht ein System bekanntlich stets, sein Energieminimum zu erreichen. Dies kann jedoch daran scheitern, daß es sich in einem lokalen Minimum befindet und nicht genügend Energie aufbringen kann, um den Energiewall zu überwinden, der es vom absoluten Minimum trennt. Zumindest im Bereich der Quantentheorie gibt es dann auch den sogenannten *Tunneleffekt,* der es einzelnen Teilchen erlaubt, diesen Wall zu tunneln und auf diese Weise einen Zustand niedrigerer Energie zu erreichen.

Im obigen Beispiel geht es nicht um ein Minimum, sondern um ein Maximum, da die Suche danach graphisch besser darstellbar ist. Also graben wir auch keinen Tunnel, sondern spannen ein Hochseil, das irgendwo auf der eingezeichneten Ebenen liegt und uns vom erreichten Zwischenhoch zur Startposition für einen weiteren Anstieg bringt. (Tatsächlich ist die Ebene etwas zu tief eingezeichnet, damit man das alte Maximum noch erkennen kann; das Seil muß also etwas höher hängen.)

b) Der Metropolis-Algorithmus

Eine weitere Idee zur Vermeidung von Zwischenhochs hat ebenfalls viel mit Physik zu tun: Ein Gas erreicht seinen Zustand minimaler Energie dann, wenn die Bewegungsenergie $\frac{1}{2}mv^2$ eines jeden Teilchens gleich null ist, wenn sich also nichts mehr bewegt. Dies geschieht aber höchstens am absoluten Nullpunkt; bei positiven Temperaturen werden

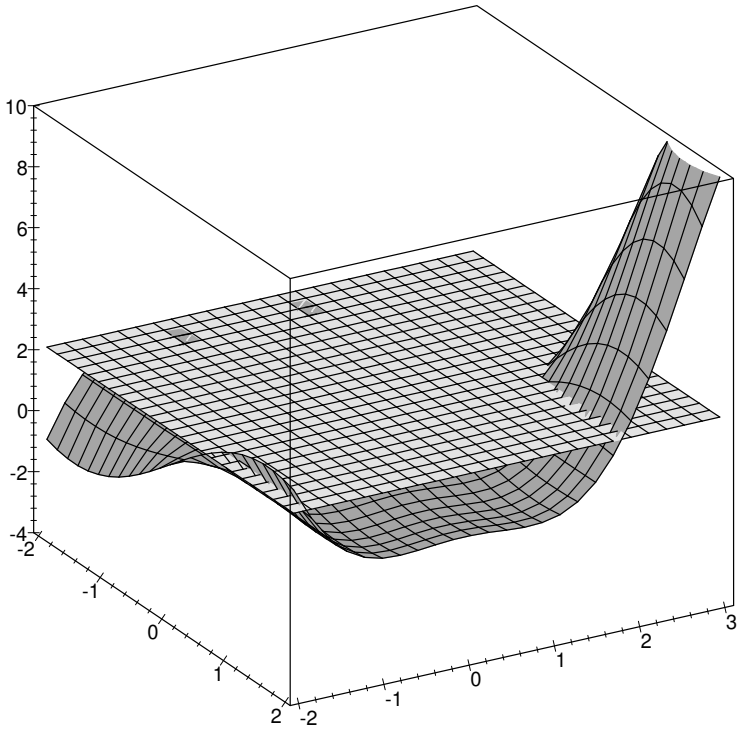


Abb. 60: „Tunnelung“ für Maxima

die meisten Teilchen positive kinetische Energie haben. Nach LUDWIG BOLTZMANN ist dabei die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Teilchen die Energie $E = \frac{1}{2}mv^2$ hat, bei Temperatur T proportional zu

$$e^{-\frac{E}{kT}},$$

mit einer Konstanten $k \approx 1{,}38066 \cdot 10^{-23} J/K$, die heute als BOLTZMANN-Konstante bezeichnet wird.

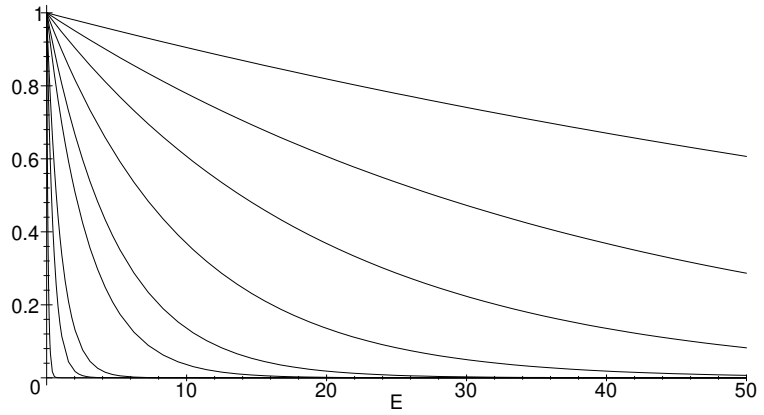


Abb. 61: $e^{-E/kT}$ für $kT = 0{,}1, 0{,}5, 1, 3, 5, 10, 20, 40, 100$

LUDWIG BOLTZMANN (1844–1906) wuchs auf und studierte in Wien; danach lehrte er in Graz, Heidelberg, Berlin, Graz, Wien, Graz, Wien, Leipzig und Wien. Er war Professor für Theoretische Physik, für Mathematik und für Experimentalphysik. Auf seiner letzten Stelle in Wien hielt er eine so erfolgreiche Philosophievorlesung, daß ihn Kaiser Franz Josef in den Palast einlud. Am bekanntesten ist er für die Begründung der statistischen Mechanik, einer damals sehr umstrittene Theorie. Ob die damit verbundenen Anfeindungen zu seinem Selbstmord führten, ist unbekannt.

Bei der *simulierten Abkühlung* oder BOLTZMANN-*Maschine* ahmt man dies nach, indem man mit einer hohen Temperatur startet und der Richtung, in der man weitergeht, einer dieser Temperatur entsprechende Freiheit läßt. Man geht also nicht mehr unbedingt in Richtung des Gradienten, sondern geht zufällig in eine von endlich vielen vorgegebenen Richtungen. Die Wahrscheinlichkeit für den Richtungsvektor $\vec{h}_j$ soll dabei analog zur BOLTZMANN-Verteilung festgelegt werden, d.h. wir ordnen ihm eine „Energie“

$$E_j = \pm\big(f(\boldsymbol{x} + \vec{h}_j) - f(x, y)\big)$$

zu (positiv bei der Suche nach einem Minimum, negativ bei der Suche nach einem Maximum) und die Wahrscheinlichkeit dafür, daß wir in

Richtung $\vec{h}_j$ gehen, soll proportional sein zu $e^{-E_j/kT}$. Sie ist also, falls N Richtungen zur Verfügung stehen, gleich

$$p_j \underset{\text{def}}{=} \frac{e^{-E_j/kT}}{\sum_{\ell=1}^{N} e^{-E_\ell/kT}}.$$

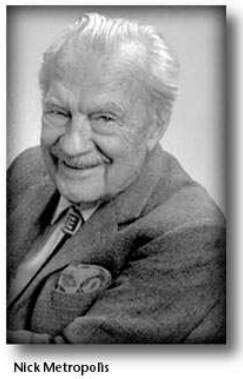
Zur Wahl einer Richtung erzeugen wir uns somit eine Zufallszahl Z zwischen null und eins und gehen in Richtung $\vec{h}_j$, wenn

$$\sum_{\ell=1}^{j-1} p_\ell < Z \leq \sum_{\ell=1}^{j} p_\ell$$

ist. (Die Frage, wie lang die Richtungsvektoren im wievielten Schritt sein sollen, wollen wir hier ausklammern.)

Bie hohen Temperaturen ist damit die Richtung fast vollständig zufallsbedingt gewählt, während in der Nähe des absoluten Nullpunkts praktisch nur noch die optimale Richtung eine Chance hat. Falls wir bei hoher Temperatur in einem Zwischenextremum landen, sorgt dies also mit recht hoher Wahrscheinlichkeit dafür, daß wir dort nicht steckenbleiben.

Am Ende wollen wir allerdings im absoluten Optimum steckenbleiben, d.h. wir müssen die Temperatur im Verlauf der Rechnung immer weiter senken – daher der Name *simulated annealing* = simulierte Abkühlung. Bei der Anwendung auf Optimierungsprobleme bezeichnet man diese Vorgehensweise als den METROPOLIS-Algorithmus. In welcher Weise man die Temperatur am besten senkt, ist immer noch ein Gebiet aktiver Forschung. Man kann zeigen, daß man statistisch betrachtet praktisch immer im Optimum landet, wenn man mit einer hinreichend hohen Ausgangstemperatur T_1 startet und im r-ten Schritt mit Temperatur $T_1/\log(r+1)$ arbeitet, aber bei einer derart langsamen Abkühlung braucht der Algorithmus viel zu lange, um ans Ziel zu kommen.


Nick Metropolis

NICHOLAS METROPOLIS (1915–1999) wuchs auf in Chicago, wo er Physik studierte und 1941 promovierte. Seit 1943 arbeitete er, unterbrochen durch Professuren an der Universität Chicago von 1945–1948 und 1957–1965, in den Los Alamos Labaratories, die ihn im Nachruf als *giant of mathematics and one of the founders of the Information Age* bezeichneten. Sein Ruhm als Mathematiker beruht vor allem auf den von ihm entwickelten Anwendungen statistischer Verfahren auf eine Vielzahl von mathematischen Problemen; zum Pionier des Informationszeitalter macht ihn u. a., daß er einer der ersten Anwender des ersten elektronischen Computers ENIAC war, dessen Nachfolger MANIAC baute und an der Universität Chicago das Institute for Computer Research gründete und bis 1965 leitete.

In Abbildung 62 sieht man, wie sich der Algorithmus bei einer Abkühlungsregel verhält, die im r-ten Schritt mit Temperatur T_1/r arbeitet: Zumindest im gezeigten Fall funktioniert das recht gut.

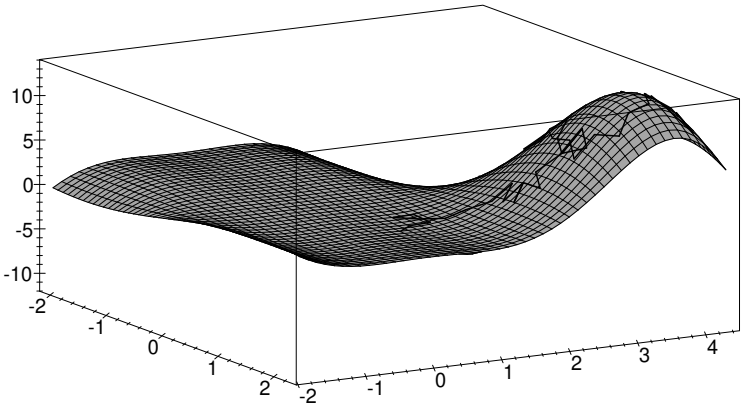


Abb. 62: Der METROPOLIS-Algorithmus für obiges Problem

In anderen Fällen (d.h., wenn andere Zufallszahlen gezogen werden) bleibt man damit aber auch gelegentlich ziemlich lange im Tal hängen; ein Beipspiel dafür zeigt Abbildung 63.

Auch hier kommt man aber immerhin in eine gute Startposition, und oft

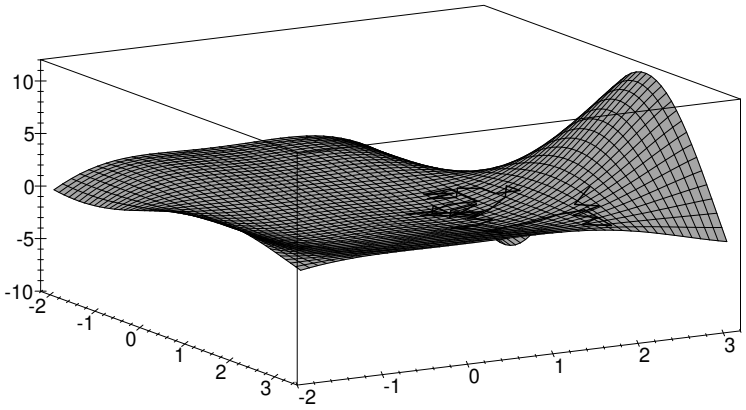


Abb. 63: Ditto mit anderen Zufallszahlen

wird es am besten sein, nach hinreichend vielen METROPOLIS-Schritten einfach ein gewöhnliches Gradientenverfahren zu starten.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß der METROPOLIS-Algorithmus und verwandte Verfahren (die sogenannten Monte-Carlo-Methoden) sehr nützliche Hilfsmittel zur Optimierung sind, falls man so gut wie nichts über die zu optimierende Funktion weiß. Sie funktionieren nicht nur bei kontinuierlichen Problemen, wie den hier betrachteten, sondern auch für diskrete und kombinatorische Optimierungsprobleme.

Sie haben allerdings den Nachteil, daß man nie garantieren kann, daß man ein Optimum erreichen wird, und selbst wenn man eines erreicht, kann die Methode dies nicht erkennen. (Es gibt alternative numerische Methoden, die das können.)

c) Zusammenfassung

Die nichtlineare Optimierung ist ein sehr weites Feld, von dem eine Grundvorlesung wie die *Höhere Mathematik* nur einen kleinen Ausschnitt behandeln kann. Dieser Ausschnitt besteht nicht aus den für die Praxis wichtigsten Verfahren, sondern aus denen, die sich am besten in den Stoff der Vorlesung einordnen. Sie sind zwar (in Kombination

mit dem aus der *Numerik* bekannten Simplex-Verfahren) die Grundbausteine, aus denen die meisten praktisch relevanten Verfahren zusammengesetzt sind, aber für die vielen kleinen Abwandlungen, die dazu führen, daß man ein Problem wirklich effizient lösen kann, müßte man deutlich mehr Zeit aufwenden, als hier zur Verfügung steht. Interessenten seien auf entsprechende Spezialvorlesung aus dem Bereich der Mathematik oder Operations Research verwiesen.

§4: Grundzüge der Fehler- und Ausgleichsrechnung

Physikalische Gesetze machen meist nur dann eine Aussage über ein reales System, wenn alle Umgebungsbedingungen exakt kontrolliert werden können. Das ist in der Praxis natürlich nie möglich. Insbesondere hat man bei der Anwendung physikalischer Prinzipen zur Messung von Daten keine Chance, den exakten Wert der zu messenden Größe zu bestimmen; der gemessene Wert wird immer von zahlreichen kleineren Störungen beeinflußt sein, die man bei einem gut durchgeführten Experiment für alle praktischen Zwecke als zufällig betrachten kann.

Zusätzlich kann die Messung noch durch mehr oder weniger große *systematische* Fehler verfälscht sein; diese können hervorgerufen werden durch ein falsch kalibriertes Meßgerät, Ablesen auf der falschen Skala eines Meßinstruments, durch falsche Anwendung von Meßvorschriften *usw.* Mit diesen systematischen Fehlern wollen wir uns hier nicht beschäftigen; in diesem Paragraphen soll es nur um *Zufallsfehler* gehen.

a) Das Laplacesche Fehlermodell

Der französische Mathematiker PIERRE SIMON, MARQUIS DE LAPLACE (1749–1827), dem wir in dieser Vorlesung bereits mehrfach begegnet sind, entwickelte ein extrem vereinfachtes Modell für das Zustandkommen zufälliger Meßfehler. Trotz seiner unrealistischen Annahmen ist es auch für die Praxis immer noch sehr interessant, da man inzwischen weiß, daß auch sehr viel kompliziertere realistische Fehlerquellen dasselbe Verhalten zeigen, das LAPLACE aus seinem Modell ableitete.

Die Grundannahme des LAPLACEschen Fehlermodells können wir uns so vorstellen, daß eine große Anzahl von „Dämonen“ (oder Fehlerquellen)

unsere Meßergebnisse verfälschen; jeder einzelne dieser „Dämonen“ verursacht einen Fehler derselben Größe ε in positiver oder negativer Richtung, wobei die Wahrscheinlichkeit für $+\varepsilon$ *bzw.* $-\varepsilon$ für jeden der „Dämonen“ jeweils 50% sein soll und die einzelnen „Dämonen“ unabhängig voneinander handeln sollen.

Im Falle eines einzigen „Dämonen“ wäre der Fehler also mit gleicher Wahrscheinlichkeit $+\varepsilon$ oder $-\varepsilon$, bei zwei „Dämonen“ wäre er in jeweils 25% aller Fälle $+2\varepsilon$ oder -2ε, während sich in 50% der Fälle die beiden Fehler aufheben würden.

Allgemein gibt es bei n „Dämonen“ 2^n gleichwahrscheinliche Möglichkeiten für deren Verhalten; die folgende Tabelle zeigt für $n \le 5$ jeweils die Anzahl der Fälle, die zu dem in der Kopfzeile angegebenen Gesamtfehler führen:

	-5ε	-4ε	-3ε	-2ε	$-\varepsilon$	0	$+\varepsilon$	$+2\varepsilon$	$+3\varepsilon$	$+4\varepsilon$	$+5\varepsilon$
$n=0$						1					
$n=1$					1		1				
$n=2$				1		2		1			
$n=3$			1		3		3		1		
$n=4$		1		4		6		4		1	
$n=5$	1		5		10		10		5		1

Diese dreiecksförmige Anordnung von Zahlen bezeichnet man als PASCAL*sches Dreieck.* Offenbar kann man es dadurch rekursiv zeilenweise berechnen, daß man an jede Stelle die Summe der beiden links und rechts darüberstehenden Zahlen schreibt: Die n-te Störung bringt den Fehler genau dann auf $i \cdot \varepsilon$, wenn sie entweder gleich $+\varepsilon$ ist und die ersten $n-1$ Störungen einen Fehler $(i-1)\cdot\varepsilon$ produziert haben, oder aber wenn sie gleich $-\varepsilon$ ist und die ersten $n-1$ Störungen einen Fehler $(i+1)\cdot\varepsilon$ produziert haben. Entsprechend ist auch klar, daß die Summe aller Zahlen in der n-ten Zeile gleich 2^n ist, denn in der nullten Zeile haben wir Summe eins, und da die jeweils neu hinzukommende Störung genau zwei Möglichkeiten hat, verdoppelt sich die Summe von Zeile zu Zeile. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich n Störungen zu $i \cdot \epsilon$ aufsummieren, ist also gerade gleich der Zahl, die in der n-ten Spalte

unter $i \cdot \varepsilon$ steht (beziehungsweise Null, wenn dort keine Zahl steht), dividiert durch 2^n.

Bekanntlich kann man die Zahlen in diesem Dreieck auch explizit berechnen: An der n-ten Zeile stehen die $n+1$ Zahlen

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad \text{für} \quad i = 0, \ldots, n\,.$$

Wer diese Formel nicht kennt, kann sie leicht durch vollständige Induktion beweisen: Für $n = 1$ sowie allgemein für $i = 0$ oder $i = n$ ist alles klar; für $n > 1$ und $0 < i < n$ stehen über $\binom{n}{i}$ die beiden Zahlen $\binom{n-1}{i-1}$ und $\binom{n-1}{i}$, für die in der Tat gilt

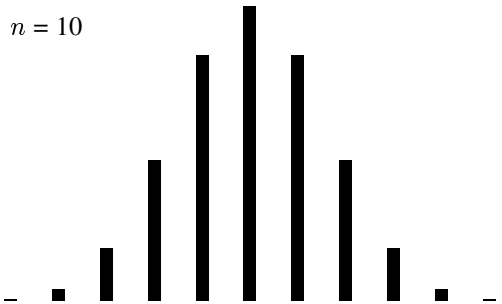
$$\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i} = \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} + \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} = \frac{(n-1)!}{i!(n-i)!} \cdot \Big(i + (n-i)\Big)$$
$$= \frac{n!}{i!(n-i)!} = \binom{n}{i}\,.$$

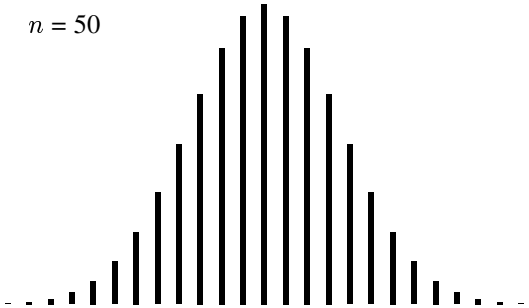
Mit dieser Formel lassen sich die Fallanzahlen für einen bestimmten Fehler im Prinzip berechnen; allerdings ist die Berechnung für große n schnell sehr aufwendig und die Binomialkoeffizienten werden auch schnell sehr groß. Um trotzdem einen Eindruck davon zu bekommen, was für größere n passiert, sind auf den beiden folgenden Seiten die Binomialkoeffizienten für $n = 5, 10, 50, 100, 500$ und 1000 graphisch dargestellt. (Die Tatsache, daß ab $n = 50$ deutlich weniger als $n+1$ Balken zu sehen sind, erklärt sich daraus, daß die restlichen Binomialkoeffizienten zu klein sind, um noch darstellbar zu sein: Die Diagramme sind so skaliert, daß der größte (mittlere) Balken jeweils eine feste Höhe hat.)

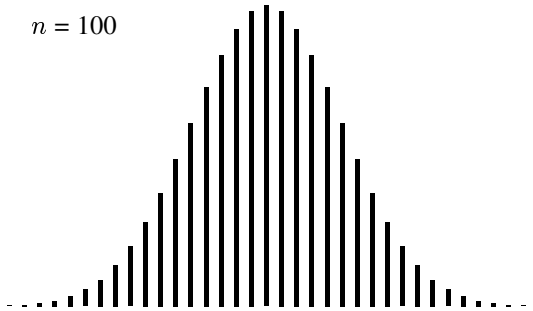
Betrachten wir als nächstes die Größe des Gesamtfehlers. Falls n gerade ist, treten nur Vielfache von 2ε auf und alle diese Vielfachen zwischen $-n\varepsilon$ und $n\varepsilon$ kommen tatsächlich vor; ensprechend sind für ungerades n nur ungeradzahlige Vielfache von ε möglich, und auch hier werden wieder alle solchen Werte zwischen $-n\varepsilon$ und $n\varepsilon$ angenommen. Wir können dies dadurch zusammenfassen, daß in beiden Fällen genau die Werte $(n-2k)\varepsilon$ mit $k = 0, \ldots, n$ angenommen werden, und das PASCALsche Dreieck zeigt, daß der Fehler $(n-2k)\varepsilon$ in

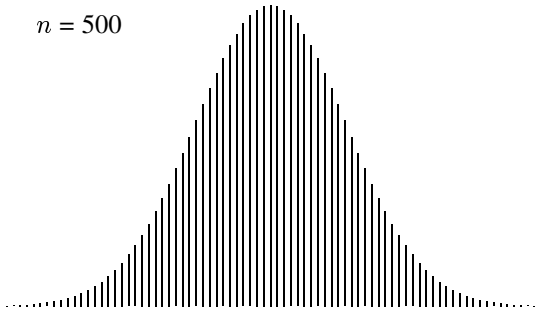
$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

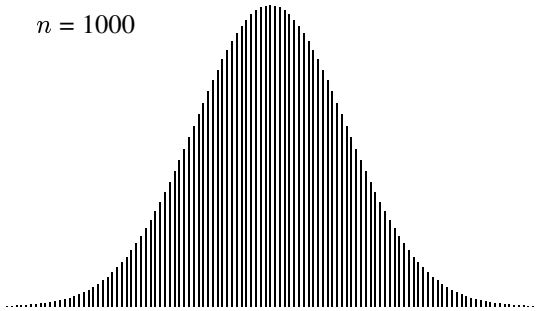
$n = 5$


$n = 10$


$n = 50$


$n = 100$


$n = 500$


$n = 1000$

Fällen auftritt. Da n „Dämonen“ insgesamt 2^n Möglichkeiten zur Fehlererzeugung haben, ist die Wahrscheinlichkeit für den Gesamtfehler $(n-2k)\varepsilon$ also

$$\binom{n}{k} \cdot 2^{-n}\,.$$

Diese Wahrscheinlichkeit sollte für einen festen Fehlerbetrag im wesentlichen unabhängig von n sein: Da wir nicht wirklich an Dämonen glauben, können wir deren Anzahl schließlich nicht in ein realistisches Fehlermodell einfließen lassen.

Auch die Balkendiagramme zeigen, daß sich die Verteilung der Fehlerwahrscheinlichkeiten für große n einer festen Kurve annähern sollte, der in Abbildung 64 und auf jedem Zehnmarkschein zu findenden *Glockenkurve* oder GAUSS-Kurve.

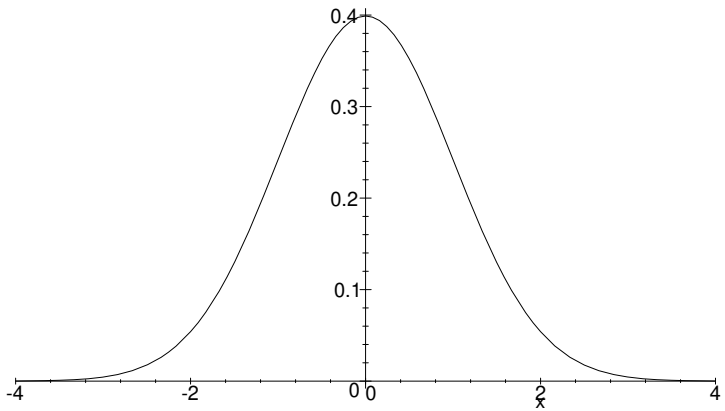


Abb. 64: Die „Glockenkurve“ $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

Wenn sich Fehler oder auch beliebige Daten so veteilen, wie es dieser Kurve entspricht, redet man von *normalverteilten* Daten. Damit haben wir also zumindest graphisch gesehen, daß Meßfehler nach dem LAPLACEschen Fehlermodell normalverteilt sind. Das sagt noch nicht unbedingt etwas über die Verteilung realer Meßfehler, da das

LAPLACEsche Fehlermodell von unrealistisch einfachen Annahmen ausgeht; nach einem der fundamentale Gesetze der Statistik, dem *zentralen Grenzwertsatz,* führen aber auch realistischere Annahmen zu genau derselben Verteilung: Sind $u_1, \ldots, u_n$ beliebige Quellen von Zufallsfehlern, über deren Verteilung wir (fast) nichts voraussetzen müssen, so ist ihre Summe für hinreichend großes n annähernd normalverteilt. Das eingeklammerte Wort „fast“ ist dabei für praktische Zwecke bedeutungslos, und als „groß“ kann man sich ein n ab etwa dreißig oder vierzig vorstellen.

Im nächsten Paragraphen werden wir uns überlegen, wie man zu einer Gleichung für die Glockenkurve kommt.

b) Statistische Kenngrößen

Die übliche Strategie zum Umgang mit Zufallsfehlern ist wohlbekannt: Man begnügt sich nicht mit einer einzigen Messung, sondern mißt dieselbe Größe mehrmals, so daß man eine ganze Meßreihe

$$x_1, x_2, \ldots, x_N$$

erhält. Dann bildet man das *arithmetische Mittel*

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

der Meßreihe in der Hoffnung, daß sich hierbei die Fehler „ausmitteln“, so daß $\overline{x}$ dem theoretisch korrekten Wert $\hat{x}$ nahekommt.

Die Wahl des arithmetischen Mittels läßt sich auch geometrisch begründen: Eine Meßreihe $x_1, \ldots, x_N$ für eine Meßgröße mit exaktem Wert $\hat{x}$ definiert einen Vektor im $\mathbb{R}^n$. Falls es keine Meßfehler gäbe, hätte dieser lauter identische Komponenten $\hat{x}$. Tatsächlich ist dies natürlich nicht der Fall; wir können aber nach einem Vektor mit identischen Komponenten suchen, der möglichst nahe am Vektor der Meßwerte liegt. Für einen Vektor, dessen sämtliche Komponenten gleich x sind, ist der EUKLIDische Abstands zum Vektor der Meßwerte gleich

$$d(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x - x_i)^2} = \sqrt{Nx^2 - 2x \sum_{i=1}^{N} x_i + \sum_{i=1}^{N} x_i^2}\,.$$

Die quadratische Funktion $d(x)^2$ hat ein eindeutig bestimmtes Minimum bei der Nullstelle ihrer Ableitung

$$2Nx - 2\sum_{i=1}^{N} x_i \,,$$

also beim arithmetischen Mittel $\overline{x}$, und dieses ist auch das einzige Minimum von $d(x)$. Wir nehmen daher das arithmetische Mittel $\overline{x}$ als besten verfügbaren Schätzwert für den unbekannten korrekten Wert $\hat{x}$.

Als Maß für die Schwankungen innerhalb der Meßreihe und damit für die Meßfehler könnte man versucht sein, den Abstand $d(\hat{x})$ zu nehmen; er hat aber den Nachteil, daß er mit steigendem N immer größer wird, d.h. die Schwankungen würden umso größer, je mehr man mißt. Das ist natürlich absurd; daher dividieren wir das Abstandsquadrat noch durch N und definieren die *mittlere quadratische Abweichung* oder *Varianz* der Meßreihe als

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\hat{x} - x_i)^2 \,.$$

Die (nichtnegative) Quadratwurzel σ hieraus heißt *Standardabweichung* der Meßreihe.

Das Ergebnis einer Messung wird meist angegeben in der Form

$$x = \overline{x} \pm \sigma \,,$$

man betrachtet also die Standardabweichung der Meßreihe als Maß für den Meßfehler. Da deren Definition allerdings vom (im allgemeinen unbekannten) korrekten Wert $\hat{x}$ abhängt, können wir sie nicht berechnen, sondern müssen im folgenden sehen, wie wir sie zumindest schätzen können.

Als einfachste Möglichkeit bietet sich an, σ^2 durch

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\overline{x} - x_i)^2$$

zu schätzen, aber das führt sicherlich zu einem zu kleinen Ergebnis: Schließlich ist $d(\overline{x})$ das eindeutig bestimmte Minimum der Abstandsfunktion d, so daß der korrekte Wert $d(\hat{x})$ für $\hat{x} \neq \overline{x}$ notwendigerweise größer sein muß.

In Abschnitt *d)* werden wir aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz einen besseren Schätzwert für σ herleiten.

Warum betrachten wir eigentlich quadratische Abweichungen und nicht die einfacheren linearen Abweichungen? Nun, der Mittelwert aller Abweichungen ist

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i - \frac{1}{N}N\overline{x} = \overline{x} - \overline{x} = 0 \,,$$

also ist dies keine geeignete Maßzahl. Möglich wäre die mittlere *betragsmäßige* Abweichung

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|x_i - \overline{x}| \,,$$

allerdings wird die im allgemeinen nicht für das arithmetische Mittel $\bar{x}$ minimal, sondern, wie man sich leicht überlegen kann, für jede Zahl $\overline{x}$ mit der Eigenschaft, daß gleichviele Meßwerte größer und kleiner als $\overline{x}$ sind; einen solchen Wert $\overline{x}$ bezeichnet man als *Median* der Meßreihe. Für die Beschreibung wirtschafts- und sozialwissenschaftlicher Daten ist dieser Median meist eine aussagekräftigere Kennzahl als das arithmetische Mittel; in den Naturwissenschaften und der Technik spielt er allerdings keine große Rolle. Im nächsten Paragraphen werden wir sehen, daß auch das LAPLACEsche Fehlermodell in natürlicher Weise auf quadratische Abweichungen führt.

c) Das Fehlerfortpflanzungsgesetz

Gegeben seien zwei Größen

$$x = \hat{x} \pm \sigma_x \quad \text{und} \quad y = \hat{y} \pm \sigma_y$$

(die Verallgemeinerung auf mehr als zwei Größen erfordert, wie man sich bei der folgenden Rechnung leicht klarmacht, nur etwas mehr Schreibaufwand; sie ist nicht prinzipiell schwieriger), und eine Größe

$$w = f(x, y) \,,$$

die von diesen beiden abhängt. Um vernünftige Aussagen machen zu können, setzen wir dabei f als stetig differenzierbar voraus.

Für x seien N Meßwerte $x_1, \ldots, x_N$ gegeben, und für y entsprechend M Werte $y_1, \ldots, y_M$. Wenn wir echte Zufallsfehler haben, können

wir davon ausgehen, daß die Fehler der x-Werte und die der y-Werte voneinander unabhängig sind, und das wollen wir im folgenden auch annehmen.

Für w haben wir dann NM Werte $w_{ij} = f(x_i, y_j)$, deren Mittelwert die beste Schätzung für den „wahren" Wert $\widehat{w} = f(\hat{x}, \hat{y})$ ist. Dieser Mittelwert ist für komplizierte Funktionen f und/oder große Werte von n und m umständlich auszurechnen; günstiger wäre es, einfach den Mittelwert $\bar{x}$ der x_i und den Mittelwert $\bar{y}$ der y_j zu berechnen, um dann $f(\bar{x}, \bar{y})$ als Schätzung für $\widehat{w}$ zu benutzen. Zur Abschätzung des dadurch bedingten Fehler setzen wir

$$x_i = \bar{x} + h_i \quad \text{und} \quad y_j = \bar{y}_j + k_j \,;$$

dann ist wegen der Differenzierbarkeit von f

$$\begin{aligned} w_{ij} &= f(x_i, y_j) = f(\bar{x} + h_i, \bar{y} + k_j) \\ &= f(\bar{x}, \bar{y}) + f_x(\bar{x}, \bar{y})h_i + f_y(\bar{x}, \bar{y})k_j + o\left(\sqrt{h_i^2 + k_j^2}\right) \,, \end{aligned}$$

wobei

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{und} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

die partiellen Ableitungen von f bezeichnen. Da die h_i und die k_j als Abweichungen vom Mittelwert die Summe null haben, ist also der Mittelwert der w_{ij} bis auf einen Fehler der Größenordnung $o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)$ gleich $f(\bar{x}, \bar{y})$, wobei h, k die Batragsmaxima der h_i, k_j sind.

Als nächstes müssen wir den Fehler von $\widehat{w}$ berechnen, also den Erwartungswert der $(w_{ij} - \widehat{w})^2$. Dazu schreiben wir zunächst

$$x_i = \hat{x} + u_i \quad \text{und} \quad y_j = \hat{y}_j + v_j \,,$$

betrachten also anstelle der Abweichungen vom Mittelwert die echten Meßfehler, und erhalten genau wie eben

$$w_{ij} - \widehat{w} = f(x_i, y_j) - f(\hat{x}, \hat{y}) \approx u_i \cdot f_x(\hat{x}, \hat{y}) + v_j \cdot f_y(\hat{x}, \hat{y})$$

mit Quadrat

$$\begin{aligned} (w_{ij} - \widehat{w})^2 &\approx \left(u_i \cdot f_x(\hat{x}, \hat{y}) + v_j \cdot f_y(\hat{x}, \hat{y})\right)^2 \\ &= u_i^2 \cdot f_x(\hat{x}, \hat{y})^2 + v_j^2 \cdot f_y(\hat{x}, \hat{y})^2 + 2u_i \cdot v_j \cdot f_x(\hat{x}, \hat{y}) \cdot f_y(\hat{x}, \hat{y}) \,. \end{aligned}$$

Hier sind die Werte u_i^2, v_j^2 und $u_i v_j$ jeweils Zufallsgrößen, über deren Werte wir nichts sagen können. Wir haben aber gewisse Erwartungen darüber, wie sie sich *im Mittel* verhalten: u_i^2 sollte, da σ_x^2 die mittlere quadratische Abweichung von $\hat{x}$ ist, im Mittel gleich σ_x^2 sein und v_j^2 entsprechend σ_y^2. Genauso sollten u_i und v_j im Mittel gleich null sein, und wenn wir annehmen, daß die Fehler u_i und v_j voneinander unabhängig sind, sollte auch ihr Produkt im Mittel verschwinden. Diese sogenannten *Erwartungswerte* sind offensichtlich die bestmöglichen Schätzwerte für die jeweiligen Größen; als beste Schätzung für σ_w^2 erhalten wir damit das GAUSS*sche Fehlerfortpflanzungsgesetz*

$$\sigma_w^2 = f_x(\hat{x}, \hat{y})^2 \cdot \sigma_x^2 + f_y(\hat{x}, \hat{y})^2 \cdot \sigma_y^2$$

oder

$$\sigma_w = \sqrt{f_x(\hat{x}, \hat{y})^2 \cdot \sigma_x^2 + f_y(\hat{x}, \hat{y})^2 \cdot \sigma_y^2} \,.$$

Genauso gilt dieses Gesetz auch für Funktionen von mehr als zwei Größen; für $w = f(x_1, \ldots, x_n)$ ist

$$\sigma_w = \sqrt{f_{x_1}(\hat{x}_1, \ldots \hat{x}_n)^2 \cdot \sigma_{x_1}^2 + \cdots + f_{x_n}(\hat{x}_1, \ldots \hat{x}_n)^2 \cdot \sigma_{x_n}^2} \,.$$

d) Die Standardabweichung des Mittelwerts und die Schätzung der Varianz

Als einfache Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes betrachten wir die Funktion

$$\bar{x} = f(x_1, \ldots, x_N) = \frac{x_1 + \cdots + x_N}{N} \,,$$

also den Mittelwert der x_i. Jede Messung x_i sei mit demselben erwarteten Fehler σ behaftet; da alle partiellen Ableitungen von f gleich $1/N$ sind, folgt für den Fehler des Mittelwerts

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \,.$$

Dies bestätigt die implizit stets angewandte Regel, daß man durch mehrfaches Messen ein zuverlässigeres Ergebnis erhält; durch 25 Messungen beispielsweise läßt sich der Fehler auf ein Fünftel reduzieren, und für $N \to \infty$ geht er gegen Null *(Gesetz der großen Zahl).*

Damit wissen wir, wie man aus den Meßwerten auf den Fehler des Mittelwerts schließen kann – sofern man die Fehler der Meßwerte kennt. Wie lassen sich diese schätzen?

Zunächst ist

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\hat{x}-x_i)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\big((\hat{x}-\bar{x})+(\bar{x}-x_i)\big)^2$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\hat{x}-\bar{x})^2 + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}-x_i)^2 + \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}(\hat{x}-\bar{x})\cdot(\bar{x}-x_i)\,.$$

Die letzte dieser drei Summen ist

$$2\cdot\frac{(\hat{x}-\bar{x})}{N}\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}-x_i) = 0\,,$$

da $\bar{x}$ der Mittelwert der x_i ist. Die zweite Summe ist der Mittelwert der $(\bar{x}-x_i)^2$, also die Varianz der Meßreihe, und von der ersten schließlich wissen wir, daß $(\hat{x}-\bar{x})^2$, das Quadrat des Fehlers des Mittelwerts, den Erwartungswert σ^2/N hat. Die gesamte erste Summe ist somit

$$\frac{1}{N}\cdot N\cdot\frac{\sigma^2}{N} = \frac{\sigma^2}{N}\,,$$

und obige Formel wird zu

$$\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N} + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}-x_i)^2\,.$$

Bringt man hier noch den Term σ^2/N auf die linke Seite, so folgt

$$\frac{N-1}{N}\cdot\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}-x_i)^2$$

oder

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}-x_i)^2\,,$$

also

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}-x_i)^2}{N-1}}\,.$$

Somit läßt sich auch σ aus den Meßdaten berechnen, der Meßfehler kann also ohne Kenntnis des „wahren“ Werts anhand der gemessenen Werte geschätzt werden.

e) Die Methode der kleinsten Quadrate

Oftmals ist zu gegebenen Beobachtungsdaten grundsätzlich bekannt, welcher *Art* von Gesetz sie genügen sollten, und das Problem besteht „nur“ noch darin, die in diesem Gesetz vorkommenden *Parameter* zu bestimmen. Im einfachsten Fall könnte man etwa an einen Widerstand denken, der dadurch gemessen wird, daß man verschiedene Spannungen U_i anlegt und die zugehörigen Stromstärken I_i mißt. Nach dem Ohmschen Gesetz ist dann $U_i = R\cdot I_i$, aber aufgrund der unvermeidlichen Meßfehler werden die verschiedenen Quotienten U_i/I_i natürlich nicht alle gleich sein. Die Lösung dieses Problems ist klar: Man nimmt den Mittelwert der Quotienten. Schwieriger wird es, wenn mehrere Parameter ins Spiel kommen.

Betrachten wir als Beispiel etwa die Entwicklung der Weltbevölkerung. Da (vor allem auf dem Stand von 1960) vieles für ein stärker als exponentielles Bevölkerungswachstum sprach, enwickelten damals HEINZ VON FOERSTER, PATRICIA M. MORA und LAWRENCE W. AMIOT, allesamt Elektrotechniker an der University of Illinois in Urbana, ein überexponentielles Wachstumsmodell. Die Wachstumsdifferentialgleichung

$$\dot{y}(t) = \beta\, y(t)^r$$

für die Weltbevölkerung $y(t)$ zum Zeitpunkt t kann durch Trennung der Veränderlichen leicht gelöst werden; die Lösung ist

$$y(t) = \left(\frac{\beta}{t_0 - t}\right)^s \quad \text{mit} \quad s = \frac{1}{r-1}\,.$$

β, t_0 und r sind Parameter, die aufgrund der bekannten Zahlen zur Bevölkerungsentwicklung geschätzt werden müssen. Besonders interessant ist dabei natürlich der Parameter t_0, denn zum Zeitpunkt $t = t_0$

wird die Weltbevölkerung unendlich, was man wohl mit dem Weltuntergang gleichsetzen kann.

Für zahlreiche Zeitpunkte t_i sind die Bevölkerungszahlen y_i oder zumindest Schätzungen dafür bekannt, aber natürlich gibt es auch hier keine Parameterwerte, für die *alle* y_i gleich $f(t_i)$ sind; Ziel kann es nur sein, die Parameter so zu wählen, daß die Unterschiede zwischen y_i und $y(t_i)$ nicht zu groß werden.

FOERSTER, MORA und AMIOT taten genau das und kamen auf das Ergebnis

$$\begin{aligned} \beta &= (179 \pm 14) \cdot 10^9 \\ s &= 0{,}990 \pm 0{,}009 \\ t_0 &= 2026{,}87 \pm 5{,}5 \text{ Jahre} \\ r &= 2{,}01 \pm 0{,}009\,; \end{aligned}$$

der Weltuntergang ist also etwa 2026 fällig. Der beste Schätzwert für das Datum ist, wenn wir 0,87 Jahre in Tage, Stunden und Minuten umrechnen, Freitag, der 13. November gegen 13^{13} uhr – sofern man das bei einer Standardabweichung von fünfeinhalb Jahren überhaupt so genau wissen will. (Für Einzelheiten sei auf die Arbeit *Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026*, Science **138**, November 1960, Seite 1291–1295, verwiesen.)

Da Weltuntergangsszenarien nicht zum Stoff dieser Vorlesung gehören, wollen wir auf die genaue Behandlung dieses Beispiels verzichten; wir wollen aber zumindest grundsätzlich verstehen lernen, wie man solche Parameterschätzungen durchführen kann, und wir wollen diese Techniken auch auf etwas alltäglichere Probleme anwenden.

Der allgemeine Ansatz ist folgender: Sei $u = f(a, b, \ldots; t)$ der von den Parametern $a, b, \ldots$ abhängige Zusammenhang zwischen den Größen t und u, und seien $(t_1, u_1), \ldots, (t_N, u_N)$ gegebene (Meß-)Werte, an die die Parameter angepaßt werden sollen.

Nehmen wir an, es gäbe Parameter $a, b, \ldots$, für die $u = f(a, b, \ldots; t)$ den exakten Zusammenhang zwischen den Größen u und t wiedergibt, daß aber die Werte u_i aufgrund von Beobachtungsfehlern von den

$f(a, b, \ldots; t_i)$ abweichen – das ist genau die Situation, mit denen man es in den Naturwissenschaften und in der Technik meist zu tun hat.

Bezüglich der weiteren Vorgehensweise können wir wieder wie beim arithmetischen Mittel und der Standardabweichung argumentieren: Wir versuchen, den EUKLIDischen Abstand zwischen dem Vektor der tatsächlichen Beobachtungswerte und dem der vorhergesagten Werte zu minimieren, d.h. wir wählen die Parameter $a, b, \ldots$ so, daß

$$Q(a, b, \ldots) \underset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} \big(u_i - f(a, b, \ldots; t_i)\big)^2$$

minimal wird – das ist die von CARL FRIEDRICH GAUSS eingeführte *Methode der kleinsten Quadrate.*

Obiger Ausdruck ist eine Funktion der Parameter $a, b, \ldots$; falls sie differenzierbar ist, kann sie nur dort ein Minimum annehmen, wo die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial Q}{\partial a}, \quad \frac{\partial Q}{\partial b}, \quad \ldots$$

allesamt verschwinden. Dies wird im allgemeinen ein nichtlineares Gleichungssystem definieren, dessen Lösung recht kompliziert sein kann; wir wollen uns hier auf den Fall beschränken, daß die Funktion f *linear* von den Parametern $a, b, \ldots$ abhängt. In diesem Fall bezeichnet man die Suche nach den optimalen Parametern als *lineare Regression;* sie hat sowohl in Naturwissenschaft und Technik als auch in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften zahlreiche interessante Anwendungen.

Falls alle Parameter linear in f eingehen, kommen sie in Q höchstens quadratisch vor; die partiellen Ableitungen sind also wieder linear, so daß insgesamt nur ein lineares Gleichungssystem gelöst werden muß.

Wir betrachten hier nur beispielhaft den einfachsten Fall einer Funktion, die von zwei Parametern abhängt: die lineare Funktion

$$u = f(a, b; t) = at + b\,;$$

die Rechnungen, die wir dafür im folgenden durchführen, funktionieren aber genauso auch für allgemeinere Funktionen f, solange f linear in den Parametern $a, b, \ldots,$ ist; Nichtlinearität in t ist problemlos.

Gesucht sind also reelle Zahlen a und b, bei denen die Funktion

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{N} (u_i - at_i - b)^2$$

minimal wird. Dort müssen dann insbesondere die beiden partiellen Ableitungen $Q_a(a,b)$ und $Q_b(a,b)$ verschwinden. Bevor wir diese ausrechnen, empfiehlt es sich, die Funktion zunächst durch Ausmultiplizieren nach Termen in a und b zu sortieren:

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{N} u_i^2 + a^2 \sum_{i=1}^{N} t_i^2 + Nb^2 - 2a \sum_{i=1}^{N} u_i t_i - 2b \sum_{i=1}^{N} u_i + 2ab \sum_{i=1}^{N} t_i \,.$$

Damit ist

$$Q_a(a,b) = 2a \sum_{i=1}^{N} t_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{N} u_i t_i + 2b \sum_{i=1}^{N} t_i$$

und

$$Q_b(a,b) = 2Nb - 2 \sum_{i=1}^{N} u_i + 2a \sum_{i=1}^{N} t_i \,.$$

Division durch zwei ergibt die beiden Gleichungen für das Verschwinden dieser partiellen Ableitungen:

$$a \sum_{i=1}^{N} t_i^2 + b \sum_{i=1}^{N} t_i = \sum_{i=1}^{N} t_i u_i$$

und

$$a \sum_{i=1}^{N} t_i + bN = \sum_{i=1}^{N} u_i \,.$$

Um b zu eliminieren, multiplizieren wir die zweite Gleichung mit $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} t_i$

$$a \cdot \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{N} t_i \right)^2 + b \sum_{i=1}^{N} t_i = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{N} t_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} u_i \right)$$

und subtrahieren das von der ersten Gleichung:

$$a \left(\sum_{i=1}^{N} t_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{N} t_i \right)^2 \right) = \sum_{i=1}^{N} t_i u_i - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{N} t_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} u_i \right) ,$$

d.h.

$$a = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} t_i u_i - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{N} t_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} u_i \right)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} t_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{N} t_i \right)^2} \,.$$

Entsprechend läßt sich a eliminieren, wenn wir die erste Gleichung mit $\sum t_i$ und die zweite mit $\sum t_i^2$ multiplizieren; wir erhalten

$$b = \frac{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{N} t_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} t_i u_i \right) - \left(\sum_{i=1}^{N} t_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} u_i \right)}{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{N} t_i \right)^2 - N \sum_{i=1}^{N} t_i^2} \,.$$

Als Beispiel betrachten wir den Zusammenhang zwischen dem Grad der Korruption in einem Land und dessen Bruttosozialprodukt pro Einwohner. Jedes Jahr veröffentlicht die Organisation *Transparancy International* ihren *corruption perceptions index (CPI),* in dem jedem Land eine Zahl zwischen null und zehn zugeordnet wird, je nachdem, wie stark Geschäftsleute, Risikospezialisten und die Bevölkerung die Korruption im betreffenden Land einschätzen: Ein Index von zehn bedeutet, daß es praktische keine Korruption gibt, während bei null nichts läuft ohne Bimbes. Die neuesten Daten stammen von Juni 2001 und sind unter

`http://www.transparency.org/documents/cpi/2001/cpi2001.de.html`

zu finden. Die Zahlen werden als Mittelwerte über die letzten drei Jahren berechnet, so daß singuläre Ereignisse eines Jahres nicht zu sehr ins Gewicht fallen.

Wir vergleichen diese Zahlen mit dem Bruttosozialprodukt pro Einwohner, wie es die Weltbank für 1998 festgestellt hat. Dies sind die neuesten verfügbaren Zahlen; sie sind beispielsweise auf dem Server des Statistischen Bundesamtes unter

`http://www.statistik-bund.de/basis/d/ausl/ausllae5.htm`

zu finden. In der folgenden Tabelle sind Staaten aufgelistet, für die sowohl das Bruttosozialprodukt pro Einwohner als auch der CPI für 2001 vorliegt; das Bruttosozialprodukt pro Einwohner in US-$ ist kursiv gedruckt, der Korruptionsindex fett.

Ägypten	*1290*	**3,6**
Argentinien	*8030*	**3.5**
Aserbaidschan	*480*	**2,0**
Australien	*20640*	**8,5**
Bangladesch	*350*	**0,4**
Belgien	*25380*	**6,6**
Bolivien	*1010*	**2,0**
Botswana	*3070*	**6,0**
Brasilien	*4630*	**4,0**
Bulgarien	*1220*	**3,9**
Chile	*4990*	**7,5**
China (ohne Hongkong & Taiwan)	*750*	**3,5**
Costa Rica	*2720*	**4,5**
Dänemark	*33040*	**9,5**
Deutschland	*28570*	**7,4**
Dominikanische Republik	*1770*	**3.1**
Ecuador	*1520*	**2,3**
Elfenbeinküste	*700*	**2,4**
El Salvador	*1850*	**3,6**
Estland	*3360*	**5,6**
Finnland	*24280*	**9,9**
Frankreich	*24210*	**6,7**
Ghana	*390*	**3,4**
Griechenland	*11740*	**4,2**
Großbritannien und Nordirland	*21410*	**8,3**
Guatemala	*1640*	**2,9**

Honduras	*740*	**2,7**
Hongkong	*23660*	**7,9**
Indien	*440*	**2,7**
Indonesien	*640*	**1,9**
Irland	*18710*	**7,5**
Island	*27830*	**9,2**
Israel	*16180*	**7,6**
Italien	*20090*	**5,5**
Japan	*32350*	**7,1**
Jordanien	*1150*	**4,9**
Kamerun	*610*	**2,0**
Kanada	*19170*	**8,9**
Kasachstan	*1340*	**2,7**
Kenia	*350*	**2,0**
Kolumbien	*2470*	**3,8**
Korea, Republik	*8600*	**4,2**
Kroatien	*4620*	**3,9**
Lettland	*2420*	**3,4**
Litauen	*2540*	**4,8**
Luxemburg *(BSP von 1996)*	*45100*	**8,7**
Malawi	*210*	**3,2**
Malaysia	*3670*	**5,0**
Mauritius	*3730*	**4,5**
Mexiko	*3840*	**3,7**
Moldau	*380*	**3,1**
Namibia	*1940*	**5,4**
Neuseeland	*14600*	**9,4**
Nicaragua	*370*	**2,4**
Niederlande	*24780*	**8,8**
Nigeria	*300*	**1,0**
Norwegen	*34310*	**8,6**
Österreich	*26830*	**7,8**
Pakistan	*470*	**2,3**
Panama	*2990*	**3,7**
Peru	*2440*	**4,1**
Philippinen	*1050*	**2,9**

Polen	*3910*	**4,1**
Portugal	*10670*	**6,3**
Rumänien	*1360*	**2,8**
Rußland	*2260*	**2,3**
Sambia	*330*	**2,6**
Schweden	*25580*	**9,0**
Schweiz	*39980*	**8,4**
Senegal	*520*	**2,9**
Simbabwe	*620*	**2.9**
Singapur	*30170*	**9,2**
Slowakei	*3700*	**3,7**
Slowenien	*9780*	**5,2**
Spanien	*14100*	**7,0**
Südafrika	*3310*	**4,8**
Taiwan	*1233*	**5,9**
Tansania, Vereinigte Republik	*220*	**2,2**
Thailand	*2740*	**3,2**
Trinidad und Tobago	*4520*	**5.3**
Tschechien	*5150*	**3,9**
Tunesien	*2060*	**5,3**
Türkei	*3160*	**3,6**
Uganda	*310*	**1,9**
Ungarn	*4510*	**5,3**
Ukraine	*980*	**2,1**
Uruguay	*6070*	**5,1**
Usbekistan	*950*	**2,7**
Venezuela	*3530*	**2,8**
Vereinigte Staaten	*29240*	**7,6**
Vietnam	*350*	**2,6**

Der erste Augenschein zeigt, daß korruptionsärmere Länder oftmals reicher sind: Das weitgehend korruptionsfreie Dänemark hat ein Bruttosozialprodukt von 33 040 $ pro Einwohner, das deutlich korruptere Deutschland nur 28 570 $ und ein stark korruptes Land wie Bangladesch nur 350 $. Allerdings gibt es auch Ausnahmen, denn Chile hat, obwohl geringfügig weniger korrupt als Deutschland, nur einBruttosozialprodukt von 4 990 $pro Einwohner. Es gibt also sicherlich keinen deterministischen Zusammenhang zwischen Korruption und Wohlstand, aber es lohnt sich doch, eine Ausgleichsgerade zu berechnen. Obige Formeln führen auf

$$\mathrm{CPI} = 3{,}18723 + 0{,}18105 \cdot 10^{-3} \cdot \mathrm{BSP}\,;$$

Abbildung 55 zeigt letztere Gerade zusammen mit den Datenpunkten.

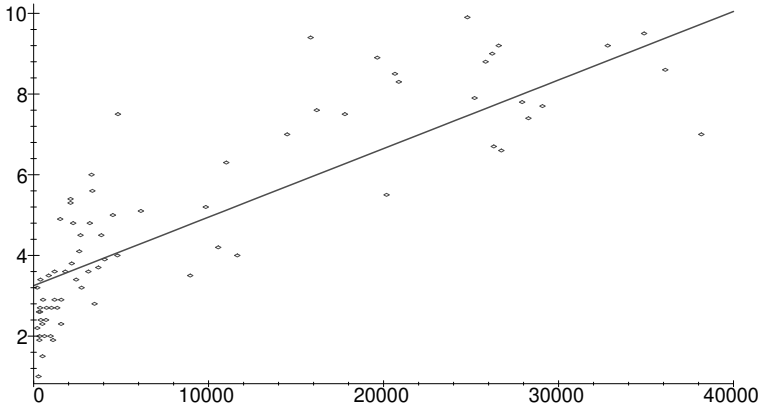


Abb. 55: Korruption 2001 über Bruttosozialprodukt 1998 für 91 Staaten

Natürlich liegen nicht alle Datenpunkte auf der Ausgleichsgeraden: Beispielsweise sind Japan, Belgien und Italien deutlich korrupter, als ihre Wirtschaftskraft vermuten läßt, wohingegen Dänemark, Finnland und Neuseeland deutlich ärmer sind, als man aufgrund der geringen Korruption erwarten sollte. Trotzdem beschreibt die Ausgleichsgerade zumindest einen gewissen Trend.

Für Deutschland ergibt die Formel einen erwarteten Index von 8,05, was zwar praktisch perfekt mit den 1999er CPI von 8,0 übereinstimmt, aber deutlich über dem 2001er CPI von 7,4 liegt. Da 1999 noch kaum jemand das Wort „Bimbes“ kannte, während 2000 „Schwarzgeldaffäre“ zum Wort des Jahres wurde, ist dieser Rückgang nicht weiter verwunderlich und wird wohl auch nächstes Jahr weitergehen, denn der CPI beruht ja auf Studien der vergangenen drei Jahre.

Ähnlich sieht es aus, wenn man das Klausurergebnis der Scheinklausur zu dieser Vorlesung mit den bearbeiteten Übungsaufgaben in Verbindung bringt: Hier ergibt sich die Gerade

$$\textit{Klausurpunkte} = 11{,}78054131 + 0{,}05813492738 \cdot \textit{Übungsprozente}\,,$$

die in Abbildung 56 zusammen mit den Datenpunkten eingezeichnet ist.

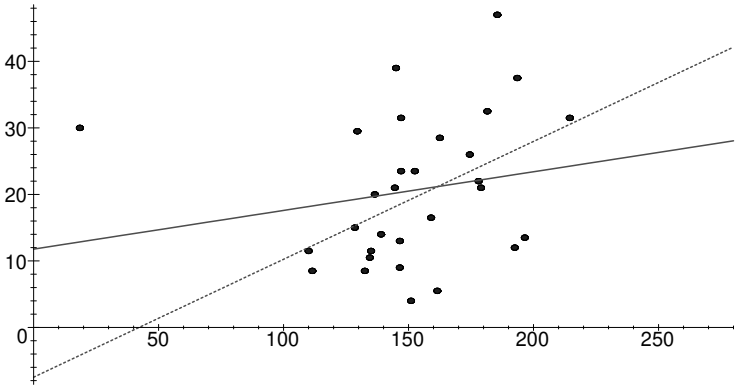


Abb. 56: Zusammenhang zwischen Klausurergebnis und Übungen

Wieder sieht man, daß im großen und ganzen höhere Punktezahlen bei den Übungsaufgaben einem besseren Klausurergebnis entsprechen, aber es gibt auch recht deutliche Ausreißer, deren Interpretation dem Leser überlassen sei.

Wie sehr Ausgleichsgeraden von einzelnen Datenpunkten abhängen können sieht man an der gestrichelt eingezeichneten Geraden

$$\textit{Klausurpunkte} = -7{,}473678952 + 0{,}1772199512 \cdot \textit{Übungsprozente}\,,$$

die fast anhand derselben Daten berechnet wurde: Lediglich der eine Datenpunkt für einen Studenten, der nur ein einziges Übungsblatt bearbeitete und trotzdem die siebtbeste Klausur schrieb, blieb unbeachtet.

Unser nächstes Ziel ist ein Maß, mit dem wir die Qualität einer Ausgleichsgerade $u = at + b$ zu N Datenpaaren (t_i, u_i) beurteilen können.

Zu seiner Definition gehen wir ähnlich vor wie bei der Herleitung des GAUSSschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes: $\bar{t}$ sei der Mittelwert der t_i und $\bar{u}$ der der u_i. Falls die u_i und die t_i voneinander unabhängig sind, erwarten wir, daß

$$\sum_{i=1}^{N}(t_i - \bar{t})(u_i - \bar{u})$$

verschwinden sollte, denn die Abweichungen $t_i - \bar{t}$ der t_i von ihrem Mittelwert sollten nichts mit den Abweichungen $u_i - \bar{u}$ der u_i von deren Mittelwert zu tun haben, und im Mittel sind beide Abweichungen null.

Tatsächlich ist obiges Argument kein Beweis, sondern die Definition des Wortes „unabhängig“: Wir bezeichnen

$$\operatorname{cov}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(t_i - \bar{t})(u_i - \bar{u})$$

als die *Kovarianz* der Meßreihen

$$\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_N) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_N)$$

und bezeichnen die beiden Meßreihen als statistisch unabhängig, falls diese Kovarianz verschwindet.

Falls im anderen Extrem $u_i = at_i + b$ ist für alle i, so ist $\bar{u} = a\bar{t} + b$ und

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}(t_i - \bar{t})(u_i - \bar{u}) &= \sum_{i=1}^{N}(t_i - \bar{t})(at_i - a\bar{t}) \\ &= a\sum_{i=1}^{N}(t_i - \bar{t})^2\end{aligned}$$

eine (fast immer) positive Zahl, die eng mit der Standardabweichung der Verteilung der t_i zusammenhängt. Um sie weiter auszurechnen, beachten wir, daß

$$\sum_{i=1}^{N}(u_i - \bar{u})^2 = a^2\sum_{i=1}^{N}(t_i - \bar{t})^2$$

ist und damit

$$\sum_{i=1}^{N}(t_i-\bar{t})^2\cdot\sum_{i=1}^{N}(u_i-\bar{u})^2 = a^2\left(\sum_{i=1}^{N}(t_i-\bar{t})^2\right)^2$$

oder

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(t_i-\bar{t})^2\cdot\sum_{i=1}^{N}(u_i-\bar{u})^2} = a\sum_{i=1}^{N}(t_i-\bar{t})^2\,.$$

Damit ist also der Quotient

$$\rho = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N}(t_i-\bar{t})(u_i-\bar{u})}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{N}(t_i-\bar{t})^2\cdot\sum_{i=1}^{N}(u_i-\bar{u})^2}}$$

je nach Vorzeichen von a gleich ± 1, wenn alle $u_i = at_i + b$ sind, und $r = 0$, wenn die u_i unabhängig von den t_i sind. Für beliebige Wertepaare (t_i, u_i) sagt uns die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung aus **[HM1]**, Kap. 2, §1*a),* daß stets

$$-1 \le \rho \le 1$$

ist.

Diesen Wert ρ nennen wir den *Korrelationskoeffizienten* der beiden Meßreihen $\boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{u}$; sein Betrag gibt an, wie gut die Beziehung zwischen den u_i und den t_i durch eine Gerade beschrieben werden kann, während sein Vorzeichen angibt, ob diese Gerade ansteigt (die Daten sind *positiv korreliert*) oder sinkt (*negative Korrelation*).

Kürzer läßt er sich auch schreiben als

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u})}{\sigma_{\boldsymbol{t}}\sigma_{\boldsymbol{u}}}\,,$$

wobei $\sigma_{\boldsymbol{t}}$ und $\sigma_{\boldsymbol{u}}$ die Standardabweichungen der beiden Meßreihen bezeichnen.

Bei den obigen Zahlenbeispielen ergeben sich die Korrelationskoeffizienten zu

$$\rho \approx 0{,}8483022667$$

für den Zusammenhang zwischen Korruption und Bruttosozialprodukt; ;die Korrelation ist also recht gut. Bei den Klausurergebnissen dagegen erhalten wir nur

$$\rho \approx 0{,}1910296117 \quad \textit{bzw.} \quad \rho \approx 0{,}4218151723\,,$$

falls der eine Ausreißer nicht mitgerechnet wird – beides nicht gerade sehr berauschend. Letztes Jahr lag der entsprechende Korrelationskoeffizient übrigens bei

$$\rho \approx 0{,}7465571442\,;$$

wer will, kann über mögliche Gründe für diesen Unterschied spekulieren.

Zum Abschluß sei noch darauf hingewiesen, daß auch ein Korrelationskoeffizient nahe bei ± 1 nicht unbedingt bedeutet, daß ein *inhaltlicher* Zusammenhang zwischen den verglichenen Größen besteht: Die Korrelation könnte auch rein formal sein. Ein beliebtes Beispiel, zu dem leider nirgends Zahlenwerte zu finden sind, ist die gute Korrelation zwischen dem Rückgang der Storchenpopulationen und der Geburtenrückgang zur Zeit der Industrialisierung: Die meisten Bevölkerungsexperten gehen hier nicht von einem kausalen Zusammenhang aus, sondern eher davon, daß die Industrialisierung den Lebensraum der Störche zerstörte und wegen der gleichzeitigen Einführung der Rentenversicherung die Familien nicht mehr so viele Kinder zur Alterssicherung brauchten.

§5: Die Gaußsche Normalverteilung und die Maximum Likelihood Methode

a) Der Grenzfall des Laplaceschen Fehlermodells

Leider ist in dieser Vorlesung nicht genug Zeit, um auch nur annähernd die notwendigen Grundlagen für einen Beweis des zentralen Grenzwertsatzes bereitszustellen. Wir haben aber immerhin schon am Beispiel des LAPLACEschen Fehlermodell graphisch gesehen, daß für die Verteilungen mit $u_i = \pm\varepsilon$, jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, die Verteilung der Summen gegen eine Normalverteilung konvergiert.

Zumindest in diesem einfachen Fall können wir dies auch rechnerisch einsehen und auf diesem Weg insbesondere auch die Gleichung der Glockenkurve herleiten. Dazu müssen wir uns zunächst überlegen, was ε tun soll, wenn n gegen unendlich geht.

Wir kennen zwei statistische Kennzahlen zur Beschreibung der Fehlerverteilung: Das arithmetische Mittel und die Varianz. Das arithmetische Mittel ist (z.B. aus Symmetriegründen) null, bleibt also noch die Varianz.

Zu deren Berechnung müssen wir die Fehlerquadrate über die 2^n möglichen Verhaltensweisen der „Dämonen" summieren, d.h. wir müssen die Streuung

$$\sigma^2 = \frac{1}{2^n} \sum (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n)^2$$

berechnen, wobei sich die Summation über alle n-tupel

$$(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \quad \text{mit} \quad \varepsilon_i = \pm\varepsilon$$

erstreckt. Beim Ausmultiplizieren heben sich alle gemischten Terme der Form $\varepsilon_i \varepsilon_j$ gegenseitig weg, denn das Tupel, bei dem nur an der i-ten Stelle das Vorzeichen geändert wurde, liefert einen Summanden $-\varepsilon_i \varepsilon_j$. Also bleiben nur die Quadrate; diese sind alle gleich ε^2, und es sind pro Summand n Stück. Da die Anzahl der Summanden gleich dem Nenner des Vorfaktors ist, berechnet sich die Varianz daher zu

$$\sigma^2 = n\varepsilon^2$$

Somit müssen wir für $n \to \infty$ den Einfluß ε jedes einzelnen „Dämonen" so gegen null gehen lassen, daß $n\varepsilon^2$ konstant bleibt, d.h. wir setzen

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

für eine geeignet zu wählende Konstante $\sigma > 0$, die Standardabweichung.

Für festes n kann der Fehler einen der $n + 1$ Werte

$$-n\varepsilon, \quad -(n-2)\varepsilon, \quad \ldots, \quad (n-2)\varepsilon, \quad n\varepsilon$$

annehmen, was wir in der Form

$$u = (n-2k)\varepsilon = \frac{(n-2k)\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{mit} \quad k = -n, \ldots, n$$

schreiben wollen. Dieser Fehler tritt genau dann auf, wenn k der Dämonen den Fehler ε erzeugen und die restlichen $n - k$ den Fehler $-\varepsilon$. Dies geschieht in $\binom{n}{k}$ der 2^n möglichen Fälle; die Wahrscheinlichkeit dafür ist also $\binom{n}{k} 2^{-n}$.

Für $n \to \infty$ geht dieser Ausdruck gegen null, denn mit n geht schließlich auch die Anzahl der zu betrachtenden Fälle gegen unendlich. Falls es ein Intervall gäbe, in dem die Wahrscheinlichkeit für jeden darin liegenden Fehler größer als irgendein $\alpha > 0$ wäre, ginge allein schon die Summe der Wahrscheinlichkeiten für Fehler aus diesem Teilintervall mit n gegen unendlich, da die Anzahl der dort liegenden möglichen u-Werte wegen der $\sqrt{n}$ im Nenner von u gegen unendlich geht. Da die Summe aller Wahrscheinlichkeiten aber nicht größer als eins werden kann, muß die Wahrscheinlichkeit also in jedem einzelnen Punkt für $n \to \infty$ gegen null gehen.

Wenn wir n variieren lassen, ist es allerdings ohnehin sinnlos, einen genauen Wert des Fehlers zu betrachten: Für jedes n gibt es nur $n + 1$ mögliche Werte, und bei den meisten größeren Werten von n werden diese Zahlen – abgesehen von der Null – nicht auftreten. Wenn wir etwas von n unabhängiges definieren möchten (und sofern wir nicht an Dämonen glauben, bleibt uns kaum etwas anderes übrig) dürfen wir also nicht den genauen *Wert* des Fehlers festlegen, sondern müssen ein *Fehlerintervall* betrachten.

Nun wollen wir aber natürlich als Ergebnis keine Funktion, die von einem Intervall abhängt, sondern eine gewöhnliche Funktion von u. Um eine solche zu bekommen, betrachten wir nicht die Wahrscheinlichkeit, sondern die *Wahrscheinlichkeitsdichte:* Für eine kontinuierlich variierende zufällige Größe definieren wir die Wahrscheinlichkeitsdichte $\varphi(u_0)$ im Punkt u_0 als

$$\varphi(u_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\text{Wahrscheinlichkeit für } u_0 - \varepsilon \le u \le u_0 - \varepsilon}{2\varepsilon},$$

d.h. also als Wahrscheinlichkeit dividiert durch die Intervallbreite. Falls diese Dichte existiert, folgt mehr oder weniger sofort aus der Definition

des RIEMANN-Integrals, daß

$$(\text{Wahrscheinlichkeit für } a \le u \le b) = \int_a^b \varphi(u)\,du$$

ist. Unsere Ziel ist also, diese Wahrscheinlichkeitsdichte φ für $n \to \infty$ zu berechnen.

Für festes n haben die möglichen Fehlerwerte den Abstand 2ε, wir betrachten daher Intervalle der Länge 2ε mit den Werten $(n-2k)\varepsilon$ als Mittelpunkten; diese überdecken den möglichen Fehlerbereich lückenlos, und die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler in diesem Intervall ist $\binom{n}{k}2^{-n}$.

Wir interessieren uns daher für den Grenzwert von

$$\frac{\binom{n}{k}2^{-n}}{2\varepsilon} = \frac{\binom{n}{k}2^{-n}}{2\sigma/\sqrt{n}} = \binom{n}{k}2^{-n-1}\frac{\sqrt{n}}{\sigma}$$

für $n \to \infty$.

b) Die Eulersche Summenformel

Das Problem bei der Berechnung dieses Grenzwerts ist der Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,;$$

um diesen abzuschätzen brauchen wir einen handhabbaren Ausdruck für $n!$.

Dazu schreiben wir

$$\ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln k$$

und berechnen dies nach einer Methode von EULER, die nicht nur für Summen von Logarithmen anwendbar ist.

Wir betrachten allgemeiner irgendeine reellwertige differenzierbare Funktion f, deren Definitionsbereich das Intervall $[1,\, n]$ enthält.

Für eine reelle Zahl x bezeichnen wir wie üblich mit $[x]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x und mit

$$\{x\} \underset{\text{def}}{=} x - [x]$$

den gebrochenen Anteil von x; ist k eine ganze Zahl, ist somit für $x \in [k,\, k+1)$

$$\{x\} = x - k\,.$$

Partielle Integration führt auf die Gleichung

$$\int_k^{k+1} \left(\{x\} - \tfrac{1}{2}\right) f'(x)\,dx = \left(x - k - \tfrac{1}{2}\right) f(x) \Big|_k^{k+1} - \int_k^{k+1} f(x)\,dx$$

$$= \frac{f(k+1)+f(k)}{2} - \int_k^{k+1} f(x)\,dx\,.$$

Addition aller solcher Gleichungen von $k = 1$ bis $k = n-1$ liefert

$$\int_1^n \left(\{x\} - \tfrac{1}{2}\right) f'(x)\,dx = \frac{f(1)}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} f(k) + \frac{f(n)}{2} - \int_1^n f(x)\,dx\,,$$

womit man die Summe der $f(k)$ berechnen kann:

Satz (EULERsche Summenformel): Für eine differenzierbare Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$, deren Definitionsbereich das Intervall $[1,\, n]$ umfaßt, ist

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)\,dx + \frac{f(1)+f(n)}{2} + \int_1^n \left(\{x\} - \tfrac{1}{2}\right) f'(x)\,dx\,.$$

■

Für die Abschätzung der Binomialkoeffizienten und Fakultäten interessiert uns speziell der Fall $f(x) = \ln x$; hierfür wird die EULERsche

Summenformel zu

$$\begin{aligned}\ln n! &= \int_1^n \ln x\,dx + \frac{\ln n}{2} + \int_1^n \frac{\{x\}-\frac12}{x}\,dx \\ &= x(\ln x - 1)\Big|_1^n + \frac{\ln n}{2} + \int_1^n \frac{\{x\}-\frac12}{x}\,dx \\ &= n(\ln n - 1) + 1 + \frac{\ln n}{2} + \int_1^n \frac{\{x\}-\frac12}{x}\,dx\,.\end{aligned}$$

In dieser Formel stört noch das rechte Integral; dieses können wir wie folgt abschätzen: Für eine natürliche Zahl k ist

$$\begin{aligned}\int_k^{k+1} \frac{\{x\}-\frac12}{x}\,dx &= \int_{-\frac12}^{\frac12} \frac{x}{k+\frac12+x}\,dx \\ &= \int_0^{\frac12} \left(\frac{x}{k+\frac12+x} - \frac{x}{k+\frac12-x}\right)\,dx \\ &= \int_0^{\frac12} \frac{-2x^2}{\left(k+\frac12\right)^2 - x^2}\,dx\,.\end{aligned}$$

Im Intervall von 0 bis $\frac12$ ist der Integrand monoton fallend, d.h.

$$0 \ge \frac{-2x^2}{\left(k+\frac12\right)^2 - x^2} \ge \frac{-\frac12}{\left(k+\frac12\right)^2 - \frac14} = \frac{-2}{(2k+1)^2-1} \ge -\frac{1}{4k^2}\,,$$

und damit ist

$$0 \ge \int_k^{k+1} \frac{\{x\}-\frac12}{x}\,dx = \int_0^{\frac12} \frac{-2x^2}{\left(k+\frac12\right)^2 - x^2}\,dx \ge -\frac{1}{8k^2}\,,$$

denn wir können das Integral abschätzen durch das Produkt aus der Länge des Integrationsintervalls und dem Minimum des Integranden. Summation von $k = 1$ bis $n-1$ schließlich gibt die Abschätzung

$$0 \ge \int_1^n \frac{\{x\}-\frac12}{x}\,dx \ge -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4k^2}$$

für das störende Integral aus der obigen Formel.

Wie wohl jeder schon einmal in einer Analysis I Übungsaufgabe zeigen mußte, konvergiert die rechtsstehende Summe (egal ob mit oder ohne acht im Nenner) für $n \to \infty$; aus Kapitel III, §3*f)* wissen wir sogar, daß der Grenzwert $\pi^2/48$ ist. Auf jeden Fall können wir folgern, daß das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{\{x\}-\frac12}{x}\,dx$$

konvergiert; den uns bislang noch unbekannten Grenzwert wollen wir mit I bezeichnen. Damit ist

$$\ln n! = n(\ln n - 1) + \frac{\ln n}{2} + C + o(1) \quad \text{mit} \quad C = I + 1$$

oder

$$n! \approx e^C \cdot n^n e^{-n} \sqrt{n}\,.$$

c) Die Stirlingsche Formel und die Normalverteilung

Mit dieser Formel können wir nun daran gehen, den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ abzuschätzen:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} &\approx \frac{e^C n^n e^{-n}\sqrt{n}}{e^C k^k e^{-k}\sqrt{k}\, e^C (n-k)^{n-k} e^{-(n-k)}\sqrt{(n-k)}} \\ &= \frac{1}{e^C}\,\frac{n^n}{k^k\,(n-k)^{n-k}}\sqrt{\frac{n}{k\cdot(n-k)}}\,.\end{aligned}$$

Ausgedrückt durch $u = (n-2k)\varepsilon = (n-2k)\sigma/\sqrt{n}$ ist

$$k = \frac{n}{2} - \frac{u\sqrt{n}}{2\sigma}\,,$$

und setzen wir zur Vereinfachung der Schreibweise

$$m = \frac{n}{2}, \quad v = \frac{u}{2\sigma} \quad \text{und} \quad \ell = \sqrt{2m} \cdot v \,,$$

so ergeben sich die Formeln

$$k = m - \sqrt{2m} \cdot v = m - \ell \quad \text{und} \quad n - k = m + \sqrt{2m} \cdot v = m + \ell \,.$$

Setzen wir dies alles in die Formel für die Wahrscheinlichkeitsdichte ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{k} 2^{-n-1} \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \\
&\approx \frac{1}{e^C} \frac{n^n}{k^k\,(n-k)^{n-k}} \sqrt{\frac{n}{k \cdot (n-k)}} 2^{-n-1} \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \\
&= \frac{1}{e^C \sigma} \frac{n^n \cdot 2^{-n}}{k^k\,(n-k)^{n-k}} \frac{n \cdot 2^{-1}}{\sqrt{k \cdot (n-k)}} \\
&= \frac{1}{e^C \sigma} \frac{(2m)^{2m} \cdot 2^{-2m}}{(m-\ell)^{m-\ell}(m+\ell)^{m+\ell}} \frac{2m \cdot 2^{-1}}{\sqrt{(m-\ell)(m+\ell)}} \\
&= \frac{1}{e^C \sigma} \frac{m^{2m}}{(m-\ell)^m (m+\ell)^m} \left(\frac{m-\ell}{m+\ell} \right)^{\ell} \frac{m}{\sqrt{m^2 - \ell^2}} \\
&= \frac{1}{e^C \sigma} \frac{m^{2m}}{(m^2-\ell^2)^m} \left(\frac{m-\ell}{m+\ell} \right)^{\ell} \frac{m}{\sqrt{m^2 - \ell^2}} \\
&= \frac{1}{e^C \sigma} \frac{1}{\left(1 - \frac{\ell^2}{m^2}\right)^m} \left(\frac{1 - \ell/m}{1 + \ell/m} \right)^{\ell} \frac{1}{\sqrt{1 - \ell^2/m^2}} \\
&= \frac{1}{e^C \sigma} \frac{1}{\left(1 - \frac{2v^2}{m}\right)^m} \left(\frac{1 - \sqrt{2/m} \cdot v}{1 + \sqrt{2/m} \cdot v} \right)^{\sqrt{2m} \cdot v} \frac{1}{\sqrt{1 - 2v^2/m}} \,.
\end{aligned}$$

Nun können wir langsam daran denken, n (und damit auch m) gegen unendlich gehen zu lassen; wir verwenden dazu die aus der Analysis I und wahrscheinlich auch aus der Schule bekannte Beziehung

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \,.$$

Danach ist insbesondere

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 - \frac{2v^2}{m} \right)^m = e^{-2v^2}$$

und

$$\begin{aligned}
&\lim_{m \to \infty} \left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot v \right)^{\sqrt{2m} \cdot v} = \lim_{m \to \infty} \left(1 \pm \frac{\sqrt{2} \cdot v}{\sqrt{m}} \right)^{\sqrt{m} \cdot \sqrt{2} \cdot v} \\
&= \lim_{q \to \infty} \left(1 \pm \frac{\sqrt{2} \cdot v}{q} \right)^{q \cdot \sqrt{2} \cdot v} = \left(e^{\pm \sqrt{2} \cdot v} \right)^{\sqrt{2} \cdot v} = e^{\pm 2v^2} \,,
\end{aligned}$$

denn es bleibt sich natürlich gleich, ob m oder $q = \sqrt{m}$ gegen unendlich geht. Da der Term v^2/m gegen null geht, erhalten wir somit als Grenzwert des gesamten obigen Ausdrucks

$$\frac{1}{e^C \sigma} \cdot \frac{1}{e^{-2v^2}} \cdot \frac{e^{-2v^2}}{e^{+2v^2}} \cdot 1 = \frac{1}{e^C \sigma} e^{-2v^2} \,.$$

Beachten wir nun noch, daß $v = u/2\sigma$ war, erhalten wir

$$\frac{1}{e^C \sigma} e^{-u^2/2\sigma^2} \,.$$

Damit sind wir fast am Ziel; das einzige, was noch fehlt, ist die Konstante C. Diese können wir bestimmen, indem wir ausnutzen, daß jeder Fehler mit Wahrscheinlichkeit eins zwischen $-\infty$ und ∞ liegt, d.h.

$$\frac{1}{e^C \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2\sigma^2} \, du = 1 \,.$$

Aus **[HM1]**, *Kap.* 2, §6*c),* wissen wir, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$$

ist; mit der Substitution $x = u/\sqrt{2}\sigma$ folgt, daß dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2\sigma^2} \, du = \sqrt{2\pi}\sigma$$

ist und

$$e^C = \sqrt{2\pi} \quad \text{oder} \quad C = \tfrac{1}{2}\ln(2\pi)\,.$$

Damit haben wir die Wahrscheinlichkeitsdichte endlich vollständig berechnet; das Endergebnis ist

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-u^2}{2\sigma^2}}\,.$$

Auch die Formel für $n!$ können wir nach der Bestimmung von C nun vollständig hinschreiben:

$$\ln n! = n(\ln n - 1) + \ln\sqrt{2\pi n} + o(1) \quad \text{oder} \quad n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,.$$

Beides bezeichnet man als STIRLINGsche Formel.

Der schottische Mathematiker JAMES STIRLING (1692–1770) war Anhänger des gestürzten Königs Jakob II Stuart und hatte deshalb große politische Probleme bei seinem Studium; unter anderem wurde er deshalb von der Universität Oxford ausgeschlossen. 1717–1722 lebte er in Venedig und hatte auch gute Kontakte zu NICOLAUS BERNOULLI an der Universität von Padua; außerdem brachte er aus Venedig die Produktionsgeheimnisse der dortigen Glasbläser mit. Ab 1724 arbeitete er zehn Jahre lang als Mathematiklehrer in London, wo er viel mit NEWTON zusammentraf; 1735 wurde er Direktor einer schottischen Bergbaugesellschaft. In seine Londoner Zeit fällt die Veröffentlichung seines bedeutendsten Werks *Methodus Differentialis sive Tractatus de Summatione er Interpolatione Serierum Infinitarum* im Jahre 1730, das die obige Formel als Beispiel zwei zu Proposition 28 enthält. Ebenfalls ziemlich bekannt wurde seine 1735 veröffentlichte Arbeit über die Gestalt der Erde.

d) Eigenschaften der Normalverteilung

Oft interessiert nicht so sehr die Verteilung der Fehler, sondern die der Meßwerte selbst. Ist $\hat{x}$ der korrekte Wert und x_i der i-te Meßwert dafür, der gemäß $x_i = \hat{x} + u_i$ mit dem Fehler u_i behaftet ist, so können wir mit $x = \hat{x} + u$ die obigen Wahrscheinlichkeitsdichte auch als

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\hat{x})^2/2\sigma^2}$$

schreiben.

Als *Normalverteilung mit Mittelwert a und Standardabweichung σ* bezeichnen wir daher die Verteilung mit Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,.$$

Diese Wahrscheinlichkeitsdichte hängt offensichtlich nur von der *normierten* Variablen

$$z = \frac{x-a}{\sigma}$$

ab; diese hat Mittelwert null und Standardabweichung eins. Daher gibt es für die Normalverteilung nicht – wie für viele andere statistische Verteilungen – je nach Parameterwerten verschiedene Tabellen, sondern man findet in allen Tabellenwerken nur die Normalverteilung mit Mittelwert null und Standardabweichung eins, man findet also die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

und deren Integral

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} f(u)\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du\,.$$

Dieses Integral läßt sich nicht weiter vereinfachen, da sich die Stammfunktion von $e^{-u^2/2}$ nicht durch elementare Funktionen ausdrücken läßt. Für die Bestimmung von $F(z)$ ist man daher auf Tabellen oder Computerprogramme angewiesen; eine graphische Darstellung von $F(z)$ ist in Abbildung 57 zu sehen. Mit dieser Funktion läßt sich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß

$$c \le z = \frac{x-a}{\sigma} \le d$$

ist berechnen als $F(d) - F(c)$, und damit läßt sich auch leicht die Wahrscheinlichkeit berechnen, daß x selbst zwischen zwei gegebenen Schranken liegt.

Mißt man beispielsweise die Temperatur eines Wasserbads eine Viertelstunde lang jede Minute und erhält dabei 15 Meßwerte mit Mittelw-

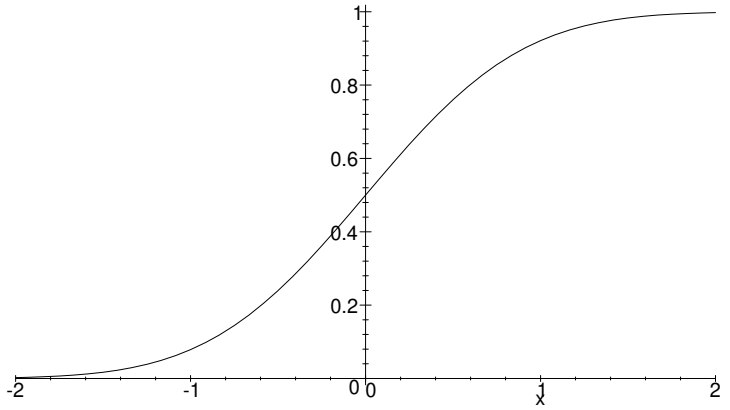


Abb. 57: Das Integral $F(z)$ über die „Glockenkurve“

ert 20,1°C und Standardabweichung 0,2°C, so ist die Standardabweichung des Mittelwerts

$$\sigma_{\overline{\vartheta}} = \frac{0,2^\circ\mathrm{C}}{\sqrt{14}} \approx 0,053^\circ\mathrm{C}\,.$$

Wenn wird dann beispielsweise wissen wollen, mit welcher Wahrscheinlichkeit die „tatsächliche“ mittlere Temperatur zwischen 20,0°C und 20,2°C liegt, müssen wir dazu zunächst die normalisierten Werte berechnen:

$$z_1 = \frac{20,0 - 20,1}{0,053} \approx -1,89 \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{20,2 - 20,1}{0,053} \approx 1,89\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit ist also

$$F(1,89) - F(-1,89) \approx 0,94\,;$$

oder rund 94%.

Schaut man in einer Tabelle nach, wird man dort allerdings im allgemeinen nur den Wert $F(1,89)$ finden, nicht aber $F(-1,89)$. Der Grund dafür liegt in der Symmetrie des Graphen von F bezüglich des Punktes $(0, \frac{1}{2})$. Was dahinter steckt, sieht man am besten, wenn man die Dichtefunktion der Normalverteilung betrachtet, also die Glockenkurve:

Für $z > 0$ ist $F(-z)$ die in Abbildung 58 links eingezeichnete schraffierte Fläche. Diese Fläche ist wegen der Symmetrie der Glockenkurve zur senkrechten Achse gleich der rechts eingezeichneten schraffierten Fläche, und deren Komplement ist $F(z)$. Also ist

$$F(-z) = 1 - F(z)\,,$$

und es reicht, wenn wir die Werte von F im positiven Bereich kennen.

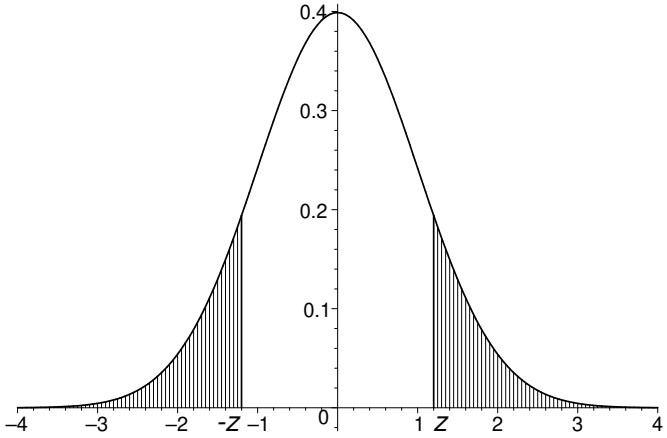


Abb. 58: Zusammenhang zwischen $F(z)$ und $F(-z)$

Oft interessiert auch die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Betrag des Fehlers unterhalb einer bestimmten Schranke liegt, etwa $z \cdot \sigma$; in Abbildung 58 wäre dies der nichtschraffierte Bereich unter der Glockenkurve.

Wie man sich anhand der Abbildung leicht klarmacht, ist diese Wahrscheinlichkeit gleich

$$F(z) - F(-z) = 2F(z) - 1\,;$$

die Wahrscheinlichkeit, daß wir im obigen Beispiel die mittlere Temperatur mit einem Fehler von höchstens 0,05° gemessen haben, ist also

$$2F\left(\frac{0,05}{0,053}\right) \approx F(0,94) \approx 0,83\,.$$

Ein Wasserbad hat üblicherweise den Sinn, ein Experiment unter kontrollierten Temperaturbedingungen durchzuführen; daher interessiert vor allem, inwieweit es gelingt, die Temperatur innerhalb gewisser Schranken zu halten. Die Wahrscheinlichkeit dafür können wir mit denselben Methoden berechnen, allerdings müssen wir dazu mit der Standardabweichung der Meßreihe selbst arbeiten.

Wenn wir etwa wollen, daß die Temperatur immer zwischen 19,5 und 20,5°C liegt, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß wir dies mit dem oben ausgemessenen Versuchsaufbau erreichen, gleich

$$F\left(\frac{20{,}5-20{,}1}{0{,}2}\right) - F\left(\frac{29{,}5-20{,}1}{0{,}2}\right) = F(2) - F(-3) \approx 0{,}976\,.$$

In knapp zweieinhalb Prozent aller Fälle, im Schnitt also alle vierzig Minuten, müssen wir also damit rechnen, daß die Toleranzgrenzen überschritten werden.

Wie Abbildung 57 zeigt, liegt $F(-2)$ sehr nahe bei null und $F(2)$ sehr nahe bei eins. In der Tat ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Wert z Betrag größer z hat, nach obiger Diskussion gleich

$$1 - (2F(z) - 1) = 2F(z) - 2\,,$$

was für $z = 2$ zu -0,0455 wird; die Wahrscheinlichkeit ist also kleiner als 5%. Allgemein gilt für eine beliebige Normalverteilung, daß der Wert der Variablen mit folgenden Wahrscheinlichkeiten um höchstens $i\sigma$ vom Mittelwert abweicht:

$i =$	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeit:	0,683	0,954	0,9973	0,99994

Damit liegen also etwa zwei Drittel aller Fehler zwischen $-\sigma$ und σ, 95% liegen zwischen -2σ und 2σ und 99,7% zwischen -3σ und 3σ; die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Fehler größer als 3σ ist, beträgt nur etwa 0,27%. Da Ereignisse mit einer so geringen Wahrscheinlichkeit seltener als in einem von 300 Fällen auftreten, betrachtet man Fehler, die außerhalb des 3σ-Bereichs liegen, oft als „Ausreißer", d.h. als grobe Meßfehler, die bei der Bestimmung des Ergebnisses nicht berücksichtigt

werden. Sehr vorsichtige Leute reden allerdings erst ab einer Abweichung von 4σ von Ausreißern; solche Fehler treten zufällig weniger als einmal pro 15 000 Messungen auf.

Für Leser, die ihren Computer selbst programmieren und keine spezielle Statistiksoftware haben, sei hier eine Näherungsformel für $F(z)$ angegeben: Mit einem Fehler von höchstens $7{,}5 \cdot 10^{-8}$ ist

$$F(z) = 1 - \varphi(z) \cdot \left(a_1 t + a_2 t^2 + a_3 a^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5\right)$$

mit $t = \dfrac{1}{1+pz}$ und $\varphi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ sowie

$a_1 = \quad 0{,}319\,381\,530 \quad a_2 = -0{,}356\,563\,782 \quad a_3 = 1{,}781\,477\,973$
$a_4 = -1{,}821\,255\,978 \quad a_5 = \quad 1{,}330\,274\,429 \quad p = 0{,}231\,641\,9 \quad .$

Beim Rechnen mit dem Taschenrechner kann man sich auch mit einer vereinfachten Version begnügen, bei der $a_4 = a_5 = 0$ ist und

$$a_1 = 0{,}436\,1836 \quad a_2 = -0{,}120\,1676 \quad a_3 = 0{,}937\,2980 \quad p = 0{,}332\,67\,;$$

hier kann der Fehler bis zu 10^{-5} betragen.

e) Die Maximum Likelihood Methode

GAUSS gab im Laufe seines Lebens mehrere Begründungen für die Methode der kleinsten Quadrate (die er bei sowohl bei seinen astronomischen Arbeiten wie auch bei der von ihm geleiteten Vermessung des Königreichs Hannover zwischen 1818 und 1832 ständig benutzte); die unter dem Gesichtspunkt einer in sich geschlossenen Fehlertheorie interessanteste beruht auf dem LAPLACEschen Fehlermodell:

Danach sollte der Wert u_i für die korrekten Parameterwerte $a, b, \ldots$ aus einer Normalverteilung mit Mittelwert $f(a, b, \ldots; t_i)$ kommen, deren Standardabweichung σ_i von der Genauigkeit abhängt, mit der u_i bestimmt werden kann. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß u_i zwischen zwei Werten a und b liegt, ist damit

$$\int_a^b e^{-\left(u - f(a,b,\ldots;\,t_i)\right)^2 / 2\sigma_i^2}\,.$$

Von der Wahrscheinlichkeit, daß u_i gleich einem Wert c ist, können wir natürlich nicht reden, da diese nach obiger Formel ein Integral von c nach c wäre, also Null. Aber die Wahrscheinlichkeit dafür, daß u_i in einem kleinen Intervall der Länge ε_i um einen Wert c_i liegt, ist ungefähr proportional zum ε_i-fachen Wert des Integranden an der Stelle c_i, also zu

$$\varepsilon_i \cdot e^{-\big(c_i - f(a,b,\ldots;\,t_i)\big)^2/2\sigma_i^2}.$$

Entsprechend ist

$$\varepsilon_j \cdot e^{-\big(c_j - f(a,b,\ldots;\,t_j)\big)^2/2\sigma_j^2}$$

ungefähr gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, daß u_j in einem Intervall der Breite ε_j um c_j liegt.

Wenn wir wie üblich davon ausgehen, daß keine systematischen Fehler auftreten, sind die Fehler von u_i und u_j voneinander unabhängig, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß (u_i, u_j) in einem Rechteck mit Seiten ε_i und ε_j um (c_i, c_j) liegt, ist also proportional zum Produkt der beiden obigen Einzelwahrscheinlichkeiten, d.h. zu

$$\varepsilon_i\varepsilon_j\, e^{-\big(c_i - f(a,b,\ldots;\,t_i)\big)^2/2\sigma_i^2 \,-\, \big(c_j - f(a,b,\ldots;\,t_j)\big)^2/2\sigma_j^2}.$$

Entsprechend kann auch die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden, daß der Punkt $(u_1, \ldots, u_n)$ in einem kleinen gegebenen Quader mit Kantenlängen $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ liegt; sie ergibt sich zu

$$L(a,b,\ldots) \cdot \prod_{i=1}^{n} \varepsilon_i$$

mit

$$L(a,b,\ldots) \underset{\text{def}}{=} e^{\sum_{i=1}^{n}\big(u_i - f(a,b,\ldots;\,t_i)\big)^2/2\sigma_i^2}.$$

Diese Größe ist selbst keine Wahrscheinlichkeit, sondern der Quotient aus einer Wahrscheinlichkeit und einem Volumen; man spricht daher von einer *Wahrscheinlichkeitsdichte.*

Wenn wir diese Wahrscheinlichkeitsdichte als Funktion von $a, b, \ldots$ betrachten, macht sie eine Aussage über die Güte der Parameter:

Schließlich wird man einem Modell, das dem beobachteten Ausgang eines Experiments eine hohe Wahrscheinlichkeit zuweist, eher glauben als einem alternativen Modell, das die beobachteten Daten zu Ausreißern erklärt. Aus diesem Grund kann die Funktion L auch als Maß dafür betrachtet werden, wie „wahrscheinlich“ in irgendeinem umgangssprachlichen (und schwer präzisierbaren) Sinne die Parameter $a, b, \ldots$ sind.

Im englischen gibt es zwei Wörter für Wahrscheinlichkeit: Das romanische Wort *probability* und das germanische Wort *likelihood.* Für den mathematisch exakten Wahrscheinlichkeitsbegriff verwendet man probability, für „Wahrscheinlichkeit“ im Sinne der Funktion L likelihood. Da es im deutschen kein zweites Wort für Wahrscheinlichkeit gibt, spricht man hier in Anlehnung an das Englische von einer *Likelihoodfunktion.*

Die Maximum Likelihood Methode besteht nun genau in dem, was ihr Name besagt: *Man wähle die Parameter $a, b, \ldots$ so, daß die Likelihoodfunktion maximal wird.*

Da $L(a, b, \ldots)$ durch eine Exponentialfunktion beschrieben wird, wird die Likelihoodfunktion genau dann maximal, wenn ihr Exponent maximal wird. Dieser Exponent ist eine negative Zahl, wird also genau dann maximal, wenn sein Betrag *minimal* wird, das heißt, wenn die Quadratsumme

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\big(u_i - f(a,b,\ldots;\,t_i)\big)^2}{2\sigma_i^2}$$

minimal wird.

In vielen Fällen wird die Zuverlässigkeit der einzelnen Paare (t_i, u_i) miteinander vergleichbar sein, so daß alle σ_i gleich sind; in diesem Fall kann man die σ_i ignorieren und einfach die Quadratsumme

$$\sum_{i=1}^{n} \big(u_i - f(a,b,\ldots;\,t_i)\big)^2$$

minimieren, d.h. wir kommen wieder zur klassischen Methode der kleinsten Quadrate. Es gibt aber auch Anwendungen, wie etwa oben beim überexponentiellen Bevölkerungswachstum, bei denen die Verschiedenheit des σ_i sehr wesentlich ist: Sicherlich wird man etwa der

auf Volkszählungen beruhenden Weltbevölkerungszahl, die die Vereinten Nationen für 1995 veröffentlichten, mehr Vertrauen entgegenbringen als der Schätzung eines Historikers für die Weltbevölkerung des Jahres Null, und selbst bei ein und derselben Meßreihe im Labor kommt es gelegentlich vor, daß (beispielsweise aufgrund unterschiedlicher Genauigkeit eines Meßinstruments in verschiedenen Bereichen) manche Daten zuverlässiger sind als andere.

§6: Kompression von Bild- und Audiodaten

Zum Abschluß der Vorlesung wollen wir wenigstens kurz eine praktische Anwendung kennenlernen, in der mit Eigenwerten und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen, FOURIER-Transformationen und Statistik gleich mehrere der Methoden aus diesem Semester gleichzeitig benötigt werden: die Komprimierung von Bild- und Audiodaten.

a) Datenkompression

Ziel der Datenkompression ist es, eine Datei für Zwecke der Speicherung oder Übertragung möglichst stark zu verkleinern, das aber in einer solchen Weise, daß sich die ursprüngliche Datei aus der verkleinerten wieder exakt rekonstruieren läßt.

Es ist klar, daß es keinen universellen Algorithmus zur Datenkompression geben kann: Gäbe es nämlich ein Verfahren, das für beliebige Dateien einen Kompressionsfaktor $\alpha < 1$ garantieren würde, so könnte man dieses Verfahren iterativ anwenden und nach n Anwendungen eine Kompressionsrate von α^n erreichen. Wenn man n nur hinreichend groß wählt, könnte man daher jede Datei auf weniger als ein Bit komprimieren, was natürlich absurd ist.

Ein Kompressionsverfahren kann also nur auf Dateien mit spezieller Struktur erfolgreich angewandt werden und muß die spezielle Redundanz in diesen Dateien ausnutzen. In Textdateien beispielsweise ist dies die Redundanz der Sprache, die schon bei bloßer Beachtung der höchst unterschiedlichen Buchstabenhäufigkeiten Kompressionen von rund 50% gestattet.

Bilddaten werden typischerweise als Matrizen aus ganzen Zahlen zwischen 0 und 255 digitalisiert; bei Audiodaten nimmt man Vektoren von ganzen Zahlen zwischen 0 und $65\,535 = 2^{16} - 1$ oder $16\,777\,215 = 2^{24} - 1$. (Der Unterschied zwischen den Wertenbereichen liegt darin begründet, daß unser Auge selbst bei gedruckten Bildern mit nur 64 Graustufen praktisch keine Artefakte mehr erkennen kann, wohingegen unser Gehör noch auf sehr feine Unterschiede reagiert.)

Bei einer Musik-CD etwa wird das Signal 44 100-mal pro Sekunde abgetastet (dies bedeutet nach dem Abtasttheorem von NYQUIST, daß ein auf den Bereich von 0 bis 22,05kHz bandbegrenztes Signal fehlerfrei rekonstruiert werden kann), und das Ergebnis wird dann so skaliert und quantisiert (d.h. gerundet), daß eine Zahl zwischen 0 und 65535 entsteht. Bei Bilddaten werden je nach Auflösung und Seitenverhältnis zwischen etwa 256×256 und 1024×1024 Bildpunkte abgetastet, für Schwarzweißbilder nur nach Helligkeit, für Farbbildern nach insgesamt drei Größen, die vom jeweiligen Farbmodell abhängen. Das Ergebnis dieser Abtastungen wird dann entsprechend skaliert und quantisiert.

Typische Komprimierungsverfahren arbeiten daher mit Vektoren oder Matrizen aus Zahlen zwischen 0 und einer geeigneten Zahl M, die aus praktischen Gründen meist von der Form $2^{8r} - 1$ ist, wobei die Zahl r der Empfindlichkeit unserer Sinne angepaßt zwischen eins und drei liegt.

Da man zur eindeutigen Festlegung von N beliebigen Zahlen zwischen 0 und 2^{8r} nicht mit weniger als den $8Nr$ Bit auskommen kann, die man zum Hinschreiben der Zahlen braucht, sehen wir auch hier wieder, daß kein Verfahren *alle* solchen Vektoren komprimieren kann; wir müssen also eine Teilmenge auszeichnen.

Die ideale solche Teilmenge wäre hier natürlich die Menge aller möglicher Bilder (oder Audiosequenzen), aber diese Menge dürfte mathematisch kaum definierbar sein: Schließlich hängt es sehr vom Betrachter ab, welches Pixelmuster er noch als „Bild“ gelten läßt und welches nicht. Sinnvoll läßt sich eine solche Menge daher höchstens definieren, wenn von vornherein feststeht, welche Bilder berücksichtigt werden sollen – und dann ist wohl ein Verfahren, das statt vom Bildinhalt von einer Bildnummer ausgeht, unschlagbar.

Die meisten klassischen Verfahren, die beliebige, aber realistische Bilder komprimieren sollen, gehen aus von einem *statistischen Modell,* das zwar auch viele Matrizen produziert, die niemand als „Bilder“ anerkennen würde, das aber dennoch genügend viele Eigenschaften realer Bilder reproduziert, um eine große Anzahl von „Nichtbildern“ auszuschließen.

Ausgangspunkt ist die Beobachtung, daß es in einem Bild oder Musikstück nur wenige aprupte Übergänge gibt. Zwar gibt es natürlich immer wieder ein plötzliches *fortissimo,* das auf eine leise Stelle folgt, aber da das Signal 44 100-mal pro Sekunde abgetastet wird und solche Übergänge selbst bei der schrägsten Musik deutlich seltener als im Sekundenrythmus erfolgen, sind diese Sprünge innerhalb des zu behandelnden Datenstroms in der Tat sehr seltene Ereignisse. Wir können daher davon ausgehen, daß sich die unmittelbaren Nachbarn eines Datums *im Mittel* nur wenig vom gegebenen Datum unterscheiden.

Dasselbe gilt auch für Bilddaten: Falls das Bild digital hinreichend fein dargestellt wird, so daß keine Rastereffekte erkennbar sind, kommen große Sprünge in den Helligkeitswerten nur selten vor.

Bei diesem engen Zusammenhang zwischen benachbarten Werten setzen die gängigen Komprimierungsalgorithmen an: Wenn zwei Größen typischerweise sehr ähnlich sind, wird bei der Übertragung oder Speicherung *beider* Werte ein großer Teil der Information doppelt betrachtet; die Informationsdichte kann also deutlich erhöht werden, wenn man nur Informationen bertrachtet, die weitgehend unabhängig voneinander sind.

Bevor wir das in die Praxis umsetzen können, müssen wir zunächst mathematisch fassen, was die gegenseitige Abhängigkeit benachbartet Daten bedeutet. Aus dem letzten Paragraphen kennen wir schon ein Maß für die gegenseitige Abhängigkeit zweier Meßreihen, den Korrelationskoeffizienten; wir wollen etwas entsprechendes nun für eine beliebige Anzahl von Meßreihen oder Datenvektoren definieren.

Zur Klärung der Begriffe beginnen wir mit einem Beispiel, das zwar nicht das geringste mit Bild- oder Audiodaten zu tun hat, das dafür aber einfach und übersichtlich ist:

b) Kovarianzen und Korrelationen bei der Europawahl 1999

Wir betrachten das Ergebnis der Europawahl vom 13. Juni 1999 in den verschiedenen Mannheimer Stadtteilen. Laut Mannheimer Morgen vom 15. Juni gab es folgende Prozentzahlen:

Bezirk	Bet.	CDU	SPD	Grüne	Rep.	FDP	PDS	Sonst.
(A)	37,7	40,7	31,8	13,0	2,4	5,0	3,4	4,2
(B)	30,9	33,1	39,8	12,9	3,9	2,1	4,1	4,1
(D)	36,1	39,5	36,1	10,8	2,8	3,1	3,7	4,0
(D)	44,9	46,0	26,6	12,8	1,9	6,6	2,5	3,6
(E)	46,0	44,2	30,0	12,0	2,4	5,6	2,1	3,7
(F)	48,6	51,1	23,7	10,8	2,6	6,3	2,5	3,0
(G)	36,8	43,3	42,0	4,6	3,1	2,2	1,3	3,5
(H)	28,3	39,2	46,0	4,0	4,1	1,6	1,5	3,6
(I)	37,9	40,1	42,7	5,7	3,7	2,8	1,7	3,3
(J)	37,9	44,9	37,3	6,4	3,3	2,6	1,8	3,7
(K)	40,9	44,8	40,9	3,8	3,2	2,5	1,6	3,2
(L)	49,1	46,3	35,9	7,7	2,2	3,7	1,2	3,0
(M)	47,4	47,0	30,2	11,9	1,6	4,2	1,8	3,3
(N)	42,5	48,8	32,7	9,1	1,9	3,5	1,4	2,6
(O)	40,9	44,8	38,1	7,4	1,8	3,2	1,8	2,9
(P)	42,5	47,8	30,3	10,2	2,2	3,8	2,1	3,5
(Q)	38,4	47,6	34,9	6,0	3,4	2,9	1,2	4,0
MA	**39,8**	**44,2**	**34,6**	**9,0**	**2,7**	**3,7**	**2,1**	**3,7**

Die Stadtteile sind, damit alles in eine Zeile paßt, durch Buchstaben bezeichnet; für Interessenten seien auch die richtigen Namen angegeben: (A) steht für Innenstadt/Jungbusch, (B) für Neckarstadt West, (C) für Neckarstadt Ost/Wohlgelegen, (D) ist die Oststadt/Schwetzingerstadt, (E) der Lindenhof, (F) Neuostheim/Neuhermsheim, (G) Sandhofen, (H) Schönau, (I) Waldhof, (J) Käfertal, (K) Vogelstang, (L) Wallstadt, (M) Feudenheim, (N) Seckenheim, (O) Friedrichsfeld, (P) Neckarau, (Q) Rheinau und MA schließlich Mannheim insgesamt.

Wie man sieht, haben die einzelnen Parteien in den verschiedenen Stadtteilen recht unterschiedlich abgeschnitten; bei der FDP etwa ergibt sich mehr als ein Faktor vier zwischen den 1,6% in der Schönau und den

6,6% in Neuostheim/Neuhermsheim. Es ist auch klar, daß die CDU dort unterdurchschnittlich viele Stimmen hat, wo die SPD überdurchschnittlich abgeschnitten hat; anders geht das bei den Stimmenzahlen dieser beiden Parteien gar nicht. Wie steht es aber mit den kleinen Parteien?

Eine Partei hat in einem Stadtteil dann überdurchschnittlich gut abgeschnitten, wenn sie dort einen höheren Prozentsatz erreicht hat als für Mannheim insgesamt, wenn also die Differenz zwischen dem Prozentsatz dort und dem für ganz Mannheim positiv ist. Bei negativer Differenz hat sie unterdurchschnittlich abgeschnitten.

Wenn wir also vergleichen wollen, ob zwei Parteien ihre Hochburgen und ihre Schwächegebiete jeweils in denselben Stadtteilen haben, geben uns wie in §4 die Produkte ihrer Abweichungen von ihren Mittelwerten einen ersten Hinweis, d.h. also die Ausdrücke

$$\frac{1}{17}\sum_{i=1}^{17}(x_i-\widetilde{x})(y_i-\widetilde{y})\,,$$

wobei die x_i, y_i die Ergebnisse aus den einzelnen Stadtteilen sind und $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ die Ergebnisse für ganz Mannheim.

Da die verschiedenen Stadtteile verschieden groß sind, sind $\widetilde{x}$ und $\widetilde{y}$ nicht genau die Mittelwerte der x_i beziehungsweise y_i, sondern aussagekräftigere gewichtete Mittelwerte; da andererseits Wahlbezirke ungefähr gleich groß sein sollten, wollen wir diesen Unterschied nicht allzu ernst nehmen und können obige Summe im wesentlichen mit der Kovarianz

$$\operatorname{cov}(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{17}\sum_{i=1}^{17}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$$

identifizieren, wobei

$$\overline{x} = \frac{1}{17}\sum_{i=1}^{17} x_i \quad \text{und} \quad \overline{y} = \frac{1}{17}\sum_{i=1}^{17} y_i$$

die Mittelwerte der beiden Datensätze sind.

Bei m Datensätzen $\vec{x}_1,\dots\vec{x}_m \in \mathbb{R}^N$ können wir die Kovarianzen $\operatorname{cov}(\vec{x}_i,\vec{x}_j)$ zu einer $m\times m$-Matrix zusammenfassen, der *Kovarianzmatrix*

$$\operatorname{Cov}(\vec{x}_1,\dots\vec{x}_m) = (c_i ij) \quad \text{mit} \quad c_{ij} = \operatorname{cov}(\vec{x}_i,\vec{x}_j)\,.$$

Sie ist offensichtlich eine symmetrische Matrix.

Wenn wir die Wahlbeteiligung formal wie eine Partei namens W behandeln, erhalten wir hier die folgende Kovarianzmatrix:

	W	CDU	SPD	Grüne	Rep.	FDP	PDS	Sonst.
W	32,4	18,8	−24,3	5,66	−3,27	5,79	−1,32	−1,46
CDU	18,8	18,2	−15,7	−0,58	−1,96	3,00	−2,07	−1,08
SPD	−24,3	−15,7	34,9	−13,8	3,11	−7,66	−1,07	0,10
Grüne	5,66	−0,58	−13,8	10,2	−1,21	3,13	1,93	0,44
Rep.	−3,27	−1,96	3,11	−1,21	0,57	−0,69	0,05	0,14
FDP	5,79	3,00	−7,66	3,13	−0,69	2,04	0,26	−0,04
PDS	−1,32	−2,07	−1,07	1,93	0,05	0,26	0,73	0,22
Sonst.	−1,46	−1,08	0,10	0,44	0,14	−0,04	0,23	0,24

Übersichtlicher ist die *Korrelationsmatrix,* deren Einträge nicht die Kovarianzen sondern die Korrelationskoeffizienten sind; diese liegen bekanntlich stets zwischen -1 und 1. Im vorliegenden Fall ist das die Matrix

	W	CDU	SPD	Grüne	Rep.	FDP	PDS	Sonst.
W	1,00	0,77	−0,72	0,31	−0,76	0,71	−0,27	−0,52
CDU	0,77	1,00	−0,62	−0,04	−0,61	0,49	−0,57	−0,52
SPD	−0,72	−0,62	1,00	−0,73	0,70	−0,91	−0,21	0,03
Grüne	0,31	−0,04	−0,73	1,00	−0,50	0,69	0,71	0,28
Rep.	−0,76	−0,61	0,70	−0,50	1,00	−0,64	0,07	0,37
FDP	0,71	0,49	−0,91	0,69	−0,64	1,00	0,21	−0,05
PDS	−0,27	−0,56	−0,21	0,71	0,07	0,21	1,00	0,53
Sonst.	−0,52	−0,52	0,03	0,28	0,37	−0,05	0,53	1,00

Dieser Matrix können wir nun aller gewünschten Informationen entnehmen. Die erste Zeile beispielsweise sagt uns, daß die CDU, FDP und in geringerem Ausmaß auch die Grünen dort überdurchschnittlich gut

abgeschnitten haben, wo auch die Wahlbeteilung überdurchschnittlich war, diese drei Parteien konnten also anscheinend ihre Anhänger am besten mobilisieren.

Wo die CDU überdurchschnittlich gut abschnitt, waren alle anderen Parteien mit Ausnahme der FDP unterdurchschnittlich; wo die SPD überdurchschnitt gut abschnitt, waren ebenfalls fast alle anderen unterdurchschnittlich; die Ausnahme hier sind die Repuplikaner. Zwischen SPD und FDP haben wir mit -0,91 den betragsgrößten Korrelationskoeffizienten; die Hochburgen dieser beiden Parteien sind also sehr unterschiedlich. Die Grünen schließlich sind positiv korreliert mit FDP, PDS und Sonstigen.

c) Zufallsvariablen und ihre statistischen Kenngrößen

Die Europawahl vom 13. Juni 1999 ist vorbei und ausgezählt, wir konnten daher im letzten Abschnitt mit wohlbekannten Daten rechnen. Beim Umgang mit Bild- und Tondaten gilt das nur in eingeschränktem Maße: Zwar können Daten erst dann verarbeitet werden, wenn sie da sind, aber eine Digitalkamera beispielsweise muß doch schon heute auf die Bilder vorbereitet sein, die ihr Besitzer erst in ein paar Jahren aufnehmen wird.

Für den Grundalgorithmus zur Datenkompression müssen wir daher Daten zulassen, über die wir noch nichts konkretes wissen – abgesehen von gewissen vagen Gesetzmäßigkeiten, durch die sich echte Bilddaten von beliebigen Matrizen unterscheiden. Als Hilfmittel dazu dient der Begriff der *Zufallsvariablen.*

Definition: Eine (diskrete) Zufallsvariablen ist ein Prozeß, der zufällig einen Wert aus einer vorgegebenen endlichen Menge

$$\{x_0, \ldots, x_m\}$$

liefert.

Dieser „Zufall“ muß natürlich, falls er mathematisch faßbar sein soll, irgendwelchen Regeln genügen, und hier kommt der zweite fundamentale Begriff zum Einsatz: Wir nehmen an, daß für jeden der möglichen Werte x_i feststeht, mit welcher *Wahrscheinlichkeit* p_i er angenommen

wird. Diese „Wahrscheinlichkeit“ definieren wir informell so, daß bei einer großen Anzahl m von Versuchen *ungefähr* $p_i m$-mal der Wert x_i geliefert wird. Das „Gesetz der großen Zahlen“, das wir im nächsten Semester kennenlernen werden, sagt, daß diese Definition sinnvoll ist und man die Wahrscheinlichkeiten p_i damit in wohldefinierter Weise mit beliebiger Genauigkeit bestimmen kann.

Zwei formale Konsequenzen der Definition sind offensichtlich:

$$0 \le p_i \le 1 \quad \text{für alle } i \text{ und} \quad \sum_{i=0}^{m} p_i = 1 \,.$$

Sollen beispielsweise alle x_i mit gleicher Wahrscheinlichkeit angenommen werden (was für Bilddaten nicht unbedingt ein sehr realistisches Modell ist), so sind alle $p_i = 1/(m+1)$.

In unserem Modell soll ein „Bild“ dann produziert werden durch eine Matrix (X_{ij}) von geeigneten Zufallsvariablen; eine „Audiosequenz“ entsprechend durch einen Vektor $(X_1, \ldots, X_N)$.

Welche Zufallsvariablen sind geeignet? In unserem einfachen Modell wollen wir uns nicht darauf festlegen, wie die p_i gewählt werden sollen, sondern stattdessen mit ihrer Hilfe Analoga zu den Kenngrößen aus dem vorigen Abschnitt definieren.

Definition: Der *Erwartungswert* $E(X)$ einer Zufallsvariablen X ist

$$E(X) = \sum_{i=0}^{m} p_i x_i \,.$$

Falls alle x_i mit gleicher Wahrscheinlichkeit angenommen werden, ist der Erwartungswert also einfach das arithmetische Mittel

$$\frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} x_i$$

der möglichen Werte; ansonsten ist er ein sogenanntes gewichtetes arithmetisches Mittel. Für einen Würfel etwa, der die Augenzahlen von $x_0 = 1$ bis $x_5 = 6$ mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit produziert, ist

$$E(X) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3\frac{1}{2} \,.$$

Als nächste wichtige Kenngröße hatten wir imletzten Abschnitt die mittlere quadratiscche Abweichung vom Mittelwert, die Varianz, betrachtet; in völliger Analogie zu dort definieren wir

Definition: Die Varianz einer Zufallsvariablen X mit Erwartungswert $E(X)$ ist

$$\sigma_X^2 = E\big((X - E(X))^2\big) = \sum_{i=0}^{m} p_i \big(x_i - E(X)\big)^2 ;$$

ihre Standardabweichung ist $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$.

Beim Würfel wäre also

$$\sigma_X^2 = \frac{\left(-2\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-1\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(1\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(2\tfrac{1}{2}\right)^2}{6} = \frac{35}{12}$$

und

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1{,}7078 .$$

d) Beispiele aus der Bildverarbeitung

Um die Bedeutung dieser Kenngrößen in der Bildverarbeitung zu veranschaulichen, sind auf der nächsten Doppelseit sechs beliebte Testbilder zusammen mit den Werten dieser Kenngrößen abgedruckt. Die Werte sind entnommen aus

> P.M. FARELLE: Recursive Block Coding for Image Data Compression, *Springer,* 1990 ;

sie beziehen sich natürlich auf die Originalbilder und nicht auf das, was der Druckvorgang hier im Skriptum daraus gemacht hat. Trotzdem sollte der Vergleich von Bildern und Daten einen einigermaßen korrekten Eindruck zumindest der relativen Situation vermitteln, da hoffentlich alle hier abgedruckte Bilder in derselben Weise verunstaltet sind.

Die mittlere Helligkeit eines Bildes, dessen (viele) Pixel durch je eine Zufallsvariable mit Erwartungswert μ produziert werden, sollte ziemlich nahe bei μ liegen; der beste Schätzwert für den gemeinsamen Erwartungswert der Zufallsvariablen ist also die mittlere Helligkeit

des Bildes. Typischerweise werden Helligkeiten durch Zahlen zwischen 0 und 255 kodiert, wobei schwarz der Zahl Null entspricht und weiß der 255. Dies sieht man gut an den Beispielbildern, wo das mit Abstand hellste Bild „Tiffany“ auch den mit Abstand größten Mittelwert μ hat; den kleinsten Wert hat das auch visuell dunkelste Bild „Lenna“.

Die nächste wichtige Kenngröße ist die Varianz, welche angibt, wie stark eine Zufallsvariable um ihren Erwartungswert streut. Auch hier wollen wir wieder davon ausgehen, daß alle Zufallsvariablen zu einem gegebenen Bild *bzw.* einer gegebenen Audiosequenz aus N dieselbe Varianz haben. Wir schätzen diese gemeinsame Varianz aufgrund der vorliegenden Daten als

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (y_i - \mu)^2 ,$$

wobei $y_1, \ldots, y_N$ die Helligkeits- *bzw.* Lautstärkewerte sind. (Wer sich wundert, daß vor dieser Summe mit N Summanden nur $N-1$ im Nenner steht, sollte zu §4*d)* zurückblättern.)

Was die Varianz und die Standardabweichung bedeuten, sieht man wieder deutlich an den Beispielbildern: Bilder mit geringem Kontrast wie „Tiffany“ oder „Lenna“ haben deutlich geringere Werte als die kontrastreicheren Bilder „Peppers“ und „Sailboat“.

e) Kovarianz und Korrelation von Zufallsvariablen

So, wie wir sie bislang definiert haben, ist jede Zufallsvariable ein eigenständiger Prozeß, und zwei verschiedene Zufallsvariablen haben nichts miteinander zu tun. Das ist natürlich nicht das, was wir für die Beschreibung von Bild- und Audiodaten brauchen; hier müssen wir davon ausgehen, daß ein einziger Prozeß gleichzeitig einen ganzen Vektor *bzw.* eine ganze Matrix von Zufallswerten erzeugt, wobei deren einzelne Komponenten dann sehr wohl voneinander abhängig sein können.

Für zwei solche Komponenten X und Y mit jeweiligen Wertebereichen $\{x_0, \ldots, x_m\}$ und $\{y_0, \ldots, y_n\}$ sowie Wahrscheinlichkeiten p_i für x_i und q_j für y_j ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß X den Wert x_i liefert

Peppers

μ = 115,6
σ^2 = 5632
σ = 75,0
ρ = 0,98
$x_{\min}$ = 0
$x_{\max}$ = 237

Lenna

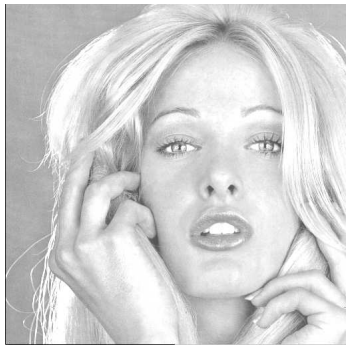
μ = 99,1
σ^2 = 2796
σ = 52,9
ρ = 0,97
$x_{\min}$ = 3
$x_{\max}$ = 248

Sailboat

μ = 124,3
σ^2 = 6027
σ = 77,6
ρ = 0,97
$x_{\min}$ = 0
$x_{\max}$ = 249

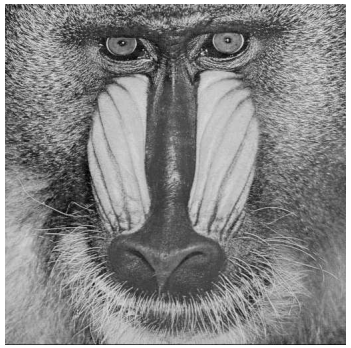
Stream

μ = 113,8
σ^2 = 2996
σ = 54,7
ρ = 0,94
$x_{\min}$ = 0
$x_{\max}$ = 255



Tiffany

μ = 208,6
σ^2 = 1126
σ = 33,6
ρ = 0,87
$x_{\min}$ = 3
$x_{\max}$ = 255



Baboon

μ = 128,9
σ^2 = 2282
σ = 47,8
ρ = 0,86
$x_{\min}$ = 0
$x_{\max}$ = 236

und Y den Wert y_j dann nicht $p_i q_j$, wie das bei unabhängigen Variablen der Fall wäre, sondern irgendeine Wahrscheinlichkeit π_{ij}, von der wir nur wissen, daß aus offensichtlichen Gründen etwa

$$\sum_{j=0}^{m} \pi_{ij} = p_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{m} \pi_{ij} = q_j$$

sein muß. Für so ein Paar definieren wir

Definition: *a)* Die Kovarianz eines solchen Paars (X, Y) ist

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big) \\ &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \pi_{ij}\big((x_i - E(X)\big)\big((y_j - E(Y)\big)\,.\end{aligned}$$

b) Die Korrelation von (X, Y) ist $\rho(X,Y) = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$.

Wir bezeichnen die beiden Zufallsvariablen X und Y entsprechend der üblichen Definition für Ereignisse als als voneinander unabhängig, falls für alle i, j gilt: $\pi_{ij} = p_i q_j$. Alsdann ist

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \pi_{ij}\big(x_i - E(X)\big)\big((y_j - E(Y)\big) \\ &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} \Big[p_i(x_i - E(X))\Big]\Big[q_j\big(y_j - E(Y)\big)\Big] \\ &= \left(\sum_{i=0}^{m} p_i\big(x_i - E(X)\big)\right)\left(\sum_{j=0}^{n} q_j\big((y_j - E(Y))\big)\right) = 0\,,\end{aligned}$$

denn

$$\sum_{i=0}^{m} p_i\big((x_i - E(X)\big) = \sum_{i=0}^{m} p_i x_i - \sum_{i=0}^{m} p_i E(X) = \sum_{i=0}^{m} p_i x_i - E(X)$$

verschwindet nach Definition des Erwartungswerts.

Damit haben zwei voneinander unabhängige Zufallsvariablen also Kovarianz und Korrelation null; man sagt auch, sie seien unkorreliert. Bei

Bilddaten wird das im allgemeinen nicht der Fall sein; hier wird man im Gegenteil davon ausgehen, daß die Zufallsvariablen zu benachbarten Pixeln sehr stark miteinander korrelieren. Wir können beispielsweise annehmen, daß

$$Y = \rho X + Z$$

ist mit einer von X unabhängigen Zufallsvariablen Z und einer positiven reellen Zahl $\rho < 1$. Dann ist

$$E(Y) = E(\rho X + Z) = \rho E(X) + E(Z)\,;$$

falls wir annehmen, daß X und Y denselben Erwartungswert haben, ist daher

$$E(Z) = (1 - \rho)E(X)\,,$$

was für ein ρ nahe eins deutlich kleiner ist als $E(Z)$.

In dieser Situation ist

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \pi_{ij}\big(x_i - E(X)\big)\big((y_j - E(Y)\big) \\ &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \pi_{ij}\big(x_i - E(X)\big)\big(\rho x_i + z_j - \rho E(X) - E(Z)\big) \\ &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \pi_{ij}\big(x_i - E(X)\big)\big[\rho\big(x_i - E(X)\big) + \big(z_j - E(Z)\big)\big] \\ &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \pi_{ij}\rho\big(x_i - E(X)\big)^2 \\ &\qquad + \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \pi_{ij}\big(x_i - E(X)\big)\big(z_j - E(Z)\big) \\ &= \rho\sum_{i=0}^{m} p_i\big(x_i - E(X)\big)^2 + \operatorname{cov}(X,Z) = \rho\sigma_X^2\,,\end{aligned}$$

da X und Z voneinander unabhängige Zufallsvariablen sind.

Wenn wir jetzt noch annehmen, daß $\sigma_X = \sigma_Y$ ist, folgt

$$\rho(X,Y) = \frac{\rho\sigma_X^2}{\sigma_X\sigma_Y} = \rho\,,$$

wir können auf diese Weise also für beliebiges $\rho \in [0,1]$ ein Paar voneinander anhängiger Zufallsvariablen mir Korrelation ρ erzeugen.

Besser noch: Wann immer zwei Zufallsvariablen mit gleicher Standardabweichung Korrelation ρ haben, sind wir immer im obigen Fall, denn definieren wir eine neue Zufallsvariable Z durch $Z = Y - \rho X$, so ist $E(Z) = E(Y) - \rho E(X)$, und das Paar (X, Z) ist unkorreliert, da

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X,Z) &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\big(x_i - E(X)\big)\big(z_j - E(Z)\big)\\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\big(x_i - E(X)\big)\Big[\big(y_j - E(Y)\big) - \rho\big(x_i - E(X)\big)\Big]\\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\big(x_i - E(X)\big)\big(y_j - E(Y)\big)\\
&\qquad - \rho\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\big(x_i - E(X)\big)^2\\
&= \operatorname{cov}(X,Y) - \rho\sigma_X^2 = \rho\sigma_X\sigma_Y - \rho\sigma_X^2 = 0\,.
\end{aligned}$$

f) Modellierung von Bild- und Audiodaten durch Zufallsvariable

Unser Modell für Audio- und Bilddaten ist nun folgendes: Die Daten werden gegeben durch einen Vektor *bzw.* eine Matrix voneinander abhängiger Zufallsvariablen mit gemeinsamem Erwartungswert μ und Standardabweichung σ; zwei benachbarte Zufallsvariablen sollen jeweils Korrelation ρ haben. Diese Zahl ρ bezeichnen wir als die *Autokorrelation* des jeweiligen Signals. Wir schätzen sie anhand eines gegebenen Bilds oder Musikstücks als Korrelation zwischen benachbarten Daten.

Da der Begriff der Autokorrelation das wohl am schwersten verständliche der hier eingeführten statistischen Konzepte ist, sind die sechs Testbilder

in Richtung fallender Autokorrelation geordnet: Die höchste Autokorrelation hat mit $\rho = 0{,}98$ das Bild „Peppers“, wo die recht homogenen Flächen der Paprikaschoten dafür sorgen, daß sich ein Pixel nur selten von seinen Nachbarn unterscheidet; auch „Lenna“ und „Sailboat“ werden von flächigen Strukturen dominiert. Bei „Stream“ kommen in stärkerem Maße feine Verästelungen von Bäumen und Büschen ins Spiel, so daß die Autokorrelation auf 0,94 absinkt, und bei „Tifffany“ und „Baboon“ schließlich sorgen die vielen Haare für feine Details, die die Autokorrelation auf 0,87 *bzw.* 0,86 herunterdrücken.

Um zu sehen, wie sich die Autokorrelation zur Komprimierung der Daten ausnutzen läßt, betrachten wir der Einfachheit halber zunächst nur eine Folge $X_1, \ldots, X_n$ von Zufallsvariablen; der gemeinsame Erwartungswert sei μ, die gemeinsame Standardabweichung σ, und die Korrelation zwischen X_i und X_{i+1} sei jeweils ρ.

Nach dem oben Gesagten gibt es dann für jede der Zufallsvariablen X_i mit $i < n$ eine davon unabhängige Zufallsvariable Z_i, so daß

$$X_{i+1} = \rho X_i + Z_i$$

ist; entsprechend ist für $i < n - 1$

$$X_{i+2} = \rho X_{i+1} + Z_{i+1} = \rho^2 X_i + \rho Z_i + Z_{i+1}$$

usw.; wenn wir zusätzlich annehmen, daß alle Z_i voneinander unabhängig sind, ist also $\rho(X_i, X_{i+2}) = \rho^2$ und allgemein

$$\rho(X_i, X_j) = \rho^{|i-j|}\,.$$

In der Signalverarbeitung spricht man bei einer solchen Folge von Zufallsvariablen von einem *autoregressive Prozeß;* der hier betrachtete allereinfachste Fall, bei dem alle Korrelationen nur von der Korrelation zwischen zwei benachbarten Zufallsvariablen abhängen, wird als AR(1)-Modell bezeichnet; in der Sprechweise der Wahrscheinlichkeitstheorie handelt es sich hier um spezielle sogenannte MARKOV-Ketten.

Der russische Mathematiker ANDREĬ ANDREEVICH MARKOV (1856–1922) studierte in Sankt Petersburg, wo er später auch Professor wurde. Er beschäftigte sich zunächst hauptsächlich mit Zahlentheorie und Analysis; erst später kommen die wahrscheinlichkeitstheoretischen Arbeiten, für die er heute vor allem bekannt ist. MARKOV-Ketten sind Prozesse ohne Erinnerung, in denen das zukünftige Verhalten nur vom augenblicklichen Zustand abhängt, nicht aber von der Geschichte des Systems. Damit sind sie gerade hier bei Bilddaten nur eine unvollkommene Approximation an die Realität, aber dennoch sehr nützlich.

Falls wir bei einer solchen Folge von Zufallsvariablen die Werte von $X_1, \ldots, X_n$ nacheinander übertragen, übertragen wir zuerst den Wert von X_1, dann mit X_2 noch einmal zu $100 \times \rho$ % denselben Wert, mit X_3 dasselbe noch einmal zu $100 \times \rho^2$ %, *usw.*

Eine offensichtliche Alternative hierzu wäre, nur den Wert von X_1 zu übertragen und ansonsten nur die Werte der Z_i. Eine ähnliche Vorgehensweise wird tatsächlich gelegentlich angewandt, allerdings macht man es sich dann noch einfacher und überträgt nur die *Differenzen,* also

$$X_1, X_2 - X_1, \ldots, X_n - X_{n-1} .$$

Der Nachteil dieses Verfahrens ist, daß sowohl diese Differenzen als auch die Z_i von Zeit zu Zeit sehr groß werden *müssen,* da es in fast jedem Bild oder Musikstück gelegentliche aprupte Veränderungen gibt.

g) Komprimierung durch Dekorrelation

Die Idee hinter allen Komprimierungsverfahren, die auf Transformationen beruhen, ist es, anstelle der Zufallsvariablen X_i geeignete Linearkombinationen

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} X_j$$

zu betrachten, wobei (α_{ij}) eine *invertierbare* $n \times n$-Matrix ist, so daß sich auch umgekehrt die X_i wieder aus den Y_j rekonstruieren lassen. Diese Matrix wird so gewählt, daß die neuen Variablen möglichst unkorreliert sind und daß man die Größe der neuen Variablen möglichst gut abschätzen kann.

Letzterer Aspekt erfordert statistische Betrachtungen, auf die wir hier verzichten wollen; die Dekorrelation der Zufallsvariablen aber führt uns geradewegs zu Eigenvektoren symmetrischer Matrizen:

Wir definieren für eine Folge von Zufallsvariablen deren *Korrelationsmatrix*

$$\mathrm{Kor}(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

dadurch, daß der Eintrag an der Stelle ij dieser Matrizen jeweils die Korrelation $\rho(X_i, X_j)$ sein soll.

Das Ideal, auf das wir hinarbeiten, sind Zufallsvariablen, deren Korrelationsmatrix eine Diagonalmatrix ist, denn dann sind je zwei verschiedene Variablen unkorreliert.

Da die Korrelationsmatrix eine symmetrische Matrix ist, gibt es eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ aus reellen Eigenvektoren, bezüglich derer sie Diagonalgestalt hat; die Vektoren dieser Orthonormalbasis seien

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{1n} \end{pmatrix}, \ldots, \vec{b}_n = \begin{pmatrix} \alpha_{n1} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix} .$$

Wir definieren die neuen Zufallsvariablen durch

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} X_j \, ;$$

dann ist

$$\begin{aligned} \rho(Y_i, Y_k) = \vec{v}_{Y_i} \cdot \vec{v}_{Y_k} &= \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \vec{v}_{X_j} \right) \cdot \left(\sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{k\ell} \vec{v}_{X_\ell} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{ij} \; \vec{v}_{X_j} \cdot \vec{v}_{X_\ell} \; \alpha_{k\ell} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{ij} \; \rho(X_j, X_\ell) \; \alpha_{k\ell} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \; \rho(X_j, X_\ell) \right) \; \alpha_{k\ell} \, . \end{aligned}$$

Der Inhalt der großen Klammer ist offensichtlich der Eintrag an der Stelle $i\ell$ der Produktmatrix $A \cdot \mathrm{Kor}(X_1, \ldots, X_n)$, wobei $A = (\alpha_{ij})$ die

Matrix der Koeffizienten α_{ij} ist, und die Summation über ℓ macht daraus den Eintrag an der Stelle ik des Produkts mit ${}^tA$. Insgesamt haben wir also gezeigt, daß

$$\mathrm{Kor}(Y_1,\ldots,Y_n) = A \cdot \mathrm{Kor}(X_1,\ldots,X_n) \cdot {}^tA$$

ist. Nun müssen wir nur noch beachten, daß die Spaltenvektoren der Matrix A als die Vektoren einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ gewählt waren; der Eintrag an der Stelle ij der Matrix $A\ {}^tA$ ist also das Standardskalarprodukt des i-ten und des j-ten Vektors aus einer Orthonormalbasis und somit null für $i \neq j$ und eins für $i = j$. Daher ist $A \cdot {}^tA = E$, also ${}^tA^{-1}$ und somit auch

$$\mathrm{Kor}(Y_1,\ldots,Y_n) = A \cdot \mathrm{Kor}(X_1,\ldots,X_n) \cdot A^{-1}\ .$$

Damit ist $\mathrm{Kor}(Y_1,\ldots,Y_n)$ eine Diagonalmatrix, denn für jede Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist ABA^{-1} die Matrix B bezüglich der Basis aus den Spaltenvektoren vom A. Diese Basis besteht hier aber aus lauter Eigenvektoren der Korrelationsmatrix, die transformierte Matrix ist also eine Diagonalmatrix.

Unter den Annahmen unseres statistischen Modells können wir also jede Folge von Zufallsvariablen durch eine lineare Transformation in eine Folge unkorrelierter Zufallsvariablen überführen. Diese Transformation bezeichnet man, obwohl sie zuerst von HOTELLING vorgeschlagen wurde, als KARHUNEN-LOÈVE-Transformation.

HAROLD HOTELLING (1895–1973) war ein amerikanischer Statistiker und Ökonom; er lehrte an der Columbia University und der University of North Carolina. In einer 1933 veröffentlichten Arbeit im *Journal of Educational Psychology* schlug er erstmalig diese Transformation vor, die von Statistikern heute in Anlehnung an den Titel seiner Arbeit meist als *Hauptkomponentenanalyse* bezeichnet wird. In Europa erschien die Transformation fast gleichzeitig um 1947 *bzw.* 1948 in wahrscheinlichkeitstheoretischen Arbeiten des Finnen KARI KARHUNEN (*1915) und des Franzosen MICHEL LOÈVE (1907–1979), nach denen sie in der technischen Literatur benannt wird.

Die Matrix A der linearen Transformation hängt nur von ρ ab und kann daher für gängige Werte von ρ vorberechnet werden; die KARHUNEN-LOÈVE-Transformation ist also einfach die Multiplikation mit einer bekannten Matrix.

h) Die diskrete Cosinus-Transformation

Für die Multiplikation zweier $n \times n$-Matrizen benötigt man allerdings n^3 Multiplikationen und noch einmal $n^2(n-1)$ Additionen; der Aufwand steigt mit großem n also sehr stark an. In der Praxis gibt man sich daher mit einen Kompromiß zufrieden und zerlegt eine Folge von Zufallszahlen in kurze Teilsequenzen, die bei eindimensionalen Folgen typischerweise die Länge 8 haben; dies ist beispielsweise der Standard bei Musik-CDs.

Allerdings wird weder bei Musik-CDs noch sonstwo die KARHUNEN-LOÈVE-Transformation wirklich angewandt. Der Grund liegt an der Struktur der Eigenvektoren der Korrelationsmatrix: Betrachten wir etwa als typisches Beispiel den $n = 8$; dann haben wir die Matrix

$$\mathrm{Cov}(X_1,\ldots,X_8) = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 & \rho^6 & \rho^7 \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 & \rho^6 \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 \\ \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 \\ \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 \\ \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho^6 & \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho \\ \rho^7 & \rho^6 & \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Ihre Eigenwerte für $\rho = 0{,}95$ können zumindest näherungsweise berechnet werden, und auch die Eigenvektoren lassen sich bestimmen. Diese sollen hier jedoch nicht numerisch angegeben werden: Eine Folge von acht reellen Zahlen ist schließlich im allgemeinen eher unanschaulich. Stattdessen sind in den Abbildungen 59 bis 66 die Eigenvektoren *graphisch* dargestellt, wobei einem Vektor

$$(a_1,\ldots,a_8) \in \mathbb{R}^8$$

die acht Striche vom Punkt $(i, 0)$ bis (i, a_i) in der Ebenen entsprechen sollen. Zusätzlich ist in jedes dieser Diagramme noch eine der Kurven

$$y = \cos\left(\frac{(2x-1)(j-1)\pi}{16}\right)$$

für $j = 1, \ldots, 8$ eingezeichnet; wie man sieht, lassen sich die Komponenten der Eigenvektoren sehr gut durch diese Cosinuswerte annähern. Dies gilt nicht nur für den speziellen Wert $\rho = 0{,}95$, sondern für jeden Wert von ρ, der hinreichend nahe bei eins liegt.

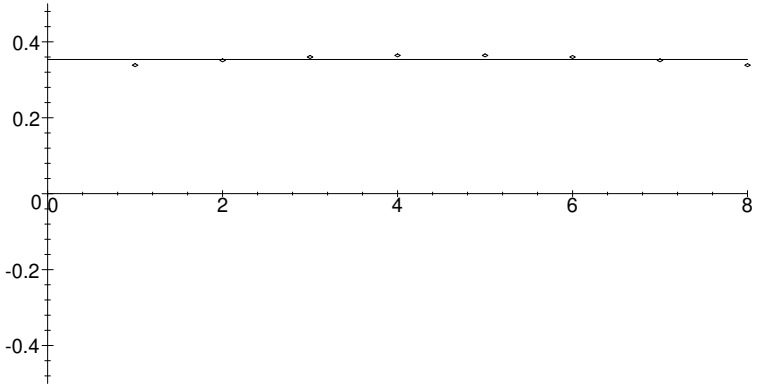


Abb. 59: Der erste Eigenvektor der Korrelationsmatrix

Aus diesem Grund arbeitet man in der Praxis lieber mit den Cosinuswerten; der Basiswechsel hin zur Basis aus den Cosinusvektoren bezeichnet man als *diskrete Cosinustransformation.* Ihr Hauptvorteil gegenüber der KARHUNEN-LOÈVE-Transformation ist, daß sie durch einen schnellen Algorithmus berechnet werden kann, der anstelle des Aufwands n^3 für eine Matrixmultiplikation nur den Aufwand $n^2 \log n$ hat. Für Einzelheiten sei auf die Vorlesung *Numerik I* verwiesen.

Die diskrete Cosinustransformation ist Teil fast aller gängiger Normen zur Bildkomprimierung: Sowohl der JPEG-Standard für Photographien, die Standards MPEG 1 und 2 für digitale (Unterhaltungs-)Videos als auch der Standard CCITT H.261 für Videokonferenzen enthalten

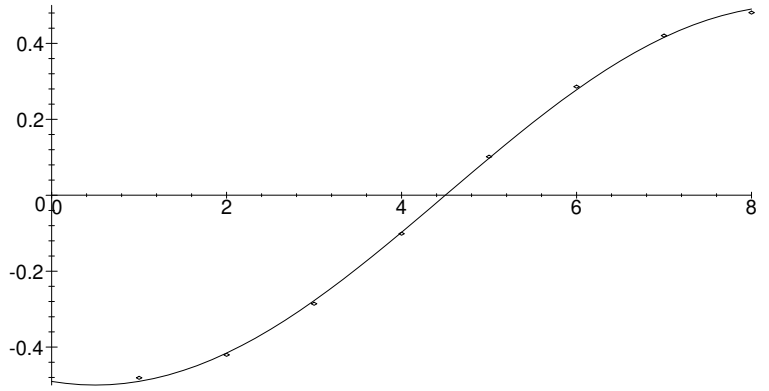


Abb. 60: Der zweite Eigenvektor der Korrelationsmatrix

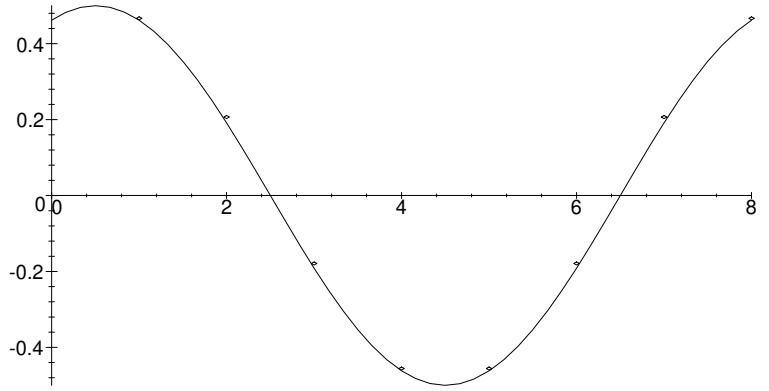


Abb. 61: Der dritte Eigenvektor der Korrelationsmatrix

(neben anderen Bestandteilen) jeweils eine diskrete Cosinustransformation. Auch bei Audio-CDs ist sie ein Teil der Codierung.

Die Transformation allein ist natürlich noch keine Komprimierung: Schließlich haben wir nur einen Vektor in einer anderen Basis hingeschrieben, und die Anzahl der reellen Zahlen, die man zur Beschreibung eines solchen Vektors benötigt, ist unabhängig von der Basis. Der

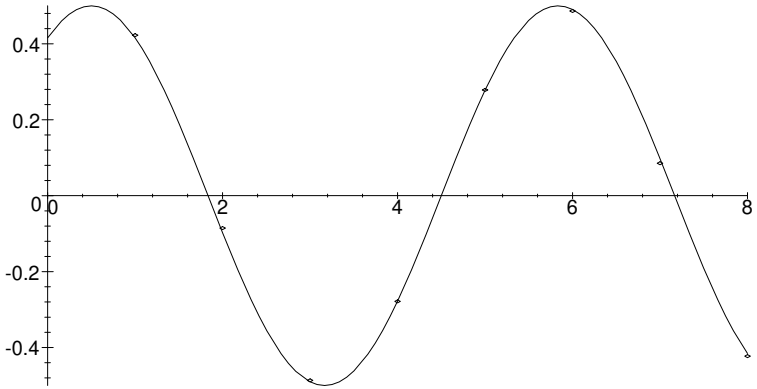


Abb. 62: Der vierte Eigenvektor der Korrelationsmatrix

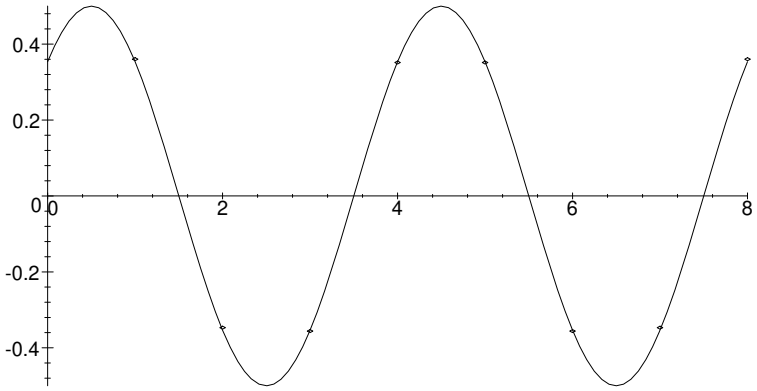


Abb. 63: Der fünfte Eigenvektor der Korrelationsmatrix

wesentliche Vorteil der neuen Basis ist, daß man statistisch recht gute Aussagen über die Größe der Komponenten machen können. Hier wollen wir auf exakte statistische Berechnungen verzichten und stattdessen informell diskutieren, warum dies der Fall sein könnte.

Wie die Abbildungen der Basisvektoren zur KARHUNEN-LOÈVE-Transformation und die Formeln für die Basisvektoren zur diskreten Cosi-

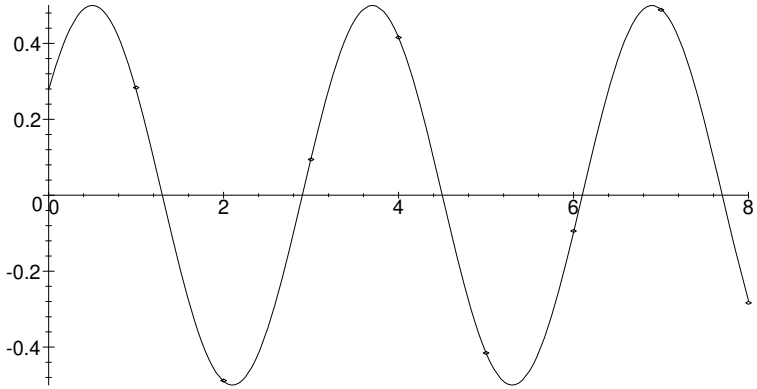


Abb. 64: Der sechste Eigenvektor der Korrelationsmatrix

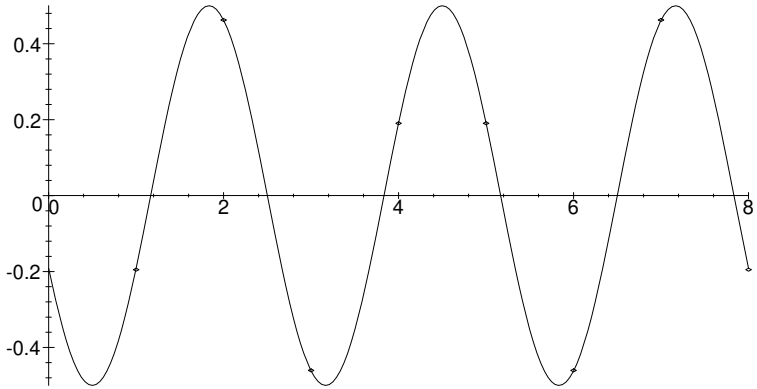


Abb. 65: Der siebte Eigenvektor der Korrelationsmatrix

nustransformation zeigen, werden die Basisvektoren, wenn man sie in der hier angegebenen Reihenfolge betrachtet, immer hochfrequenter. In einem hinreichend fein abgetasteten Bild oder Audiosignal erwarten wir, daß hochfrequente Schwankungen keine große Rolle spielen und somit die entsprechenden Basisvektoren nur kleine Koeffizienten haben oder in vielen Fällen sogar gleich gar nicht auftreten. Dementsprechend

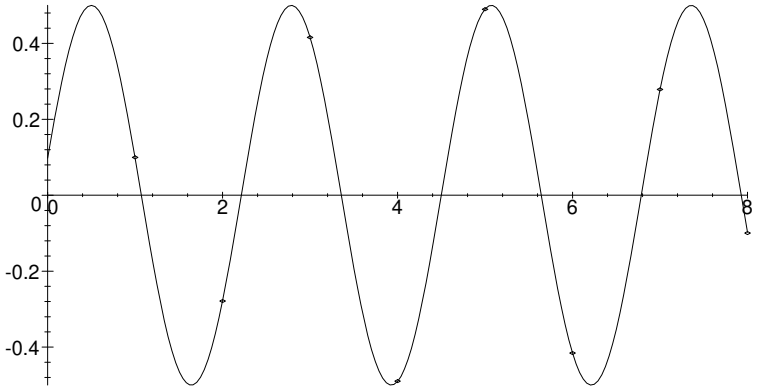


Abb. 66: Der achte Eigenvektor der Korrelationsmatrix

genügt es, für die Übertragung dieser Koeffizienten nur wenige Bits bereitzustellen; bei nur geringen Abstrichen an die Qualität kann man auf gewisse Koeffizienten sogar ganz verzichten.

Ein Kompressionsverfahren wird daher, je nach Anspruch an die Qualität, entweder alle Koeffizienten des Signals in der neuen Basis übertragen und durch eine geeignete Darstellung der Daten dafür sorgen, daß Folgen von Nullen nur wenig Platz benötigen, oder aber es wird nur eine Auswahl der Koeffizienten übertragen und auch für diese jeweils festlegen, wie viele Bit dafür in Anspruch genommen werden. Diese Anzahl wird umso geringer sein, je höher die Frequenz des jeweiligen Basisvektors ist; bei einigen Verfahren wie etwa JPEG können die Anzahlen auch variablel in Abhängigkeit von einer Qualitätszahl gewählt werden.

Zum Schluß sei noch ganz kurz erwähnt, daß die KARHUNEN-LOÈVE-Transformation und damit (mit ganz geringen Abstrichen) auch die diskrete Cosinustransformation zwar die Korrelationsmatrix in optimaler Weise diagonalisieren, daß aber daraus nicht folgt, daß sie auch optimale Kompressionsverfahren liefern: Ausßer der Kovarianz gibt es noch weitere Quellen für Redundanz eines Bildes.

Ein gewisser Nachteil der Cosinustransformation ist außerdem, daß man

für aprupte Übergänge, wie sie etwa bei Kanten immer wieder einmal auftauchen, die hochfrequenten Basisvektoren braucht, die dann aber nicht nur die Kante selbst beeinflussen, sondern das gesamte Quadrat, auf das die Transformation angewandt wird.

Eine bessere Möglichkeit wäre es daher, wenn man anstelle von Cosinusfunktionen Funktionen verwenden könnte, die sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich lokalisiert sind. Solche Funktionen gibt es in der Tat, etwa die sogenannten *Wavelets.* Hierbei handelt es sich um schnell abklingende Wellen, und neuere Arbeiten deuten darauf hin, daß diese für gewisse Bildmodelle (die im Gegensatz zum hier betrachteten nicht mit Wahrscheinlichkeiten arbeiten) nicht zu weit vom Optimum entfernt sein sollten. Im Rahmen dieser Vorlesung ist es jedoch zeitlich weder möglich, auf diese Modelle einzugehen, noch ist an eine genauere Behandlung von Wavelets zu denken.

Einen allgemein verständlichen Überblick über Wavelets findet man etwa bei

BARBARA BURKE HUBBARD: Wavelets: Die Mathematik der kleinen Wellen, *Birkhäuser* 1997;

das zitierte Optimalitätsresultat ist beschrieben im Vortrag

STÉPHANE MALLAT: Applied Mathematics meets signal processing

auf dem Internationalen Mathematikerkongress 1998 in Berlin, nachzulesen in Band I der Proceedings, S. 319–338, oder unter http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/documenta/xvol-icm/00/Mallat.MAN.html.

Eine für Technische Informatiker gut geeignete fundierte Einführung in diesen Themenkreis ist etwa

STÉPHANE MALLAT: A wavelet tour of signal processing, *Academic Press, 1998.*

$\mathcal{E}\ \mathcal{N}\ \mathcal{D}\ \mathcal{E}$

$\mathcal{S}\ \mathcal{C}\ \mathcal{H}\ \ddot{\mathcal{O}}\ \mathcal{N}\ \mathcal{E}\quad \mathcal{F}\ \mathcal{E}\ \mathcal{R}\ \mathcal{I}\ \mathcal{E}\ \mathcal{N}\ !$