Wolfgang K. Seiler

Mathematische Übungen für Geographen

Vorlesung an der Universität Mannheim
im Wintersemester 1993/94

Dieses Skriptum entstand parallel zur Vorlesung und wurde im Anschluß daran nur notdürftig korrigiert. Es ist in seiner Qualität auf keinen Fall mit einem Lehrbuch zu vergleichen; insbesondere ist zu befürchten, daß es trotz zweimaligen Korrekturlesens immer noch Tippfehler enthält, die möglicherweise auch gelegentlich eine mathematische Formel betreffen. Da das Skriptum in ähnlicher Form auch für Vorlesungen in den kommenden Jahren benutzt werden soll, bin ich dankbar für jeden Hinweis auf noch verbliebene Fehler oder sonstige Mängel.

Inhalt

§1: Funktionen und ihr Wachstum

Funktionen sind *die* grundlegenden Objekte zur mathematischen Beschreibung von Problemen der Natur- und Sozialwissenschaften: Sie beschreiben die zeitliche Entwicklung eines Vorgangs und dessen Abhängigkeit von äußeren Einflüssen; sie beschreiben Naturgesetze, Trends und Spekulationen. In dieser Vorlesung wollen wir uns zunächst auf Funktionen beschränken, die von einer reellen Zahl abhängen und dieser auch wieder eine reelle Zahl zuordnen; solche Funktionen treten vor allem auf bei der Modellierung von zeitabhängigen Vorgängen. Unter einer *Funktion* verstehen wir daher zunächst einfach eine Vorschrift, die jeder reellen Zahl t (oder zumindest jeder Zahl t aus einem gewissen Teilbereich der reellen Zahlen) eine weitere reelle Zahl $u = f(t)$ zuordnet. Da u durch t vollkommen festgelegt ist, bezeichnen wir u als *abhängige* und t als *unabhängige* Variable. In den meisten Beispielen dieser Vorlesung wird die unabhängige Variable gleich der Zeit sein; wir bezeichnen sie deshalb meist mit t wie *lat.* tempus statt durch das vielleicht aus der Schule gewohnte x.

Typische Beispiele sind etwa die Funktion

- $f(t) = t^2$, die jeder Zahl t deren Quadrat zuordnet
- $f(t) = 1$, die jede Zahl t auf Eins abbildet
- $f(t) = t$, die jede Zahl auf sich selbst abbildet

- die trigonometrischen Funktionen wie $f(t) = \sin(t)$ oder $f(t) = \cos(t)$ *usw.*
- $f(t)$ = Weltbevölkerung zum Zeitpunkt t, wobei t beispielsweise in Jahren angegeben wird, die seit dem Jahr Null verflossen sind; Monate, Tage *usw.* werden als Teile des Jahres in Dezimalstellen umgerechnet
- $f(t)$ = Anzahl der radioaktiven Zerfälle in einem Stück Holz pro Zeitintervall zur Zeit t

und viele andere mehr.

Die beiden letzten Beispiele unterscheiden sich in einem wesentlichen Punkt von den übrigen: Es gibt kein mathematisches Verfahren, um zu gegebenem t den Wert $f(t)$ zu bestimmen; in der Tat gibt es zumindest beim Beispiel mit der Weltbevölkerung *überhaupt* kein seriöses Verfahren, wie wir zu unseren Lebzeiten etwa den Wert $f(2\,000\,000)$ bestimmen könnten. Das Hauptziel der *mathematischen Modellierung*, mit der wir uns im ersten Teil dieser Vorlesung beschäftigen werden, besteht darin, zu einer nach der Art der letzten Beispiele gegebenen Funktion eine mathematische Beschreibung nach Art der ersten Beispiele zu finden. Bei Funktionen aus dem Bereich der Naturwissenschaften ist das oft mit großer Präzision möglich; bei anderen Funktionen muß man sich meist mit mehr oder weniger begründeten Spekulationen begnügen, wobei – wie wir noch sehen werden – mehrere gleich plausible Annahmen oft zu dramatisch verschiedenen Voraussagen führen können.

Die fundamentale Idee, die hinter fast allen Ansätzen zur mathematischen Modellierung steckt, ist die folgende: Wenn es auch im allgemeinen schwer ist, das *Langzeitverhalten* einer Funktion vorauszusagen, haben wir doch meist recht gute Vorstellungen davon. was in den nächsten Augenblicken passieren wird. Diese Kurzzeitänderung wird mathematisch durch die *Ableitung* der Funktion beschrieben. (Einige Bücher schreiben *Differentialquotient* statt *Ableitung*.) Sie ist definiert als jene Funktion $f'(t)$, die überall dort erklärt sein soll, wo auch f erklärt ist, und die an der Stelle t den Wert

$$f'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

annimmt. Dabei soll das Zeichen „lim“ mit $h \to 0$ bedeuten, daß der Bruch für immer kleiner werdende Werte von h betrachtet wird (für $h = 0$ kann er nicht direkt berechnet werden, da dort durch Null dividiert werden müßte), und $f'(t)$ dann jenen Grenzwert bezeichnet, der erreicht wird, wenn h die Null erreicht.

. . . falls ein solcher Grenzwert existiert. Betrachten wir etwa die Funktion $f(t) = t^2$. Für diese ist

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{(t+h)^2 - t^2}{h} = \frac{t^2 + 2th + h^2 - t^2}{h} = 2t + h\,;$$

wenn h immer kleiner wird und schließlich die Null erreicht, erhalten wir also problemlos den Grenzwert $f'(t) = 2t$. Betrachten wir aber statt dessen die Funktion $f(t)$ mit $f(t) = 0$ für $t \neq 0$ und $f(0) = 1$, so ist für $t = 0$ und $h \neq 0$

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{0-1}{h} = -\frac{1}{h}\,,$$

wofür natürlich kein Grenzwert existiert. Wieder anders ist die Situation bei der durch

$$f(t) = |t| = \begin{cases} t & \text{für } t \geq 0 \\ -t & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

definierten *Betragsfunktion:* Für $t = 0$ ist

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{falls } h > 0 \\ -1 & \text{falls } h < 0 \end{cases}\,,$$

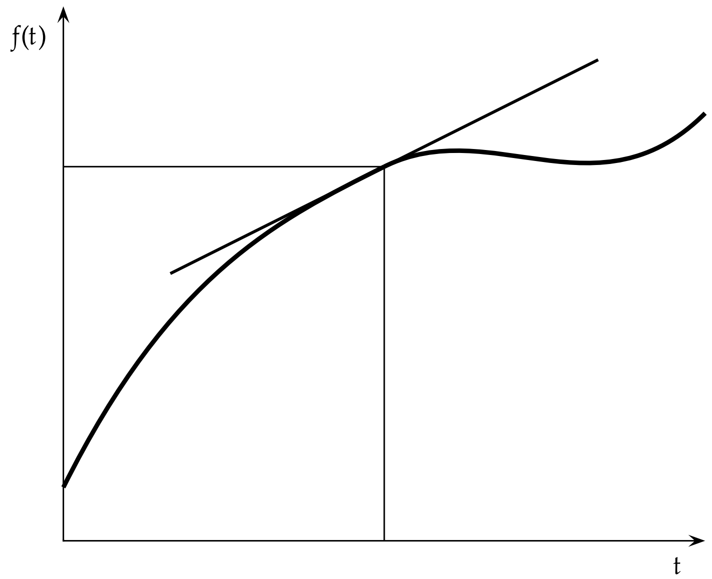
je nachdem, ob wir von links oder von rechts gegen Null gehen, ist der Grenzwert also +1 oder -1. Was ist die Moral aus diesen Beispielen? Offensichtlich ist die Definition der Ableitung nicht ganz unproblematisch. In der Mathematik *definiert* man daher, daß eine Funktion f an der Stelle t *differenzierbar* ist, wenn der Grenzwert von

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

für h gegen Null existiert und unabhängig davon ist, wie h gegen Null geht, und die Ableitung $f'(t)$ wird nur für solche Stellen t erklärt, an denen f differenzierbar ist.

Dies läßt uns mit der Frage, welche Funktionen in einem gegebenen Punkt t differenzierbar sind und welche nicht. Die Antwort der Mathematik auf diese Frage ist auf den ersten Blick frustrierend: Eine „zufällig ausgewählte" Funktion ist mit Wahrscheinlichkeit Eins, also praktisch immer, nirgends differenzierbar! Wenn man sich allerdings genauer ansieht, was der Begriff „zufällig ausgewählte" Funktion bedeutet (was wir hier nicht tun wollen), so merkt man, daß eine zufällig ausgewählte Funktion auch mit Wahrscheinlichkeit Eins nicht mit endlich vielen Worten definiert werden kann; sie unterscheidet sich also ziemlich von den Funktionen, mit denen wir es hier zu tun haben. Tatsächlich hat es sich in den Naturwissenschaften weithin eingebürgert, daß man *jede* auftretende Funktion als differenzierbar ansieht (darunter oft auch solche, die es ganz offensichtlich nicht sind) und dementsprechend rechnet. Bei einfachen Problemen, wie sie hier in dieser Vorlesung auftreten werden, ist diese Betrachtungsweise im allgemeinen gefahrlos; es kommt aber doch immer wieder vor, daß eine solche Rechnung zu offensichtlich unsinnigen Ergebnissen führt oder – schlimmer noch – zu plausibel erscheinenden falschen. Ich werde daher gelegentlich wie hier in kleinerem Druck auf solche Probleme hinweisen, ihnen aber ansonsten im Rahmen dieser Vorlesung keine allzu großen Bedeutung einräumen. Trotzdem sollte man nie ganz vergessen, daß wie bei Verträgen auch hier die Mißachtung des Kleingedruckten gelegentlich zu unangenehmen Überraschungen führen kann.

Sowohl den Begriff der Ableitung als auch die Probleme mit deren gelegentlicher Nichtexistenz kann man sich schön geometrisch veranschaulichen, wenn man den Graphen der Funktion f aufzeichnet. Dieser besteht bekanntlich aus allen Punkten der Form $\big(t, f(t)\big)$ in einem kartesischen Koordinatensystem; gemeinsam bilden diese Punkte eine Kurve. Der Quotient $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ für $h \neq 0$ ist dann die Steigung der Geraden durch die Punkte $\big(t+h, f(t+h)\big)$ und $\big(t, f(t)\big)$. Wenn wir h gegen Null gehen lassen, gehen die beiden Punkte aufeinander zu; falls sie das in kontinuierlicher Weise tun und eine Tangente im Punkt $\big(t, f(t)\big)$ existiert, ist diese die Grenzlage der Verbindungsgeraden. Damit haben wir eine geometrische Interpretation der Ableitung: $f'(t)$ *ist die Steigung der Tangenten des Graphen von* f *im Punkt* $\big(t, f(t)\big)$ und ist nur dann definiert, wenn es eine solche Tangente gibt.



Mit dieser Interpretation wird auch klar, warum es oben bei zwei Funktionen Probleme mit der Existenz der Ableitung gab, denn in beiden Fällen kann man nicht in sinnvoller Weise von einer Tangente im Punkt $\big(0, f(0)\big)$ reden.

Wenn es aber eine Tangente gibt, können wir den Graphen zumindest in der unmittelbaren Nachbarschaft des Berührpunkts durch diese Tangente annähern, wir können die Funktion f also in der Nachbarschaft von t *linearisieren.* In Formeln läßt sich dies ganz einfach aus der Definition der Ableitung herleiten: Falls h so klein ist, daß

$$f'(t) \approx \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

ist, können wir nach $f(t+h)$ auflösen und erhalten

$$f(t+h) \approx f(t) + h \cdot f'(t) .$$

Wie klein h sein muß, hängt dabei natürlich von der betrachteten Funktion ab: Ist etwa $f(t) = t^2$, so ist $f'(t) = 2t$, also

$$f(1+h) \approx f(1) + f'(1) \cdot h = 1 + 2h .$$

Für $h = \frac{1}{2}$ ist dann $f(1\frac{1}{2}) = 2\frac{1}{4}$, während die rechte Seite den Wert $1 + 2h = 2$ liefert; der Fehler hält sich also in Grenzen. Für die Funktion $f(t) = t^{10}$ mit ihrer Ableitung $f'(t) = 10t^9$ dagegen ist

$$f(1) + f'(1) \cdot \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{1}{2} \cdot 10 = 6 ,$$

während der tatsächliche Wert von $(1\frac{1}{2})^{10}$ mit etwa 57,665 fast zehnmal so groß ist! Hier gilt die obige Formel also erst für deutlich kleinere Werte von h; für $h = \frac{1}{20} = 0{,}05$ beispielsweise ist

$$f(1) + f'(1) \cdot 0{,}05 = 1 + 0{,}05 \cdot 10 = 1{,}5\,,$$

was sich nicht sehr vom bei etwa 1,629 liegenden richtigen Wert von $f(1{,}05)$ unterscheidet.

Mit der Beziehung $f(t+h) \approx f(t) + h \cdot f'(t)$ lassen sich auch leicht die üblichen Rechenregeln für Ableitungen plausibel machen: Für zwei Funktionen f und g sei etwa $f \pm g$ die Funktion mit $(f \pm g)(t) = f(t) \pm g(t)$; dann ist

$$\begin{aligned}(f \pm g)(t+h) &= f(t+h) \pm g(t+h)\\ &\approx f(t) \pm g(t) + h \cdot f'(t) \pm h \cdot g'(t)\\ &= (f \pm g)(t) + h \cdot \big(f'(t) \pm g'(t)\big)\,,\end{aligned}$$

also

$$(f \pm g)'(t) = f'(t) \pm g'(t)\,.$$

Genauso ist

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(t+h) &= f(t+h) \cdot g(t+h)\\ &\approx \big(f(t) + h \cdot f'(t)\big) \cdot \big(g(t) + h \cdot g'(t)\big)\\ &= f(t) \cdot g(t) + h \cdot \big(f(t) \cdot g'(t) + f'(t) \cdot g(t)\big)\\ &\qquad + h^2 \cdot f'(t) \cdot g'(t)\,.\end{aligned}$$

Da h^2 für kleine Werte von h vernachlässigt werden kann, folgt

$$(f \cdot g)'(t) = f(t) \cdot g'(t) + f'(t) \cdot g(t)\,,$$

die *Leibnizsche Produktregel.* Schließlich ist noch

$$f\big(g(t+h)\big) \approx f\big(g(t)+h\cdot g'(t)\big) \approx f\big(g(t)\big)+h\cdot g'(t)\cdot f'\big(g(t)\big)\,,$$

denn für sehr kleine h ist auch $h \cdot g'(t)$ klein. Also erhalten wir die *Kettenregel,* wonach für die Funktion $(f\circ g)(t) = f\big(g(t)\big)$ gilt

$$(f\circ g)'(t) = f'\big(g(t)\big)\cdot g'(t)\,.$$

Genauso lassen sich auch die übrigen Rechenregeln für Ableitungen veranschaulichen.

§2: Die Exponentialfunktion

Beginnen wir mit einer der Beispielfunktionen aus dem letzten Paragraphen, der Funktion

$$f(t) = \begin{pmatrix}\text{Anzahl der Menschen, die zum}\\ \text{Zeitpunkt } t \text{ auf der Erde leben}\end{pmatrix} .$$

Dabei soll t in Jahren gezählt werden, wobei Monate, Tage, Stunden *usw.* in Teile von Jahren umgerechnet werden: Da der 5. November 1993 der 309. Tag des Jahres ist, wäre also beispielsweise am 5. November 1993 um 10.45 Uhr

$$t = 1993 + \frac{308 \cdot 24 + 10{,}75}{365 \cdot 24} \approx 1993{,}845062785388 .$$

Getreu unserem allgemeinen Ansatz wollen wir die Funktion f durch ihr Wachstumsverhalten in kleinen Zeiträumen beschreiben. Natürlich ist

$$f(t+h) - f(t) = \begin{pmatrix}\text{Anzahl der Menschen, die in der Zeit}\\ \text{zwischen } t \text{ und } t+h \text{ geboren werden}\\ \textit{minus} \text{ Anzahl jener Menschen, die im}\\ \text{selben Zeitraum sterben}\end{pmatrix} .$$

Wenn wir nun davon ausgehen, daß wir eine konstante Geburtenrate G und eine konstante Sterberate S haben, so ist

$$f(t+1) - f(t) = G \cdot f(t) - S \cdot f(t) = (G - S) \cdot f(t) ,$$

wobei Geburten- und Sterberaten wie üblich auf ein Jahr bezogen sind, d.h. $h = 1$. Für einen kürzeren Zeitraum $h < 1$ können wir davon ausgehen, daß ungefähr h mal so viele Geburten und Todesfälle auftreten wie im ganzen Jahr, also ist

$$f(t+h) - f(t) = h \cdot (G - S) \cdot f(t)\,.$$

Damit ist

$$f'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{h \cdot (G - S) \cdot f(t)}{h} = (G - S) \cdot f(t)\,,$$

es gibt also eine Zahl a, nämlich $a = G - S$, so daß

$$f'(t) = a \cdot f(t)$$

ist. Diese Beziehung heißt *Malthussches Wachstumsgesetz* nach dem Ökonomen und Theologen Thomas Robert Malthus (1766–1834), der sie 1798 in seiner Schrift „Das Bevölkerungsgesetz“ erstmalig postulierte und zum gottgewollten Naturgesetz erklärte. Es erscheint einleuchtend, daß die Funktion f durch diese Beziehung und einen Anfangswert $f(t_0) = u_0$ für einen festen Startzeitpunkt $t = t_0$ vollständig festgelegt ist: Um sie für einen Zeitpunkt t_1 zu berechnen, wählen wir einen hinreichend kleinen Wert h, so daß

$$f(t+h) \approx f(t) + h \cdot f'(t) = f(t) + h \cdot a \cdot f(t)$$

ist und berechnen dann nacheinander

$$\begin{aligned} f(t_0 + h) &\approx f(t_0) + h \cdot a \cdot f(t_0)\,, \\ f(t_0 + 2h) &\approx f(t_0 + h) + h \cdot f(t_0 + h)\,, \\ f(t_0 + 3h) &\approx f(t_0 + 2h) + h \cdot f(t_0 + 2h) \text{ \textit{usw.},} \end{aligned}$$

bis wir den gewünschten Zeitpunkt $t_1 = t_0 + nh$ erreicht haben.

Natürlich hängt das Ergebnis, das wir bei dieser Rechnung bekommen, von der gewählten Zahl h ab und wird um so genauer sein, je kleiner h gewählt ist. Um $f(t_1)$ wirklich genau auszurechnen, müßten wir also eine Folge von immer kleiner werdenden hs betrachten und $f(t_1)$ mit immer größer werdendem Aufwand immer genauer approximieren. Daß dies wirklich möglich ist, erscheint beim zweiten Hinschauen nicht mehr so klar, und in der Tat gibt es bei komplizierteren Beziehungen zwischen $f(t)$ und $f'(t)$ dabei auch gelegentlich Probleme. In unserem Fall besagt der sogenannte *Existenz- und Eindeutigkeitssatz für linear Differentialgleichungen,* daß es für vorgegebenes t_0 und u_0 wirklich eine und nur eine Funktion f gibt mit $f'(t) = a \cdot f(t)$ und $f(t_0) = u_0$. Zum Beweis dieses Satzes braucht man allerdings Methoden, die jenseits der Möglichkeiten dieser Vorlesung liegen.

Was können wir nun aus der Gleichung $f'(t) = a \cdot f(t)$ über die Funktion f erfahren – außer daß sie durch a und einen Anfangswert $u_0 = f(t_0)$ eindeutig festgelegt ist? Da keine der gängigen Funktionen wie $f(t) = t^n$ oder $f(t) = \sin t$ dieser Beziehung genügt, handelt es sich offensichtlich um eine neue Funktion; eine typische Vorgehensweise der Mathematik in einer solchen Situation ist, daß man zunächst einmal einen einfachen Fall untersucht, um dann – wenn möglich – den allgemeinen Fall darauf zurückzuführen. Deshalb *definieren* wir

DEFINITION: *Die Exponentialfunktion ist jene Funktion f, für die $f'(t) = f(t)$ ist und $f(0) = 1$. Wir schreiben*

$$f(t) = \exp t \quad \textit{oder} \quad f(t) = e^t \ .$$

Dabei bedarf die Schreibweise $f(t) = e^t$ als Potenz natürlich einer Rechtfertigung. Die grundlegende Eigenschaft, die wir von einer Potenz erwarten, ist die Regel $a^s \cdot a^t = a^{s+t}$; in unserem Fall sollte also gelten

$$\exp(s+t) = \exp(s) \cdot \exp(t) \quad \text{für alle } s, t\,.$$

Dazu betrachten wir für festes s die beiden Funktionen

$$f_1(t) = \exp(s+t) \qquad \text{und} \qquad f_2(t) = \exp(s) \cdot \exp(t)\,.$$

Wenn wir zeigen können, daß diese beiden Funktionen übereinstimmen, haben wir die obige Behauptung gezeigt, denn s ist zwar fest, kann aber beliebig gewählt werden. Wir zeigen diese Gleichheit, indem wir zeigen, daß sowohl für $f = f_1$ als auf für $f = f_2$ die Beziehung $f'(t) = f(t)$ gilt, und außerdem auch $f_1(0) = f_2(0)$ ist. Da eine Funktion f mit $f'(t) = f(t)$ durch einen Anfangswert eindeutig festgelegt wird, folgt daraus, daß $f_1(t) = f_2(t)$ für alle t.

Beginnen wir mit f_1: Nach der Kettenregel ist $f_1'(t) = \exp'(s+t)$, und dies ist wegen $\exp' = \exp$ einfach $\exp(s+t)$, also $f_1(t)$. Genauso ist

$$f_2'(t) = \exp(s) \cdot \exp'(t) = \exp(s) \cdot \exp(t) = f_2(t)\,,$$

da die Konstante $\exp(s)$ bei der Ableitung erhalten bleibt. Also erfüllen f_1 und f_2 beide die Gleichung $f'(t) = f(t)$ und haben beide an der Stelle $t_0 = 0$ den Wert $u_0 = f(t_0) = \exp(s)$, sind also gleich.

Somit verhält sich die Exponentialfunktion in der Tat wie eine Potenz, so daß wir in Zukunft meist e^t schreiben werden. Mit $e = e^1$ ist insbesondere $e^2 = e^{1+1} = e \cdot e$, entsprechend $e^3 = e^{2+1} = e^2 \cdot e = e \cdot e \cdot e$ *usw.* Die Zahl e kann nur näherungsweise berechnet werden; sie ist eine sogenannte transzendente Zahl, und damit weder als Bruch noch durch Wurzeln darstellbar. Zur näherungsweisen Berechnung von e gehen wir wie oben vor: Für eine hinreichend große Zahl n ist

$$\exp\left(\frac{1}{n}\right) \approx \exp(0) + \frac{\exp(0)}{n} = 1 + \frac{1}{n}\,,$$

also

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{2}{n}\right) &\approx \exp\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{\exp\left(\frac{1}{n}\right)}{n} = \exp\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&\approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2, \\
\exp\left(\frac{3}{n}\right) &\approx \exp\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{\exp\left(\frac{2}{n}\right)}{n} = \exp\left(\frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&\approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \mathit{usw.},
\end{aligned}$$

bis wir schließlich nach n Schritten zur Näherungsgleichung

$$e = \exp(1) = \exp\left(\frac{n}{n}\right) \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

gelangen. Da diese Näherung mit größer werdendem n immer besser wird, können wir auch mit dem „lim"-Operator aus dem ersten Paragraphen schreiben

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Um einen Eindruck von der Güte der Näherungen zu bekommen, können wir uns $(1+1/n)^n$ für einige Werte von n ausrechnen: Für $n = 1$ erhalten wir $1+1 = 2$, für $n = 2$ dann $(1\frac{1}{2})^2 = 2{,}25$, für $n = 10$ ist $1{,}1^{10} = 2{,}59374\,24601$. Das ist aber immer noch recht weit vom Grenzwert entfernt; beispielsweise erhalten wir für n gleich eine Million ungefähr 2,71828 04693, wovon immerhin die ersten fünf Dezimalstellen schon richtig sind. Mit einer Genauigkeit von 40 Dezimalstellen ist

$$e \approx 2{,}71828\,18284\,59045\,23536\,02874\,71352\,66249\,77572\,.$$

Als nächstes wollen wir sehen, wie sich die Exponentialfunktion verhält, wenn wir ihr Argument mit einer Zahl *multiplizieren;* wir betrachten also die Funktion

$$f(t) = e^{at} = \exp(at)$$

für eine fest vorgegebene Zahl a. Auch für diese Funktion ist wieder $f(0) = e^0 = 1$, und nach der Kettenregel gilt

$$f'(t) = a \cdot \exp'(at) = a \cdot \exp(at) = a \cdot e^{at} = a \cdot f(t)\,.$$

Also ist $f(t)$ *die* Funktion mit $f'(t) = a \cdot f(t)$ und $f(0) = 1$. Wenn wir etwas allgemeiner die Funktion $f(t) = u_0 \cdot e^{at}$ betrachten, so ist immer noch $f'(t) = a \cdot f(t)$, aber jetzt ist $f(0) = u_0$. Falls wir schließlich statt dessen die Anfangsbedingung $f(t_0) = u_0$ für ein $t_0 \neq 0$ erfüllen wollen, so ist offenbar

$$f(t) = u_0 \cdot e^{a(t-t_0)} = u_0 \cdot e^{-at_0} \cdot e^{at}$$

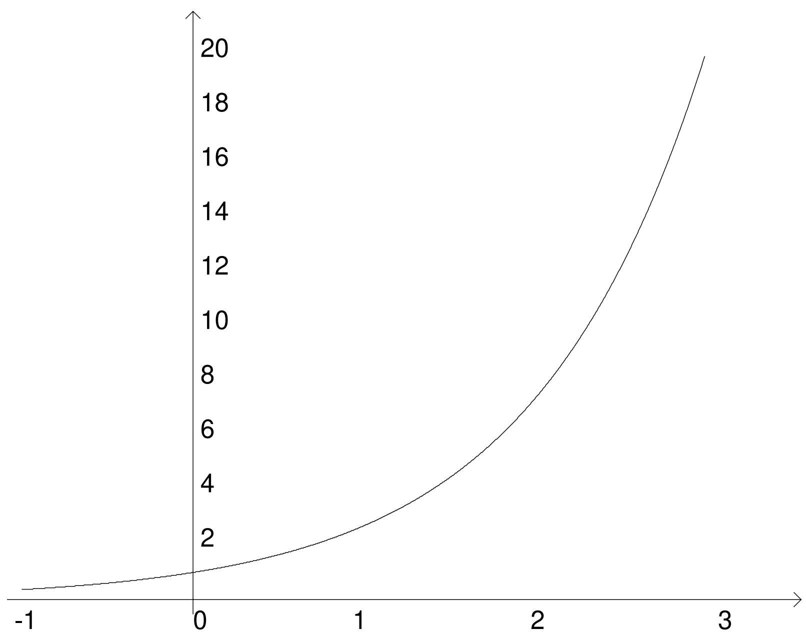
die entsprechende Lösungsfunktion.

Damit haben wir die Funktionen, die nach dem Malthusschen Gesetz wachsen, vollständig bestimmt und können das Endergebnis in einem Satz zusammenfassen:

SATZ 2.1: *Falls eine Funktion* f *dem Malthusschen Wachstumsgesetz* $f'(t) = a \cdot f(t)$ *genügt und an der Stelle* t_0 *den Wert* u_0 *annimmt, so ist*

$$f(t) = u_0 \cdot e^{-at_0} \cdot e^{at} = u_0 \cdot e^{a(t-t_0)} \,.$$

Der Graph der Funktion $f(t) = e^t$ ist in der folgenden Zeichnung für $t = -1$ bis 3 dargestellt; man beachte das explosionsartige Wachstum!



§3: Anwendungen der Exponentialfunktion

Im letzten Kapitel hatten wir die Exponentialfunktion eingeführt als eine Funktion, die dem Malthusschen Wachstumsgesetz genügt; es bietet sich also an, als erste Anwendung der Exponentialfunktion das Wachstum der Weltbevölkerung oder das der Bevölkerung eines bestimmten Landes zu nehmen. Leider stellt sich hier die Exponentialfunktion in keinem Fall als eine gute Beschreibung der tatsächlichen Entwicklung heraus; wir werden später sehen, daß es hier andere Funktionen gibt, die sehr viel besser mit realen Zahlen übereinstimmen. Deshalb möchte ich in diesem Paragraphen lieber Beispiele aus den Naturwissenschaften betrachten, bei denen die Exponentialfunktion aufgrund von Naturgesetzen auftritt und daher Ergebnisse liefert, die sehr gut mit Beobachtungen und Experimenten übereinstimmen.

Als erstes Beispiel, das auch zu praktisch relevanten Anwendungen führt, bietet sich die **Radioaktivität** an: Gegeben sei eine gewisse Menge eines radioaktiven Stoffes; wir betrachten die Funktion $m(t)$, die angibt, welche Masse zur Zeit t vorhanden ist. Wegen des radioaktiven Zerfalls nimmt $m(t)$ kontinuierlich ab, und zwar lehrt uns die Physik, daß die Anzahl der Zerfälle pro (kleiner) Zeiteinheit proportional ist zur noch vorhandenen Masse des Stoffes, d.h.

$$m'(t) = -\lambda m(t)\,,$$

wobei die (positive) *Zerfallskonstante* λ vom Stoff abhängt. Wenn wir also der Einfachheit halber annehmen, daß wir die zum Zeitpunkt $t = 0$ vorhandene Menge $m_0 = m(0)$ kennen, ist nach Satz 2.1

$$m(t) = m_0 \cdot e^{-\lambda t}\,.$$

Meistens wird die Radioaktivität einer Substanz nicht durch ihre Zerfallskonstante angegeben, sondern durch ihre *Halbwertszeit* $t_{1/2}$: Das ist jene Zeit, in der die Hälfte der vorhandenen Masse zerfällt, d.h. $m(t_{1/2}) = \frac{1}{2}m_0$. Wenn wir dies in die obige Formel einsetzen, erhalten wir

$$m(t_{1/2}) = m_0 \cdot e^{-\lambda t_{1/2}} = \tfrac{1}{2}m_0 \quad \text{oder} \quad e^{-\lambda t_{1/2}} = \tfrac{1}{2}\,.$$

Um diese Gleichung nach $t_{1/2}$ auflösen zu können, brauchen wir die *Umkehrfunktion* der Exponentialfunktion, d.h. jene Funktion f, für die gilt: $f(e^t) = t$ für alle t. Eine solche Funktion gibt es, denn da der Graph der Exponentialfunktion immer nur ansteigt, gibt es zu jeder positiven Zahl u genau eine Zahl t, so daß $e^t = u$ ist.

DEFINITION: *Der natürliche Logarithmus* $\ln u$ *einer positiven Zahl* u *ist jene reelle Zahl* t, *für die* $e^t = u$ *ist.*

Aus der Funktionalgleichung $e^{s+t} = e^s \cdot e^t$ der Exponentialfunktion folgt sofort, daß

$$\ln(uv) = \ln u + \ln v$$

ist, denn mit $s = \ln u$ und $t = \ln v$, also $u = e^s$ und $v = e^t$ gilt

$$\ln(uv) = \ln(e^s \cdot e^t) = \ln(e^{s+t}) = s + t = \ln u + \ln v\,.$$

Entsprechend folgt, daß

$$\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln u - \ln v$$

ist, denn mit $q = u/v$ ist $qv = u$, also $\ln q + \ln v = \ln u$. Wegen $e^0 = 1$ ist $\ln(1) = 0$; damit folgt insbesondere, daß $\ln(1/u) = -\ln(u)$ ist.

Wenden wir dies an auf die Gleichung $e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2}$, so erhalten wir

$$-\lambda t_{1/2} = \ln(\tfrac{1}{2}) = -\ln 2 \quad \text{oder} \quad \lambda t_{1/2} = \ln 2\,;$$

die gesuchten Beziehungen zwischen Zerfallskonstante und Halbwertszeit sind also

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \qquad \text{und} \qquad t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}\,.$$

Der hierbei auftretende Logarithmus von zwei hat den Wert

$$\ln 2 \approx 0{,}69314\,71805\,59945\,30941\,72321\,21458\,17656\,80755\,.$$

Die Gleichung $\ln(uv) = \ln u + \ln v$ war bis vor knapp zwanzig Jahren von großem praktischen Interesse: Da Additionen sehr viel einfacher von Hand auszuführen sind als Multiplikationen, kann man das Produkt uv ausrechnen, indem man die Logarithmen von u und v einer Tafel entnimmt, diese beiden Werte addiert, und wieder in der Tafel nachschaut, zu welchem Wert die Summe gehört. Die erste solche *Logarithmentafel* berechnete der schottische Mathematiker John Napier (1550–1617); er benutzte den hier eingeführten natürlichen Logarithmus. Für das praktische Rechnen erwies es sich aber schnell als günstiger, statt dessen mit dem *dekadischen Logarithmus*, der Umkehrfunktion $\lg u$ zur Funktion $f(t) = 10^t$, zu rechnen. Die erste Tafel der dekadischen Logarithmen berechnete 1617 Napiers Schüler Henry Briggs (1561–1630), der diese Logarithmen für die Zahlen von 1 bis 1000 mit vierzehnstelliger Genauigkeit angab; deshalb bezeichnet man die dekadischen Logarithmen auch gelegentlich als Briggssche Logarithmen. In der Informationstheorie schließlich benötigt man vor allem die Umkehrfunktion $\mathrm{lb}\, u$ zur Funktion $f(t) = 2^t$. Alle drei Funktionen werden von ihren Anwendern oft einfach mit $\log u$ bezeichnet; gelegentlich wird auch die *Basis* e, 10 oder 2 als Index angegeben, also

$$\ln u = \log_e u, \quad \lg u = \log_{10} u, \quad \mathrm{lb}\, u = \log_2 u\,.$$

Falls irgendwo nur von $\log u$ die Rede ist, muß man aus dem Zusammenhang schließen, welche der drei Funktionen gemeint ist.

Als erstes konkretes Beispiel einer Anwendung der Exponentialfunktion wollen wir ausrechnen, inwieweit die bei der Reaktorkatastrophe von Tschernobyl freigesetzten radioaktiven Stoffe inzwischen abgebaut sind. Am problematischsten ist bekanntlich das Cäsium 137; es hat eine Halbwertszeit von 30,14 Jahren und damit die Zerfallskonstante

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \approx 0{,}023\,.$$

Das Zerfallsgesetz is demnach

$$m(t) = m_0 \cdot e^{-0{,}023 \cdot t} \quad \text{mit in Jahren gemessenem } t\,.$$

Der Zeitpunkt Null, zu dem sich die Katastrophe ereignete, war der 26. April 1986. Seither sind $7\frac{1}{2}$ Jahre vergangen, die noch vorhandene Masse des Cäsiums 137 ist also

$$m(7\tfrac{1}{2}) = m_0 \cdot e^{-0{,}023\cdot 7{,}5} \approx 0{,}84\, m_0\,.$$

Also sind etwa 15% des freigesetzten Cäsiums 137 abgebaut; die restlichen 85% befinden sich noch irgendwo in der Umwelt.

Glücklicherweise läßt sich das radioaktive Zerfallsgesetz nicht nur auf Katastrophen anwenden; es hat auch erfreulichere Anwendungen. Eine Hauptanwendung ist die *Datierung* von Proben, die radioaktive Substanzen enthalten: Falls man weiß, wie viel radioaktives Material zur Entstehungszeit vorhanden war, kann man nachmessen, wieviel davon jetzt noch übriggeblieben ist und kann dann nach dem Zerfallsgesetz das Alter der Probe berechnen. Die bekannteste solche Methode ist die 1949 von Libby eingeführte **C^{14}-Methode:**

Das bei weitem häufigste Kohlenstoffisotop ist das stabile C^{12}. Daneben gibt es im wesentlichen nur noch das sehr kurzlebige Isotop C^{13} und das Isotop C^{14} mit einer Halbwertszeit von 5763 Jahren. C^{14} entsteht regelmäßig in der Atmosphäre durch Neutronenstrahlung von der Sonne: Wird ein Stickstoffatom N^{14} von einem Neutron getroffen, so wird dieses Neutron in den Atomkern eingebaut und statt dessen ein Proton abgegeben; also entsteht C^{14}. Dieses C^{14} wird von allen lebenden Organismen eingeatmet und wie gewöhnliches C^{12} weiterverarbeitet; insbesondere wird es also überall in die organische Substanz eingebaut. Nach dem Tod des Organismus gilt dies nicht mehr: Die Neutronenstrahlung ist (zum Glück) nicht stark genug, um in den Organismus einzudringen, so daß nun kein neues C^{14} mehr zugeführt wird, sondern nur noch das alte zerfällt.

Um dies quantitativ zu formulieren, gehen wir davon aus, daß der Organismus zu Lebzeiten eine gewisse Menge m_0 an C^{14} enthält. Nach dem Zerfallsgesetz ist dann, wenn man den Nachschub an neuem C^{14} zunächst außer acht läßt, $m(t) = m_0 \cdot e^{-\lambda t}$. Nach Satz 2.1 ist

$$m'(t) = -\lambda \cdot m_0 \cdot e^{-\lambda t} = -\lambda \cdot m(t)$$

oder

$$m(t+h) \approx m(t) - \lambda \cdot m(t) \cdot h\,;$$

im Zeitraum zwischen t und $t+h$ zerfällt also die Masse $\lambda \cdot m(t) \cdot h$. Für einen *lebenden* Organismus gilt dies nur für $t = 0$, denn danach wird ja gleich wieder neues C^{14} eingeatmet, und dieses ersetzt das gerade zerfallene. Also zerfällt hier in einem Zeitraum der Länge h die Masse $\lambda \cdot m_0 \cdot h$. Nun nehmen wir an, der Organismus sterbe zum Zeitpunkt $t = 0$, und wir messen zu einem späteren Zeitpunkt t die in einem Zeitraum h zerfallende Masse. Dann erhalten wir das Ergebnis

$$\lambda \cdot m(t) \cdot h = \lambda \cdot m_0 \cdot e^{-\lambda t} \cdot h\,,$$

denn jetzt gibt es keinen Nachschub mehr an frischem C^{14}. Also zerfällt jetzt im gleichen Zeitraum h um den Faktor $e^{-\lambda t}$ weniger C^{14}.

Die Masse des zerfallenden C^{14} läßt sich zwar nur schwer direkt bestimmen, aber die Anzahl der Zerfälle kann mit einem Zählrohr gemessen werden; da alle zerfallenden C^{14}-Atome die gleiche Masse haben, ist diese Anzahl proportional zur Menge des zerfallenden Materials. Ist also Z_{lebend} die Anzahl der Zerfälle in einem vorgegebenen Zeitraum h für den lebenden Organismus und Z_{tot} die entsprechende Zahl für den zum Zeitpunkt $t = 0$ verstorbenen, so ist

$$\frac{Z_{\text{tot}}}{Z_{\text{lebend}}} = e^{-\lambda t} \quad \text{oder} \quad t = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{Z_{\text{tot}}}{Z_{\text{lebend}}}\right).$$

Da C^{14} eine Halbwertszeit von 5736 Jahren hat, ist

$$\lambda = \frac{\ln 2}{5736} \approx 0{,}00012084, \text{ also } t \approx -8275{,}3 \ln\left(\frac{Z_{\text{tot}}}{Z_{\text{lebend}}}\right).$$

Als typisches Beispiel eines Organismus betrachten wir Holz: Bei lebendem Holz geht man aus von 6,68 Zerfällen pro Gramm und Minute, ein Wert der bis zum Beginn der Atomversuche in den fünfziger Jahren galt und von dem man annimmt, daß er im Verlauf der Erdgeschichte ziemlich konstant blieb. Für ein Stück Holz, das 1950 als Kohle in den Höhlen von Lascoux gefunden wurde und von dem man annimmt, daß es von einem Feuer jenes Stammes kommt, der die dortigen Höhlenmalereien schuf, maß man nur 0,97 Zerfälle pro Gramm und Minute – das ganze natürlich hochgerechnet auf die Masse des Holzes, aus dem die Kohle entstanden ist. Für das Alter des Kohlestücks ergibt sich somit

$$t = -8275{,}3 \ln\left(\frac{0{,}97}{6{,}68}\right) \approx -8275{,}3 \cdot (-1{,}92958) \approx 15968,$$

die Höhlenmalereien sind also etwa 16000 Jahre alt.

Für ein entsprechendes Stück Kohle von einem Dach aus der babylonischen Stadt Nippur, das der Zeit Hamurabis zugeschrieben wird und das ebenfalls um 1950 gefunden wurde, maß man entsprechend 4,09 Zerfälle pro Gramm und Minute; hier ist also

$$t = -8275{,}3 \ln\left(\frac{4{,}09}{6{,}68}\right) \approx -8275{,}3 \cdot (-0{,}497935) \approx 4060\,.$$

Falls Z_{tot} sehr klein ist, kommen wir in Bereiche, in denen die Exponentialfunktion sehr flach wird; große Änderungen der Zeit entsprechen also nur noch minimalen Änderungen von Z_{tot}. Hinzu kommt, daß die Anzahl der Zerfälle pro Minute nicht konstant ist, sondern statistischen Schwankungen unterliegt, deren Größenordnung ungefähr die Quadratwurzel aus Z_{tot} ist. Um „den“ Wert Z_{tot} zu bestimmen, der ins Zerfallsgesetz eingesetzt werden muß, macht man daher im allgemeinen viele Messungen und nimmt deren Mittelwert; wie wir in §7 sehen werden, läßt sich der Fehler durch n Messungen etwa um den Faktor $\sqrt{n}$ reduzieren. Das gleiche gilt im Prinzip auch für Z_{lebend}, und ähnliches gilt auch für die Halbwertszeit, aber da Z_{lebend} beispielsweise anhand von lebendem Holz bestimmt werden kann, das in ausreichender Menge zur Verfügung steht, und da auch die Halbwertszeit von C^{14} recht gut im Labor bestimmt werden kann, wollen wir bei der Fehleranalyse des C^{14}-Verfahrens nur den durch Z_{tot} verursachten Fehler berücksichtigen.

Ist $\widetilde{Z}_{tot}$ der gemessene Wert und Z_{tot} der aufgrund des „wahren“ Alters der Probe errechnete Wert, so bezeichnen wir die Differenz $\widetilde{Z}_{tot} - Z_{tot}$ als *absoluten* Fehler und den Quotienten

$$\varepsilon = \frac{\widetilde{Z}_{tot} - Z_{tot}}{Z_{tot}}$$

als *relativen* Fehler. Offensichtlich ist mit dieser Bezeichnung

$$\widetilde{Z}_{tot} = Z_{tot} \cdot (1 + \varepsilon)\,.$$

Im Beispiel von Lascoux hatten wir $Z_{tot} = 0{,}97$; wenn wir annehmen, daß diese Messung mit einem relativen Fehler von etwa $\pm 3\% = \pm 0{,}03$ behaftet ist, kommen wir also für das Alter der Probe auf die untere Schranke

$$\begin{aligned} t_1 &= -\alpha \cdot \ln\left(\frac{Z_{tot} \cdot 1{,}03}{Z_{lebend}}\right) \\ &= -\alpha \cdot \left(\ln Z_{tot} + \ln(1{,}03) - \ln Z_{lebend}\right) \\ &= t - \alpha \cdot \ln(1{,}03) \approx 15723 \text{ Jahre,} \end{aligned}$$

wobei für α der Wert von 8275,3 Jahren eingesetzt wurde. Entsprechend kommen wir für den Fall, daß der Fehler negativ war, auf den Höchstwert von

$$t_2 = t + \alpha \cdot \ln(0{,}97) \approx 16212 \text{ Jahre.}$$

Das Alter der Probe liegt also auf jeden Fall bei etwa 16 000 Jahren, und genauer wird das in diesem Zusammenhang wohl auch nicht interessieren.

Falls das Alter der Probe allerdings in die Größenordnung von mehreren hundert Tausend oder gar Millionen Jahren kommt, wie das etwa bei geologischen Datierungsaufgaben häufig der Fall ist, würde Z_{tot} so klein und der relative Fehler ε gleichzeitig so groß, daß man von der C^{14}-Methode keine sinnvollen Ergebnisse erwarten mehr erwarten kann; man kann also nicht etwa das Alter von Erdölvorkommen nach dieser Methode datieren.

Deshalb verwenden die Geologen radioaktive Stoffe mit erheblich größeren Halbwertszeiten, vor allem die schweren radioaktiven Kerne im hinteren Teil des Periodensystems. Für diese Atome gibt es mehrere *Zerfallsreihen,* sie zerfallen also nicht einfach in einen stabilen Kern, sondern der entstehende Kern ist selbst wieder radioaktiv mit einer neuen Halbwertszeit *usw.,* bis am Ende (meistens) das stabile Blei entsteht. Die Ausgangskonzentration eines radioaktiven Stoffs muß daher aufgrund der Konzentrationen der verschiedenen Zwischenprodukte errechnet werden, so daß hierfür weitergehende Mathematik- und Physikkenntnisse notwendig sind, als in dieser Vorlesung vorausgesetzt werden können.

Um trotzdem ein Beispiel durchzurechnen, wollen wir annehmen, daß wir bereits wissen, daß in einer gegebenen Probe Samarskit (Y, U, Ca)(Nb, $Fe^{3+})_2$(O, OH)$_6$ vom ursprünglich vorhandenen Thorium Th^{232} ein Teil zu 0,0376 Gramm Blei Pb^{208} zerfallen sei, und daß die Probe noch drei Gramm Thorium enthalte.

Da sich die Massen von Blei- und Thoriumatomen wie 208 zu 232 verhalten, entstanden die 0,0376 Gramm Blei aus

$0{,}0376 \cdot \frac{232}{208} = 0{,}0419$ Gramm Thorium; die Probe enthielt also ursprünglich 3,0419 Gramm Thorium. Davon sind noch drei Gramm übrig, also ist

$$3g = 3{,}0419g \cdot e^{-\lambda t}$$

mit

$$\begin{aligned}\lambda &= \ln 2/13{,}9\text{Mrd. Jahre} = 0{,}0498667/\text{Mrd. Jahre}\\ &= 49{,}8667/\text{Mio. Jahre}\,,\end{aligned}$$

denn Thorium-232 hat eine Halbwertszeit von 13,9 Mrd. Jahren. Mit

$$\lambda t = -\ln\frac{3}{3{,}0419} \approx 0{,}01387$$

kommen wir also auf ein Alter der Probe von

$$t \approx 278 \text{ Mio. Jahren.}$$

Als letztes Beispiel zur Radioaktivität möchte ich die *Aktivität* einer Probe bestimmen. Diese wird in Becquerel angegeben, wobei 1Bq gleich ein Zerfall pro Sekunde ist. Wenn wir also wissen möchten, mit wieviel Becquerel ein Gramm Cäsium-137 strahlt, müssen wir zunächst berechnen, welche Masse in einer Sekunde zerfällt; nach dem Zerfallsgesetz ist das

$$\Delta m = \lambda \cdot 1\text{sec} \cdot 1\text{g} = 0{,}023/\text{Jahre} \cdot 1\text{sec} \cdot 1\text{g}\,.$$

Nun hat ein Jahr etwa

$$365\tfrac{1}{4} \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 31\,557\,600$$

Sekunden, d.h.

$$\Delta m = \frac{0{,}023}{31\,557\,600}\mathrm{g} = 7{,}28826 \cdot 10^{-10}\mathrm{g}\,.$$

Daraus können wir die Anzahl der Zerfälle bestimmen, wenn wir wissen, daß die Anzahl der Atome in 137 Gramm Cäsium-137 gleich $\mathrm{N_L} = 6{,}02205 \cdot 10^{23}$ ist ($\mathrm{N_L}$ heißt Loschmidtsche oder Avogadrosche Zahl): Damit sind in der Masse Δm

$$\frac{\Delta m \cdot \mathrm{N_L}}{137} = 3{,}2 \cdot 10^{12}$$

Atome enthalten; ein Gramm Cäsium-137 strahlt also mit einer Aktivität von $3{,}2 \cdot 10^{12}$ Bq.

Ein anderes Beispiel für eine Anwendung der Exponentialfunktion ist der Sauerstoffverbrauch durch Atmung: Ein Erwachsener macht pro Minute durchschnittlich 16 Atemzüge von je einen halben Liter; dabei enthält die ausgeatmete Luft 20% weniger Sauerstoff als die eingeatmete. Angenommen, wir befinden uns in einem hermetisch abgeschlossenen Raum ohne Belüftung mit dem Volumen V; wie nimmt dann die Sauerstoffkonzentration ab?

Um dies mathematisch zu fassen, betrachten wir die Funktion

$$S(t) = \text{Sauerstoffmenge zur Zeit } t\,;$$

da eine sechzehntel Minute, die Zeit zwischen zwei Atemzügen, eine recht kurze Zeit ist, können wir ohne nennenswerten Fehler ansetzen, daß

$$S'(t) = -\frac{\text{Verbrauch pro } \frac{1}{16} \text{ Minute}}{\frac{1}{16} \text{ Minute}}$$

ist. Der Verbrauch pro $\frac{1}{16}$ Minute durch eine Person ist der Sauerstoffverbrauch bei einem Atemzug. Die Sauerstoffkonzentration in einem Atemzug ist die gleiche wie die in der umgebenden Luft, also $S(t)/V$. Pro Atemzug wird ein halber Liter Luft eingeatmet; dieser enthält eine Sauerstoffmenge von $\frac{1}{2}\ell \cdot \frac{S(t)}{V}$, von der 20% verbraucht werden, also $\frac{1}{10}\ell \cdot \frac{S(t)}{V}$. Sind n Personen im Raum, so wird in jeder sechzehntel Minute das n-fache dieser Sauerstoffmenge verbraucht, d.h.

$$S'(t) = -\frac{\frac{n}{10}\ell \cdot \frac{S(t)}{V}}{\frac{1}{16}\,\text{min}} = -\frac{n \cdot 1{,}6\,\ell/\text{min}}{V} \cdot S(t)\,.$$

Dies ist wieder die bekannte Gleichung für die Exponentialfunktion; nach Satz 2.1 hat sie die Lösung

$$S(t) = S(0) \cdot e^{-n \cdot 1{,}6/V}\,,$$

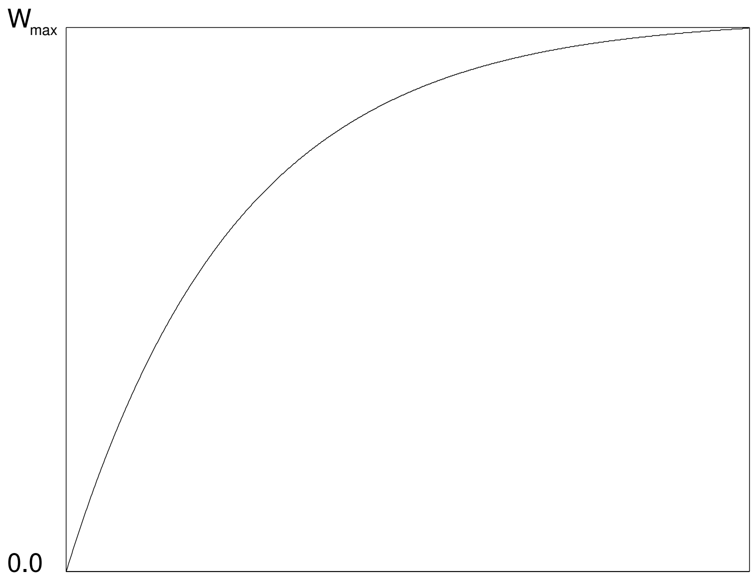
wobei V in Liter und t in Minuten anzugeben ist.

Als letztes Beispiel für exponentielles Wachstum oder exponentiellen Zerfall möchte ich das Lernen und Vergessen betrachten: Ein Student beginnt zur Zeit $t = 0$ einen für ihn neuen Prüfungsstoff zu lernen; sein Wissen zur Zeit t, wie immer das genau definiert sein soll, sei $W(t)$. Da der Prüfungsstoff zunächst völlig unbekannt sein soll, ist $W(0) = 0$. Natürlich kann kein Student unbegrenzt viel Stoff lernen; $W(t)$ ist also beschränkt durch eine Schranke W_{max}. Aus Erfahrung wissen wir, daß die Lernfähigkeit bei ununterbrochenem Lernen im Laufe der Zeit nachläßt; bei Versuchen mit dem Auswendiglernen sinnloser Silben zeigte sich, daß der Lernfortschritt recht gut durch die Gleichung

$$W'(t) = c \cdot \big(W_{max} - W(t)\big)$$

beschrieben wird: Der Lernfortschritt ist also proportional zur noch vorhandenen Aufnahmekapazität. Diese Gleichung ist etwas verschieden von den bisher betrachteten; setzen wir aber $f(t) = W(t) - W_{max}$, so ist $f'(t) = W'(t)$, also $f'(t) = -c \cdot f(t)$. Da $f(0) = -W_{max}$ ist, folgt aus Satz 2.1

$$f(t) = -W_{max} \cdot e^{-ct} \quad \text{und} \quad W(t) = W_{max} \cdot (1 - e^{-ct})\,.$$

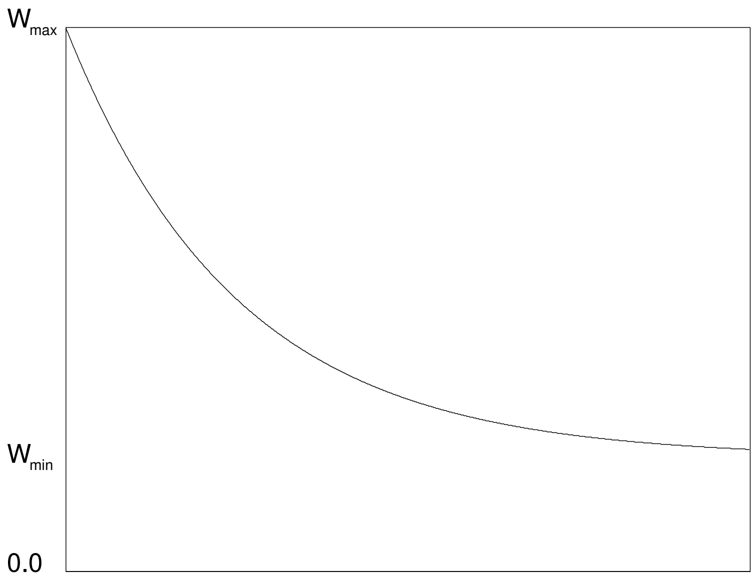


Nach der Prüfung, für die wie der Einfachheit halber wieder den Zeitpunkt $t = 0$ zugrunde legen wollen, beginnt dann die Zeit des Vergessens. Da (hoffentlich) nicht alles Lernen umsonst war, wird man davon ausgehen können, daß es ein Mindestwissen W_{min} gibt, das nie vergessen wird. Für den Rest gilt nach dem Ebbinghausschen Modell des Vergessens

$$W'(t) = -\gamma \cdot \bigl(W(t) - W_{\min}\bigr)$$

mit einer gewissen Konstante γ. (Ebbinghaus, 1850–1909, war ein deutscher Psychologe.) Mit $f(t) = W(t) - W_{\min}$ ist wieder völlig analog zu oben $f'(t) = W'(t) = \gamma \cdot f(t)$, also

$$f(t) = W(0) \cdot e^{-\gamma t} \quad \text{und} \quad W(t) = W_{\min} + \bigl(W(0) - W_{\min}\bigr) \cdot e^{-\gamma t}\,.$$



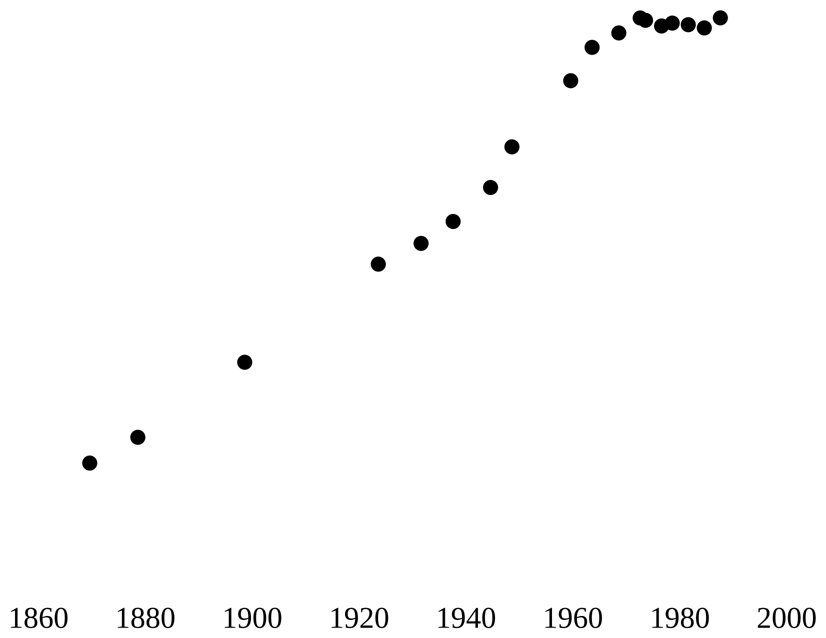
Zum Abschluß dieses Paragraphen möchte ich noch darauf eingehen, wie man empirisch gegebenen Daten ansieht, ob der Zusammenhang zwischen ihnen durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden kann. Als Motivation für die Einführung des Exponentialfunktion diente uns das

Malthussche Wachstumsgesetz; es liegt also nahe, dieses Gesetz mit der tatsächlichen Bevölkerungsentwicklung etwa in der Bundesrepublik zu vergleichen. Wenn man für die Zeit vor 1949 die Bevölkerungszahlen jenes Teils des Deutschen Reichs zugrunde legt, der der alten Bundesrepublik entspricht, und für die Zeit danach deren Einwohnerzahlen, so war die Bevölkerung

im Jahr	1871	1880	1900	1925	1933	1939	1946	1950	1961
in Mio.	2041	2282	2984	3902	4096	4301	4619	4999	5618

im Jahr	1965	1970	1974	1975	1978	1980	1983	1986	1989
in Mio.	5930	6065	6205	6183	6130	6157	6142	6112	6206

Ist die Kurve durch diese Datenpunkte eine Exponentialfunktion?



Die Zeichnung spricht eher dagegen, allerdings sind reale Zahlen immer gewissen Schwankungen unterworfen, und wenn die Zahl für 1925 etwas kleiner wäre, könnte man vielleicht doch den charakteristischen Bauch der Exponentialfunktion sehen – zumindest bis etwa 1974. Ab 1975 beginnen die Bevölkerungszahlen zu sinken, was natürlich nicht durch ein exponentielles *Wachstum* beschrieben werden kann.

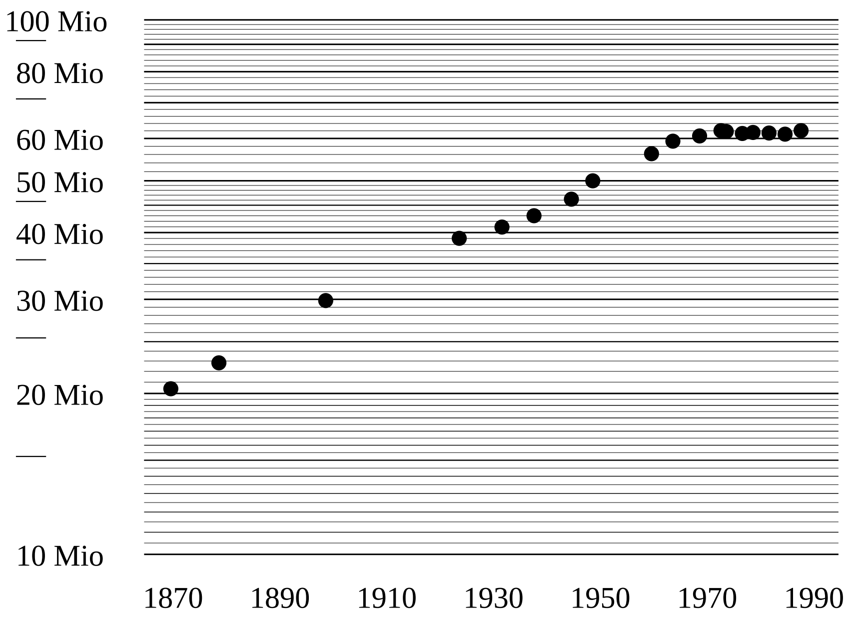
Ein klareres Bild ergibt sich, wenn wir anstelle der Einwohnerzahlen deren *Logarithmen* auftragen. Ist nämlich $f(t) = a \cdot e^{bt}$, so ist

$$\ln f(t) = \ln a + bt ,$$

die Punkte $\big(t,\ \ln f(t)\big)$ liegen also auf einer Geraden. Wenn wir nun auch kein Gefühl für Exponentialfunktionen haben, so können wir visuell doch recht gut erkennen, ob vorgegebene Punkte auf einer *Geraden* liegen. Außerdem haben die Logarithmen von $f(t)$ den Vorteil, nicht so schnell zu wachsen: Wollten wir etwa die Funktion $f(t) = 10^t$ zwischen $t = 0$ und $t = 5$ in einem 10 cm hohen Diagramm darstellen, so läge $f(t)$ für $t \leq 3$ höchstens 1mm von der t-Achse entfernt, wäre also praktisch nicht zu erkennen. Daher ist es in allen Fällen, in denen man exponentielles oder ein ähnlich stark ansteigendes Wachstum hat, sinnvoller, nicht den Funktionswert sondern dessen Logarithmus aufzutragen. Entsprechende Diagramme, die an der charakteristischen Beschriftung einer ihrer Achsen erkennbar sind, findet man in vielen Zeitschriften und Büchern, in denen Daten graphisch dargestellt werden.

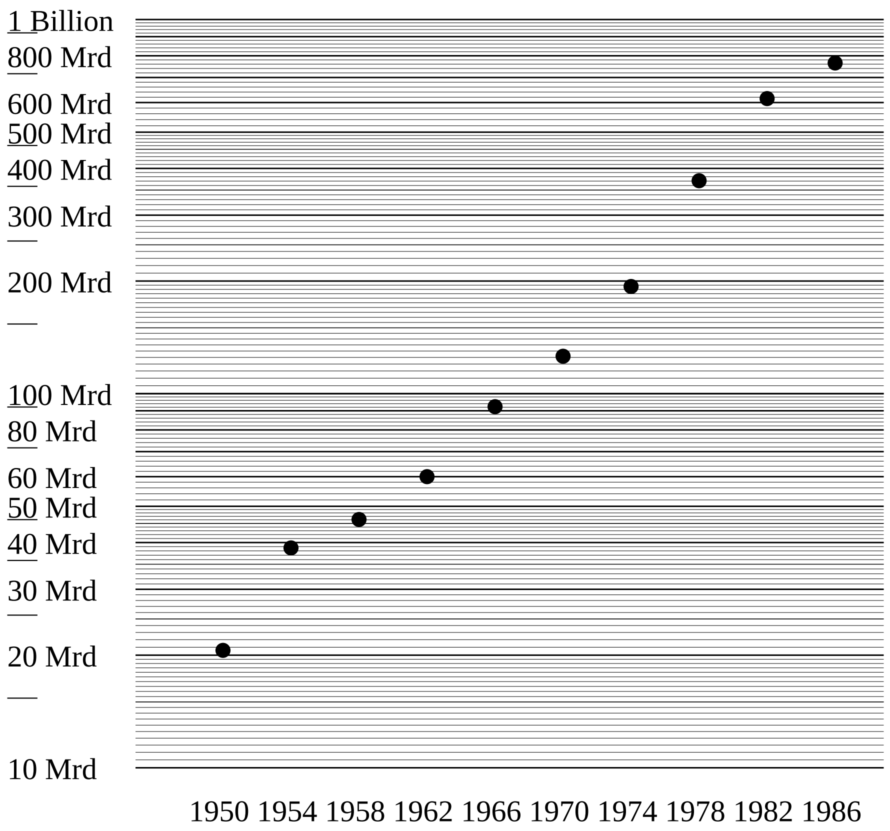
Natürlich ist es dabei nicht notwendig, die Logarithmen wirklich auszurechnen: Man verwendet einfach ein Achsenkreuz, in dem eine der Achsen logarithmisch beschriftet ist; die Abstände dort entsprechen also nicht der Differenz zwischen den aufgetragenen Zahlen, sondern der Differenz zwischen deren Logarithmen. (Im Schreibwarenhandel ist Papier mit derart beschrifteten Achsen unter dem Namen *halblogarithmisches Papier* erhältlich; beim *logarithmischen Papier* sind beide Achsen logarithmisch beschriftet. Inzwischen ist es natürlich auch kein Problem mehr, sich entsprechende Koordinatensysteme selbst per Computer zu erzeugen.)

Für die oben angegebenen Bevölkerungszahlen erhalten wir bei logarithmischer Darstellung das folgende Diagramm:



Hier sieht man deutlich, daß die Wachstumsfunktion bis etwa 1960 in der Tat von kleineren Schwankungen abgesehen ungefähr exponentiell war, um dann zu stagnieren.

Ein Beispiel für ungebrochenes exponentielles Wachstum zeigt das folgende Diagramm:



Die hier aufgetragenen Zahlen geben die Entwicklung der Staatsverschuldung der Bundesrepublik Deutschland wieder.

§4: Logistisches Wachstum und Grundzüge der Integralrechnung

Wir beginnen wieder mit einem Modell für das Bevölkerungswachstum: Nachdem wir gesehen haben, daß das Modell des Theologen und Nationalökonomen Malthus nicht sonderlich gut mit realen Daten übereinstimmt, versuchen wir es nun mit einem Modell, das der belgische Mathematiker Verhulst (1804 – 1849) im Jahre 1837 aufstellte und als *logistisches Wachstum* bezeichnete. Bezeichnet wieder $f(t)$ die Bevölkerungsanzahl zur Zeit t, so sollte bekanntlich nach Malthus gelten

$$f'(t) = G \cdot f(t) - S \cdot f(t)\,,$$

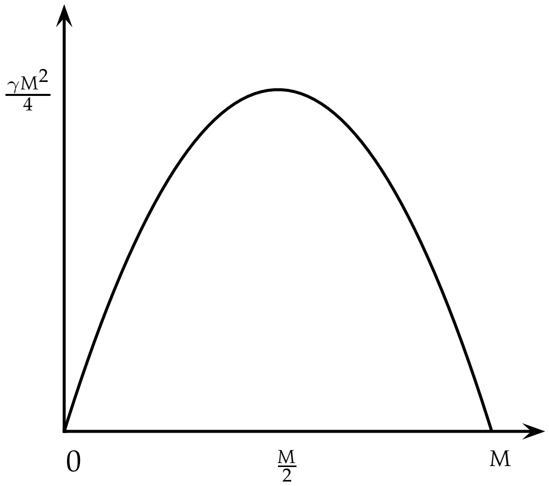
wobei G die Geburts- und S die Sterberate bezeichnet. Nach Verhulst ist aber die Sterberate nicht konstant: Wenn $f(t)$ groß ist, treten die Individuen in Konkurrenz zueinander, was zu einer höheren Sterberate und möglicherweise auch zu einer niedrigeren Geburtenrate führt – sei es durch Streß oder Nahrungsmittelknappheit oder was auch immer. Solange wir uns auf die rein mathematischen Ebene beschränken, gibt es keinen Unterschied zwischen einer Geburt weniger und einer Geburt, die gleichzeitig als Sterbefall betrachtet wird; wir können also G unverändert lassen und nur S modifizieren. Im allereinfachsten Fall könnte man etwa annehmen, daß die Sterberate proportional zur vorhandenen Anzahl der Individuen ist, also $S = s \cdot f(t)$ mit einer geeigneten Konstanten s, und genau davon ging Verhulst aus: Wenn es keine Gründe gibt, ein komplizierteres Modell zu wählen, ist das einfachste immer das beste. Anstelle des Malthusschen Wachstumsgesetzes erhalten wir dann das *logistische Wachstumsgesetz*

$$f'(t) = G \cdot f(t) - s \cdot f(t)^2 .$$

Auf das gleiche Gesetz kommt man auch mit einem anderen, vielleicht etwas anschaulicheren Ansatz: Wenn man davon ausgeht, daß jedes Lebewesen gewisse Ressourcen verbraucht und daß diese Ressourcen insgesamt nur in begrenzter Menge zur Verfügung stehen, so kann jeder Lebensraum höchstens eine gewisse Maximalzahl von Individuen versorgen; es gibt also für jede Population eine Maximalgröße M, die sie – konstante Umweltbedingungen vorausgesetzt – nicht überschreiten kann. Wenn sich die Individuenzahl $f(t)$ dieser Maximalgröße M nähert, sind nur noch kleine Zuwachsraten möglich, da sonst $f(t) \geq M$ würde. Dieses Verhalten der Zuwachsrate kann beispielsweise beschrieben werden durch das Wachstumsgesetz

$$f'(t) = \gamma \cdot f(t) \cdot \big(M - f(t)\big) ,$$

in dem der Faktor $f(t)$ zum Ausdruck bringt, daß bei größerem $f(t)$ mehr potentielle Eltern vorhanden sind, und der Faktor $M - f(t)$ dafür sorgt, daß $f'(t)$ gegen Null geht, wenn sich $f(t)$ der oberen Schranke M nähert. Genauer sieht man das in der folgenden Zeichnung, die den Zusammenhang zwischen $f(t)$ und $f'(t)$ wiedergibt: Die Zuwachsrate steigt mit $f(t)$ an solange $f(t) < M/2$ ist; für $f(t) > M/2$ sinkt sie bei weiter ansteigendem $f(t)$.



Ausmultipliziert läßt sich die gerade hergeleitete Gleichung auch als

$$f'(t) = \gamma \cdot M \cdot f(t) - \gamma \cdot f(t)^2$$

schreiben, sie wird also identisch mit Verhulsts logistischem Wachstumsgesetz, sobald man $G = \gamma \cdot M$ und $s = \gamma$ setzt. Umgekehrt sieht man, daß das logistische Wachstumsgesetz eine Population beschreibt, die höchstens auf $M = G/s$ Individuen ansteigen kann.

In beiden Formen ist das neue Wachstumsgesetz sehr verschieden vom Malthusschen, so daß uns beispielsweise Satz 2.1 keine Anhaltspunkte für die genaue Form der Funktion $f(t)$ geben kann. In der Tat steht uns noch die Wiederholung eines recht großen Teils des mathematischen Schulstoffs bevor, bis wir gegen Ende dieses Paragraphen $f(t)$ explizit hinschreiben können.

Ein erster Hinweis auf einen mögliche Lösungsansatz ist die Beobachtung, daß auf der rechten Seite der Gleichung

$$f'(t) = \gamma \cdot f(t) \cdot \big(M - f(t)\big)$$

nur $f(t)$ vorkommt, nicht aber t selbst: Schreiben wir der Deutlichkeit halber $f(t) = u$, so ist

$$f'(t) = \gamma \cdot u \cdot (M - u)\,.$$

Dies legt es nahe, die *Umkehrfunktion* von f zu betrachten, das heißt also jene Funktion g, für die genau dann $t = g(u)$ ist, wenn $u = f(t)$. Eine solche Funktion g gibt es zumindest für die u aus dem Bereich $0 \leq u \leq M$, denn abgesehen von den beiden Endpunkten des Intervalls ist dort nach obiger Gleichung $f'(t)$ überall positiv, mit t steigt also auch $u = f(t)$ an. Daher gibt es zu jedem u zwischen 0 und M genau ein t mit $f(t) = u$, eben $t = g(u)$. Damit uns das etwas nützt, müssen wir als nächstes $f'(t)$ mit der Funktion g in Verbindung bringen. Das ist ziemlich einfach: Wenn wir $u = f(t)$ in einem Koordinatensystem mit t-Achse und u-Achse graphisch darstellen, erhalten wir natürlich genau die gleiche Kurve wie bei der graphischen Darstellung von $t = g(u)$ – schließlich ist $u = f(t)$ gleichbedeutend damit, daß $t = g(u)$ ist. $f'(t)$ ist aber nichts anderes als die Steigung der Tangenten an diese Kurve im Punkt (t, u) bezogen auf die t-Achse, also jene Zahl m, für die die Tangente die Gleichung

$$u = m \cdot t + \text{irgendeine Konstante} \tag{1}$$

hat. Entsprechend ist $g'(t)$ nichts anderes als die Steigung der Tangenten an diese Kurve im Punkt (t, u) bezogen auf die u-Achse, also jene Zahl n, für die die Tangente die Gleichung

$$t = n \cdot u + \text{irgendeine andere Konstante} \tag{2}$$

hat. Da es sich beides Mal um dieselbe Gerade handelt, können wir zur Bestimmung von n aber auch einfach die Gleichung (1) nach t auflösen, was auf

$$t = \frac{u}{m} + \text{uninteressante Konstante}$$

führt. Also ist $n = 1/m$ (und die „uninteressante Konstante“ stimmt mit „irgendeine andere Konstante“ überein). Damit haben wir folgende Beziehung nachgerechnet:

LEMMA 4.1: *Wenn die Funktion* $u = f(t)$ *eine Umkehrfunktion* $t = g(u)$ *hat, ist im Punkt* (t,u)

$$g'(u) = \frac{1}{f'(t)} .$$

Für das logistische Wachstumsgesetz $f'(t) = \gamma \cdot u \cdot (M - u)$ bedeutet dieses Lemma, daß

$$g'(u) = \frac{1}{f'(t)} = \frac{1}{\gamma \cdot u \cdot (M - u)}$$

ist, wir müssen also eine Funktion g finden, für die $g'(u)$ gleich einer vorgegebenen Funktion von u ist. Das ist bekanntlich das Grundproblem der *Integralrechnung*, die wir somit als nächstes rekapitulieren müssen.

Dazu vergessen wir bis auf weiteres, daß wir es hier im Beispiel mit einer Umkehrfunktion zu tun haben; um wieder bei den gewohnten Bezeichnungen zu sein, betrachten wir irgendeine beliebige Funktion $u = f(t)$ und suchen dazu eine Funktion $u = F(t)$, für die $F'(t) = f(t)$ ist. Wenn wir für irgendeinen Wert t_0 den Funktionswert $F(t_0)$ kennen, können wir F – vorausgesetzt, daß es eine solche Funktion überhaupt gibt – zumindest näherungsweise für jedes t berechnen: Für hinreichend kleine Zahlen h ist in guter Näherung

$$F(t_0 + h) \approx F(t_0) + h \cdot F'(t_0) = F(t_0) + h \cdot f(t_0) .$$

Entsprechend ist

$$F(t_0 + 2h) \approx F(t_0 + h) + h \cdot f(t_0 + h) = F(t_0) + h \cdot f(t_0) + h \cdot f(t_0 + h)$$

und

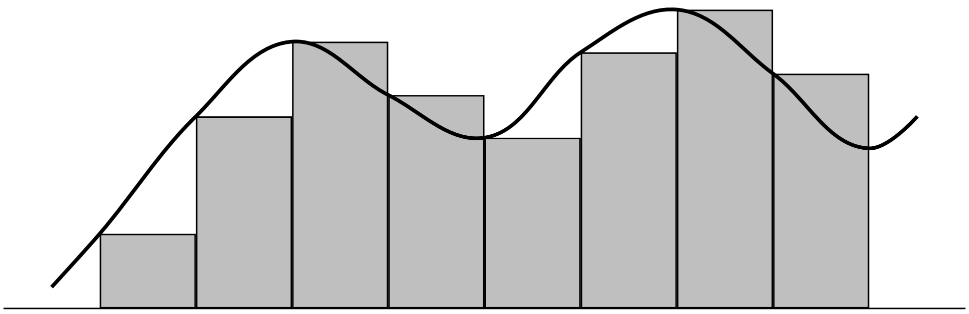
$$\begin{aligned} F(t_0 + 3h) &\approx F(t_0 + 2h) + h \cdot f(t_0 + 2h) \\ &= F(t_0) + h \cdot f(t_0) + h \cdot f(t_0 + h) + h \cdot f(t_0 + 2h) , \end{aligned}$$

und so weiter. Für eine beliebige natürliche Zahl n ist also

$$F(t_0 + n \cdot h) \approx F(t_0) + h \cdot f(t_0) + h \cdot f(t_0 + h) + \cdots + h \cdot f\big(t_0 + (n-1)h\big) .$$

Dieses Ergebnis kann auch geometrisch interpretiert werden: $h \cdot f(t_0 + i \cdot h)$ ist die Fläche des Rechtecks mit Seiten h und $f(t_0 + i \cdot h)$, und die Summe aller dieser Flächen für $i = 0, 1, \ldots n - 1$ ist für hinreichend kleine Werte von h

eine Annäherung an die Fläche unter der Kurve $u = f(t)$ zwischen $t = t_0$ und $t = t_0 + n \cdot h$:



Bei negativen Werten von $f(t_0 + i \cdot h)$ wird allerdings auch das Produkt $h \cdot f(t_0 + i \cdot h)$ negativ. Das widerspricht zwar der anschaulichen Interpretation des Flächeninhalts, führt aber zur richtigen Funktion F mit $F'(t) = f(t)$.

Mit dieser vorzeichenbehafteten Interpretation des Flächeninhalts ist also die Fläche unter der Kurve $u = f(t)$ zwischen den Werten $t = a$ und $t = b$ näherungsweise gleich

$$f(a) \cdot h + f(a + h) \cdot h + \cdots + f\big(a + (n - 1)h\big) \cdot h$$

für $h = (b - a)/n$ und hinreichend große Werte von n. Deshalb liegt es nahe, ähnlich wie bei der Ableitung den Grenzwert für h gegen 0 zu betrachten; da hier $h = (b - a)/n$ ist, müssen wir den Grenzwert für immer größer werdendes n betrachten, oder – wie man in der Mathematik sagt – den Grenzwert für n gegen Unendlich. In Symbolen schreibt man dafür $n \to \infty$, wobei das Symbol ∞ für „Unendlich“ steht. Diesen Grenzwert bezeichnen wir als *bestimmtes Integral* über f mit Grenzen a und b:

DEFINITION: $\int_a^b f(t)\,dt$

$$= \lim_{n\to\infty}\Big(f(a)\cdot h + f(a+h)\cdot h + \cdots + f\big(a+(n-1)h\big)\cdot h\Big)$$

mit $h = \frac{(b-a)}{n}$.

Wenn wir hierin die obere Grenze b variieren lassen, bekommen wir nach obiger Konstruktion eine Funktion F, deren Ableitung gleich der gegebenen Funktion f ist. Dieses Ergebnis ist der berühmte

HAUPTSATZ DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG:
Für die Funktion $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *ist* $F'(x) = f(x)$.

Man beachte, daß wir F als Funktion einer neuen Variablen x definieren müssen, denn t tritt innerhalb des Integrals als eine Variable auf, die zwischen den beiden Grenzen variiert und daher nicht mit der oberen Grenze x verwechselt werden darf. Alternativ hätten wir natürlich auch einen neuen Namen für die Integrationsvariable erfinden können, etwa τ, um dann zu schreiben

$$F(t) = \int_a^t f(\tau)\,d\tau\,.$$

Welche Bedeutung hat hierbei die untere Schranke a? Die Ableitung $F'(t) = f(t)$ ist offenbar unabhängig von a; in der Tat ist anschaulich sofort klar, daß für $a \leq c \leq x$ gilt

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^x f(t)\,dt\,,$$

denn wir haben ja einfach die Fläche zwischen a und x aufgeteilt in das Stück zwischen a und c und das Stück zwischen c und x. Das Integral zwischen a und c ist aber eine von x unabhängige Konstante, deren Ableitung nach x verschwindet; die Funktionen

$$\int_a^x f(t)\,dt \quad \text{und} \quad \int_c^x f(t)\,dt$$

unterscheiden sich also nur um eine Konstante und haben somit die gleiche Ableitung. Allgemeiner bezeichnen wir *jede* Funktion $F(t)$ mit $F'(t) = f(t)$ als eine *Stammfunktion* von $f(t)$ und schreiben

$$F(t) = \int f(\tau)\,d\tau + C\,,$$

wobei der Zusatz „ + C“ darauf hinweisen soll, daß die Stammfunktion nur bis auf eine additive Konstante definiert ist.

Nach so vielen Definition ist es wieder einmal an der Zeit, daß wir uns fragen, inwieweit all das überhaupt sinnvoll ist und ob uns unsere Anschauung nicht bei komplizierteren Funktion $f(t)$ vielleicht aufs Glatteis führt.

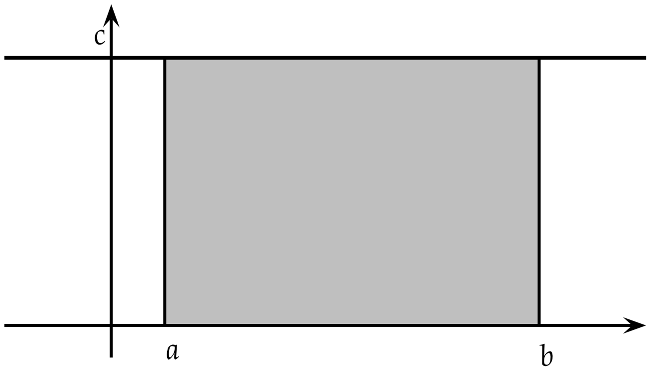
Beginnen wir mit der Definition des bestimmten Integrals als Grenzwert. Wie bei der ebenfalls über einen Grenzwert definierten Ableitung muß ein solcher Grenzwert nicht existieren, und selbst wenn er existiert, ist nicht klar, ob wir nicht bei einer anderen Aufteilung der Fläche als der in Streifen der Breite h vielleicht einen anderen Grenzwert bekommen. So etwas kann in der Tat vorkommen, ist aber glücklicherweise sehr viel seltener als bei der Ableitung: Gegenbeispiele, bei denen die obige Definition kein sinnvolles Ergebnis liefert, treten erst auf, wenn $f(t)$ zwischen der oberen und der unteren Grenze unendlich viele Sprungstellen hat; bei den Funktionen, die typischerweise bei Problemen der mathematischen Modellierung auftreten, ist dies nicht der Fall. Aus diesem Grund habe ich hier auch darauf verzichtet, die vielleicht aus der Schule bekannten Ober- und Untersummen einzuführen; bei den Funktionen, die uns hier interessieren, stimmen die Grenzwerte der beiden automatisch überein.

Beim unbestimmten Integral sollte man sich fragen, ob sich zwei Stammfunktionen einer gegebenen Funktion $f(t)$ wirklich immer nur um eine Konstante unterscheiden. Auch hier gibt es keine Probleme: Wenn wir zwei *differenzierbare* Funktionen $F_1(t)$ und $F_2(t)$ haben mit $F_1'(t) = F_2'(t)$, so folgt in der Tat aus dem sogenannten Mittelwertsatz der Differentialrechnung, daß sich die beiden Funktionen höchstens um eine additive Konstante unterscheiden, und für nicht differenzierbare Funktionen ist es natürlich ohnehin nicht sinnvoll, von einer Ableitung zu reden. Die Integralrechnung ist also im Bezug auf mögliche Fallen sehr viel gutmütiger als die Differentialrechnung, bei der man schon etwas häufiger auf die Existenz einer Ableitung achten muß, denn Sprungstellen von Funktionen können auch bei harmlosen Anwendungen immer wieder auftreten.

Die gerade postulierte Gutmütigkeit der Integralrechnung ist allerdings erschöpft, wenn es darum geht, ein Integral wirklich auszurechnen: Während die Ableitung einer aus Grundrechenarten, Exponentialfunktionen und trigonometrischen Funktionen zusammengesetzten Funktion wieder eine solche Funktion ist, muß dies für die Stammfunktion nicht mehr gelten: Schon in relativ einfachen Fällen können Stammfunktionen teilweise nicht mehr in geschlossener Form angegeben werden, und selbst in den

Fällen, in denen man sie angeben kann, sind oft zahlreiche Tricks notwendig, bevor das Integral in geschlossener Form dasteht.

Beginnen wir mit einem ganz einfachen Beispiel: $f(t) = c$ ist eine Konstante. Dann läßt sich $F(x)$ explizit über die Definition des bestimmten Integrals ausrechnen: Die Fläche unterhalb der Kurve $f(t) = c$ ist die Fläche unterhalb der Geraden, die im Abstand c parallel zur t-Achse verläuft, und das Flächenstück zwischen $t = a$ und $t = x$ ist das Rechteck mit Seitenlängen c und $x - a$, hat also den Flächeninhalt $F(x) = c \cdot (x - a)$.



Da es auf a nicht ankommt, setzen wir als einfachste Wahl $a = 0$ und erhalten die Stammfunktion

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = c \cdot x\,,$$

die allgemeinste Stammfunktion ist also

$$F(t) = \int f(t)\,dt = c \cdot t + C\,,$$

wobei C eine beliebige Konstante ist.

Ähnlich können wir auch noch verfahren, um eine Stammfunktion für $f(t) = c \cdot t$ zu erhalten: Wenn wir wieder der Einfachheit halber bei $a = 0$ anfangen, ist $F(t)$ die Fläche des rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten der Länge t und $c \cdot t$, und dessen Flächeninhalt ist bekanntlich $\frac{1}{2}c \cdot t^2$. Also ist

$$\int ct\,dt = \frac{c \cdot t^2}{2} + C\,.$$

Im allgemeinen ist allerdings die Fläche unterhalb der Kurve $u = f(t)$ viel zu kompliziert, als daß man ihre Fläche mit elementaren geometrischen Methoden ausrechnen könnte. In solchen Fällen benutzt man dann den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und sucht durch Probieren oder Raten oder was auch immer eine Funktion $F(t)$, für die $F'(t) = f(t)$ ist.

Als Beispiel dazu betrachten wir die Funktion $f(t) = t^n$. Wir probieren zunächst mit ähnlich aussehenden Funktionen: Die Ableitung von $g(t) = t^m$ ist $g'(t) = m \cdot t^{m-1}$, die von $h(t) = \frac{1}{m}t^m$ also $h'(t) = t^{m-1}$. Setzen wir hierin $m = n + 1$, so erhalten wir die gewünschte Stammfunktion

$$\int t^n\,dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C$$

– sofern $n + 1 \neq 0$ ist. Für $m = n + 1 = 0$ ist oben $g(t) = 1$, also $g'(t) = 0$, und aus dieser Beziehung können wir absolut nichts ablesen über eine Funktion, deren Ableitung

$1/t$ ist. Um trotzdem eine zu finden, bleibt uns in der Tat nicht anderes übrig als zu raten; nach hinreichend vielen vergeblichen Versuchen wird man vielleicht auch irgendwann den Logarithmus ausprobieren und nach dem Lemma über die Ableitung der Umkehrfunktion dessen Ableitung ausrechnen: Da die Exponentialfunktion $t = e^u$ ihre eigene Ableitung ist, hat $u = \ln t$ nach diesem Lemma die Ableitung

$$\ln'(t) = \frac{1}{e^u} = \frac{1}{t}\,,$$

also ist in der Tat

$$\int \frac{dt}{t} = \ln t + C\,.$$

Kompliziertere Funktionen müssen – genau wie beim Differenzieren auch – mit geeigneten Rechenregeln auf einfachere zurückgeführt werden. Die meisten Rechenregeln für den Umgang mit Ableitungen haben ihre Entsprechungen für Integrale; wir wollen sie im folgenden kurz durchgehen:

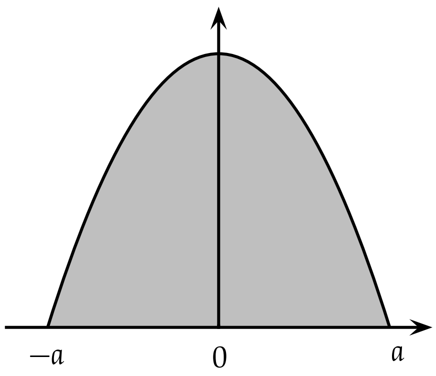
Additionsregel: Für zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ sowie zwei Zahlen a und b hat $h(t) = a \cdot f(t) + b \cdot g(t)$ die Ableitung

$$h'(t) = a \cdot f'(t) + b \cdot g'(t)\,.$$

Also gilt ganz entsprechend auch für die Stammfunktionen

$$\int \bigl(a \cdot f(t) + b \cdot g(t)\bigr)\,dt = a \int f(t)\,dt + b \int g(t)\,dt\,.$$

Als Anwendung berechnen wir die Fläche einer Parabelschablone. Zunächst brauchen wir eine Funktion $u = f(t)$, so daß diese Fläche gleich der Fläche unter dem Graphen von f ist. Die Funktion $f(t) = t^2$, zu deren Darstellung die Schablone dient, ist dazu natürlich nicht geeignet; die Fläche unter dieser Kurve ist im Gegenteil gerade die Fläche, die von der Schablone nicht abgedeckt wird. Statt dessen stellen wir die Schablone mit dem Scheitelpunkt nach oben auf die t-Achse und betrachten die Funktion, die durch ihre Randkurve beschrieben wird.



Wenn die Schablone die Breite $2a$ hat, also den Bereich $-a \le t \le a$ abdeckt, hat sie die Höhe a^2; für die gesuchte Funktion f ist also $f(0) = a^2$. Für $t \ne 0$ fällt $f(t)$ dann quadratisch ab, also ist $f(t) = a^2 - t^2$. Insbesondere ist $f(\pm a) = 0$, wie erwartet. Damit ist die Fläche der Schablone

$$\int_{-a}^{a} (a^2 - t^2)\,dt = a^2 \int_{-a}^{a} dt - \int_{-a}^{a} t^2\,dt = a^2 \cdot t\Big|_{-a}^{a} - \frac{t^3}{3}\Big|_{-a}^{a}$$

$$= a^2 \cdot \big(a - (-a)\big) - \left(\frac{a^3}{3} - \frac{(-a)^3}{3}\right) = \frac{4a^3}{3}\,.$$

Hier, wie auch im folgenden, sei

$$F(t)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\,;$$

dies ist eine in der Integralrechnung recht gebräuchliche Abkürzung.

Partielle Integration: Neben der Additionsregel ist die Leibnizsche Produktregel

$$(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g$$

sicherlich die bekannteste Ableitungsregel. Für die Zwecke der Integralrechnung schreiben wir sie in der Form

$$f(t) \cdot g'(t) = \big(f(t) \cdot g(t)\big)' - f'(t) \cdot g(t)$$

und erhalten sofort durch Integration die neue Regel

$$\int f(t) \cdot g'(t)\,dt = f(t) \cdot g(t) - \int f'(t) \cdot g(t)\,dt\,.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung sieht nicht so aus, als sei sie eine große Vereinfachung der linken, eher im Gegenteil, aber bei geschickter Wahl von f und g läßt sie sich doch oftmals entweder einfacher ausrechnen oder aber der linken Seite so ähnlich machen, daß man dadurch eine verwertbare Beziehung zwischen den beiden Seiten erhält.

Als Beispiel betrachten wir die Stammfunktion von $\cos^2 t$. Mit $f(t) = \cos t$ und $g(t) = \sin t$ ist $f(t) \cdot g'(t) = \cos^2 t$, also

$$\int \cos^2 t\,dt = \cos t \cdot \sin t - \int \sin^2 t\,dt\,.$$

Das ist sicherlich keine Vereinfachung; aber wenn wir auf beiden Seiten das Integral über $\cos^2 t$ addieren und dabei beachten, daß $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ ist, folgt

$$2\int \cos^2 t\,dt = \sin t \cdot \cos t - \int 1\,dt = \sin t \cdot \cos t - t + C\,.$$

Damit ist

$$\int \cos^2 t\,dt = \tfrac{1}{2}\sin t \cdot \cos t - \tfrac{1}{2}t + C^*$$

mit der neuen Integrationskonstanten $C^* = C/2$.

Entsprechend können wir auch die Stammfunktion von $\sin t \cdot \cos t$ bestimmen: Mit $f(t) = g(t) = \sin t$ ist

$$\sin t \cdot \cos t = f(t) \cdot g'(t)\,,$$

also

$$\int \sin t \cdot \cos t\,dt = \sin^2 t - \int \cos t \cdot \sin t\,dt\,.$$

Da links und rechts das gleiche Integral steht, folgt

$$\int \sin t \cdot \cos t\,dt = \tfrac{1}{2}\sin^2 t + C\,.$$

Als eine trickreiche Anwendung der partiellen Integration möchte ich schließlich noch die Stammfunktion des Logarithmus bestimmen. Hier ist die zu integrierende Funktion zwar kein Produkt, aber wir können sie trotzdem auffassen als ein Produkt, dessen einer Faktor gleich eins ist.

Die einfachste Funktion mit Ableitung eins ist $g(t) = t$; mit $f(t) = \ln t$ ergibt sich also nach der Regel zur partiellen Integration

$$\int \ln t \, dt = t \cdot \ln t - \int \left(\frac{1}{t}\right) \cdot t \, dt = t \cdot \ln t - \int dt$$
$$= t \cdot \ln t - t + C = t \cdot (\ln t - 1) + C \,.$$

Substitutionsregel: Die oftmals nützlichste Regel zur Umformung von Integralen entsteht aus der Kettenregel

$$f\big(g(t)\big)' = f'\big(g(t)\big) \cdot g'(t) \,.$$

Wenden wir dies an auf die Stammfunktion $F(t)$ der Funktion $f(t)$ und setzen $t = g(u)$, so folgt

$$f(t) = F'(u) = F'\big(g(u)\big) \cdot g'(u) = f\big(g(u)\big) \cdot g'(u) \,,$$

also

$$\int f(t) \, dt = \int f\big(g(u)\big) \cdot g'(u) \, du \,.$$

Als erstes Beispiel dazu betrachten wir das Integral

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \,.$$

Hauptschwierigkeit ist die Wurzel, wir müssen also versuchen, diese zu eliminieren. Mit der Substitution $t = \sin u$ gelingt das, denn dann ist

$$\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\sin^2 u} = \sqrt{\cos^2 u} = \cos u \,.$$

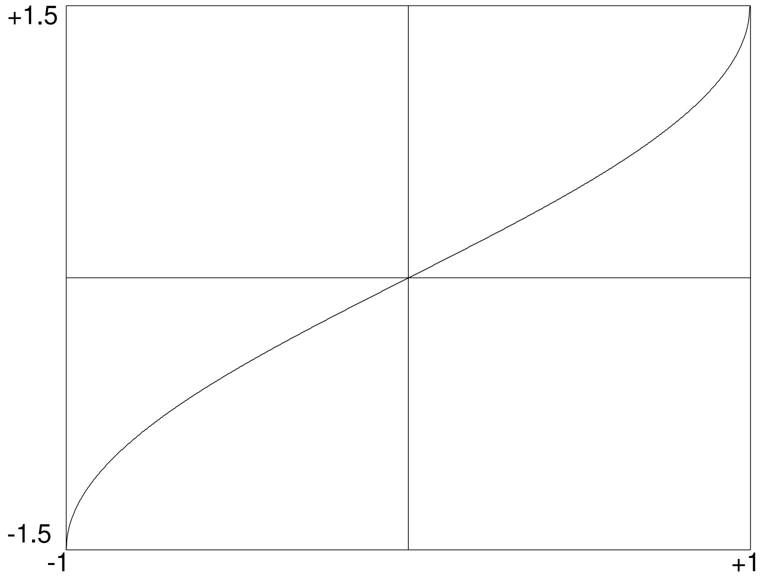
Die Ableitung von $g(u) = \sin u$ ist $g'(u) = \cos u$, nach der Substitutionsregel folgt also

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{\cos u}{\cos u}\, du = \int du = u + C\,.$$

Das ist aber leider noch nicht die endgültige Antwort, denn wir wollen das Ergebnis natürlich als eine Funktion von t haben, nicht als Funktion von u. Nun wissen wir zwar, daß $t = \sin u$ ist, aber wie läßt sich u durch t ausdrücken? Was wir brauchen ist offenbar eine Umkehrfunktion des Sinus. Diese kann nur für Werte zwischen -1 und 1 definiert sein, denn andere Funktionswerte des Sinus gibt es nicht, und auch für diese Werte muß noch festgelegt werden, welches der vielen Urbilder wir nehmen: Schließlich nimmt der Sinus als periodische Funktion jeden Wert unendlich oft an. Im Intervall zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$ allerdings steigt der Sinus monoton an von -1 nach 1, dort gibt es also eine eindeutig bestimmte Umkehrfunktion, und diese bezeichnen wir als Arkussinus, in Formeln $u = \arcsin t$. Die Funktion $u = \arcsin t$ ist also für $-1 \le t \le 1$ erklärt und steigt dort monoton an von $-\pi/2$ bis $\pi/2$. Mit dieser Funktion ist dann schließlich

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C\,.$$

Die Funktion $f(t) = \arcsin t$ ist in der folgenden Zeichnung skizziert; sie ist gerade eine an der ersten Winkelhalbierenden gespiegelte Sinuslinie, eingeschränkt auf den Wertebereich zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$.



Genauso können wir auch das Integral

$$\int \sqrt{1-t^2}\,dt\,.$$

ausrechnen: Natürlich machen wir auch hier wieder die Substitution $t = \sin u$ und erhalten

$$\int \sqrt{1-t^2}\,dt = \int \cos^2 u\,du = \tfrac{1}{2}\sin u \cdot \cos u - \tfrac{1}{2}u + C\,.$$

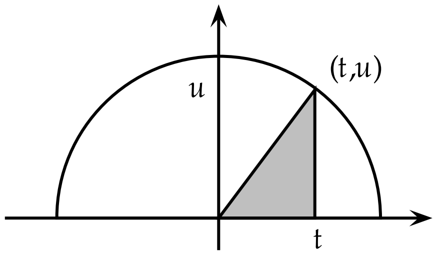
Dabei ist $\sin u = t$ und

$$\cos u = \sqrt{1-\sin^2 u} = \sqrt{1-t^2}\,,$$

im Endergebnis also

$$\int \sqrt{1-t^2}\,dt = \tfrac{1}{2}t \cdot \sqrt{1-t^2} - \tfrac{1}{2}\arcsin t + C\,.$$

Die Kurve $f(t) = \sqrt{1-t^2}$ ist geometrisch betrachtet nichts anderes als ein Halbkreis: Liegt nämlich der Punkt (t,u) auf dem Kreis mit Radius eins um den Nullpunkt des Koordinatensystems, so definieren er zusammen mit dem Ursprung und dem Punkt $(t,0)$ ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten die Längen t und u haben und dessen Hypothenuse ein Radius des Kreises ist, also die Länge eins hat. Nach dem wohl bekanntesten Satz der Mathematik, dem Satz des Pythagoras, ist also $t^2 + u^2 = 1$ oder $u = \pm f(t)$.



Wir können daher den Flächeninhalt eines Halbkreises berechnen als die Fläche unter der Kurve $u = f(t)$ und erhalten

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \tfrac{1}{2}\, t \cdot \sqrt{1-t^2} - \tfrac{1}{2} \arcsin t \bigg|_{-1}^{1}$$
$$= -\tfrac{1}{2}(-\pi/2 - \pi/2) = \pi/2\,,$$

ein beruhigendes Ergebnis. Natürlich hätten wir hier auch gleich das Integral $\int \sqrt{1-t^2}\,dt$ geometrisch ausrechnen können: Die Fläche unter der Kreislinie zwischen Null und t kann zerlegt werden in das oben eingezeichnete rechtwinklige Dreieck und den links daneben liegenden Kreissektor. Das Dreieck hat die Katheten t und $f(t)$, also die Fläche $\frac{1}{2}t \cdot f(t) = \frac{1}{2}t \cdot \sqrt{1-t^2}$, und der Kreissektor hat den Flächeninhalt $\pi \cdot \alpha/2\pi = \alpha/2$, wobei α der (im Bogenmaß angegebene) Öffnungswinkel des Sektors ist. Betrachten wir dessen Komplementärwinkel $\pi/2 - \alpha$ im benachbarten rechtwinkligen Dreieck, so ist dort

$$\cos(\pi/2 - \alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{t}{1} = t\;;$$

da der Cosinus eines Winkels gleich dem Sinus des Komplementärwinkels ist, folgt also, daß $\sin\alpha = t$ und damit $\alpha = \arcsin t$ ist. Die Fläche unter der Kreislinie ist somit

$$\tfrac{1}{2}\,t\cdot\sqrt{1-t^2} + \tfrac{1}{2}\arcsin t\;,$$

so daß in diesem speziellen Fall der ganze Umweg über Integrationsregeln eigentlich überflüssig war.

Das nächste Beispiel soll zeigen, daß auch bei ganz harmlos erscheinenden Integranden ohne Wurzeln die Substitutionsregel oft gute Dienste leisten und anderweitig nicht beherrschbare Integrale auf eine einfache Form zurückführen kann: Betrachten wir

$$F(t) = \int \frac{dt}{1+t^2}\;.$$

Mit Sinus oder Cosinus können wir hier nichts anfangen, denn weder $1 + \sin^2 u$ noch $1 + \cos^2 u$ lassen sich in geeigneter Weise vereinfachen. Probieren wir es aber mit dem Tangens, so erhalten wir mit $t = \tan u$

$$1 + \tan^2 u = 1 + \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} = \frac{\cos^2 u + \sin^2 u}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u}\;,$$

d.h.

$$\frac{1}{1+\tan^2 u} = \cos^2 u\,;$$

der schwer handhabbare Nenner ist also verschwunden. Besser noch:

$$\tan' u = \frac{\cos u \cdot \sin' u - \sin u \cdot \cos' u}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u}\,,$$

also folgt sogar, daß

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \int \cos^2 u \cdot \frac{1}{\cos^2 u}\, du = \int du = u + C\,.$$

Um dies durch t ausdrücken zu können, brauchen wir eine Umkehrfunktion des Tangens; da Tangens zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$ monoton von minus Unendlich nach Unendlich ansteigt, gibt es eine solche Umkehrfunktion, die für beliebige reelle Zahlen definiert ist und diese auf Zahlen zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$ abbildet. In völliger Analogie zum Arkussinus wird diese Funktion als Arkustangens bezeichnet, in Zeichen $u = \arctan t$. Damit ist

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + C\,.$$

Schließlich möchte ich noch auf eine wichtige spezielle Anwendung der Kettenregel hinweisen, die

Logarithmische Ableitung: Für eine Funktion $f(t)$, die nur positive Werte annimmt, können wir die neue Funktion $g(t) = \ln f(t)$ betrachten, für die nach der Kettenregel

$$g'(t) = \frac{1}{f(t)} \cdot f'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

ist. Daher ist

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = \ln f(t) + C\,.$$

Als Anwendung können wir beispielsweise den Tangens integrieren, denn

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = -\frac{\cos' t}{\cos t}\,,$$

und damit ist

$$\int \tan t\,dt = -\ln\cos t + C\,.$$

Als weitere Anwendung der logarithmischen Ableitung betrachten wir noch einmal das Malthussche Wachstumsgesetz $f'(t) = \gamma \cdot f(t)$, das sich auch in der Form

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \gamma$$

als logarithmische Ableitung schreiben läßt. Integration beider Seiten führt zu

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = \int \gamma\,dt = \gamma \cdot t + C$$

oder

$$\ln f(t) = \gamma \cdot t + C\,,$$

also

$$f(t) = e^{\gamma \cdot t + C} = e^{C} \cdot e^{\gamma \cdot t}$$

mit $e^C = f(0)$. Damit haben wir einen neuen Zugang zu Satz 2.1 gefunden.

Nachdem wir so wieder zu Wachstumsgesetzen zurückgekehrt sind, wollen wir endlich die bereits zu Beginn des Paragraphen aufgestellte Gleichung

$$f'(t) = \gamma \cdot f(t) \cdot \big(M - f(t)\big)$$

für das logistische Wachstum integrieren. Wir wissen bereits aus Lemma 4.1, daß für die Umkehrfunktion $t = g(u)$ von $u = f(t)$ gilt

$$g'(u) = \frac{1}{f'(u)} = \frac{1}{\gamma \cdot u \cdot (M - u)},$$

also ist

$$g(u) = \int \frac{du}{\gamma \cdot u \cdot (M - u)},$$

und wir müssen dieses Integral ausrechnen. Der Nenner ist im wesentlichen gerade der Hauptnenner von $1/u$ und $1/(M - u)$, es liegt also nahe, den Integranden als Summe zweier Brüche mit Nenner u und $M - u$ zu schreiben, denn die können wir integrieren. In der Tat ist

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{M - u} = \frac{M}{u \cdot (M - u)}$$

und somit

$$\frac{1}{\gamma \cdot u \cdot (M - u)} = \frac{1}{\gamma M}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{M - u}\right).$$

Das können wir integrieren:

$$\begin{aligned} g(u) &= \frac{1}{\gamma M}\Big(\int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{M-u}\Big) \\ &= \frac{1}{\gamma M}\big(\ln u - \ln(M-u)\big) + C\,, \end{aligned}$$

denn die Ableitung von $\ln(M-u)$ ist $-1/(M-u)$. Nach der bekannten Regel $\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$ läßt sich dies weiter vereinfachen zu

$$\begin{aligned} g(u) &= \frac{1}{\gamma M}\cdot \ln\frac{u}{M-u} + C = -\frac{1}{\gamma M}\cdot\ln\frac{M-u}{u} + C \\ &= -\frac{1}{\gamma M}\cdot\ln\Big(\frac{M}{u} - 1\Big) + C\,. \end{aligned}$$

Diese Gleichung müssen wir nach $u = f(t)$ auflösen: Aus der gerade berechneten Beziehung

$$t = g(u) = -\frac{1}{\gamma M}\cdot\ln\Big(\frac{M}{u} - 1\Big) + C$$

folgt zunächst, daß

$$-\gamma M\cdot t - C = \ln\Big(\frac{M}{u} - 1\Big)$$

ist; Anwendung der Exponentialfunktion auf beide Seiten führt zu

$$e^{-\gamma M\cdot t - C} = \frac{M}{u}\,,$$

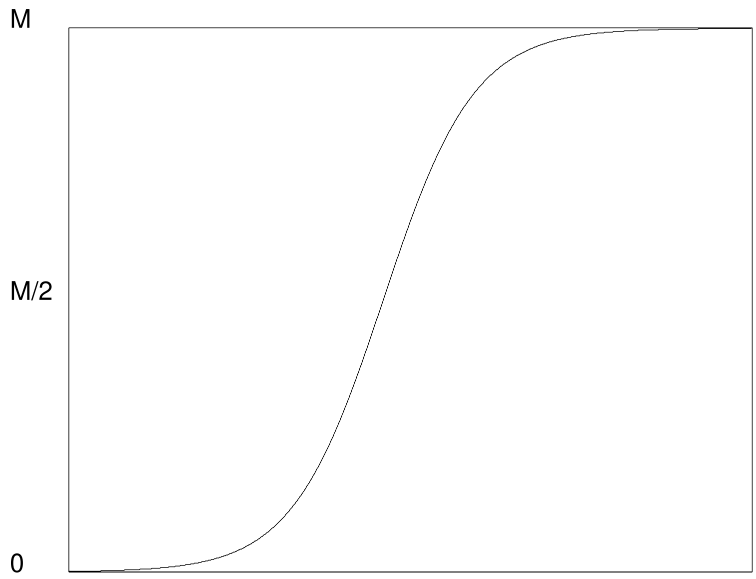
und daraus schließlich erhält man sofort die gesuchte Gleichung für $f(t)$:

$$u = f(t) = \frac{m}{1 + \alpha\, e^{-\gamma M\cdot t}}\,,$$

wobei $\alpha = e^C$ etwa aus der Beziehung

$$f(0) = \frac{m}{1+\alpha} \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{M}{f(0)-1}$$

bestimmt werden kann.



Da der Graph von f eine S-förmige Gestalt hat, wird er oft als *sigmoide* Kurve bezeichnet, auch wenn die Gestalt nichts mit dem kleinen oder großen griechischen Sigma, mit σ oder Σ also, zu tun hat. Kurven mit ungefähr dieser Gestalt werden in der Tat häufig beobachtet, etwa bei der Entwicklung der Bevölkerungszahlen in den USA zwischen 1790 und 1950, wo der relative Fehler immer deutlich unter fünf Prozent bleibt.

Auch bei Erneuerungsprozessen werden sigmoide Kurven oft beobachtet; ist etwa $f(t)$ = Prozentsatz aller in Frage kommender Personen oder Firmen, die zum Zeitpunkt t bereits eine technische oder sonstige Neuerung eingeführt haben, so genügt auch $f(t)$ näherungsweise einer logistischen Gleichung. Dies erscheint plausibel, denn ein potentieller Anwender erfährt von der Neuerung im Gespräch mit jemandem, der sie schon eingeführt hat; es gibt am Anfang also um so mehr Zuwachs bei $f(t)$ je größer $f(t)$ ist. Andererseits kann ein Prozentsatz nie größer als 100 werden, so daß die Steigerungsrate gegen Null gehen muß, wenn sich $f(t)$ der 100%-Grenze nähert. Daher ist

$$f'(t) = \alpha \cdot f(t) \cdot \big(100 - f(t)\big)$$

in der Tat eine plausible Modellannahme. Vergleiche zwischen diesem Modell und tatsächlichen Erneuerungsprozessen findet man etwa bei
C.T. FISCHER, R.H. PRY: A simple substitution model of technological change, *Technological Forecasting and Social Changes* **3** (1971), 75–88.

Zum Abschluß dieses Paragraphen können wir uns noch überlegen, ab wann sich das Bevölkerungswachstum beim logistischen Modell vermindert. Das Bevölkerungswachstum selbst ist gegeben durch $f'(t)$, seine Steigerungsrate also durch die Ableitung von $f'(t)$, d.h. durch die zweite Ableitung $f''(t)$ von $f(t)$. Leiten wir die logistische Gleichung

$$f'(t) = \gamma \cdot f(t) \cdot \big(M - f(t)\big)$$

ab, so erhalten wir nach der Produktregel

$$\begin{aligned} f''(t) &= \gamma \cdot f'(t) \cdot \big(M - f(t)\big) - \gamma \cdot f(t) \cdot f'(t) \\ &= \gamma \cdot f'(t) \cdot \big(M - 2f(t)\big) \,. \end{aligned}$$

Da $f'(t)$ stets größer oder gleich Null ist, nimmt die Steigerungsrate daher ab, sobald $M - 2f(t) < 0$ ist, sobald also die Population ihre halbe Maximalgröße erreicht hat.

§5: Überexponentielles Wachstum

So gut die logistische Gleichung auch das Wachstum der amerikanischen Bevölkerung zwischen 1790 und 1950 beschreibt, für die Weltbevölkerung gibt sie kein realistisches Modell, denn diese wächst immer noch *schneller* als exponentiell. Dies sieht man insbesondere auch an den immer kürzer werdenden Verdoppelungszeiten. Wie läßt sich das erklären?

Eine Möglichkeit wäre, daß das Zusammenleben von Menschen nicht nur zu Streß führt und dazu, daß sie sich Resourcen wegnehmen, sondern auch zu vermehrtem Informationsaustausch, der sich in wissenschaftlichem Fortschritt niederschlägt und dafür sorgt, daß die maximal mögliche Zahl von Menschen, die die Erde ernähren kann, immer weiter ansteigt. Als einfaches Modell dafür haben die Autoren Heinz von Foerster, Patricia M. Mora und Lawrence W. Amiot, allesamt Elektrotechniker an der University of Illinois in Urbana, 1960 ein beschleunigtes Malthussches Wachstum der Form

$$f'(t) = \gamma \cdot f(t)^r \qquad \text{mit } r > 1 \text{ und } \gamma > 0$$

vorgeschlagen. (Siehe dazu ihre Arbeit in Science **138**, November 1960, Seite 1291–1295.)

Auch diese Gleichung läßt sich auf ein einfache Integrationsaufgabe zurückführen, wenn wir wieder anstelle von $u = f(t)$ die Umkehrfunktion $t = g(u)$ betrachten. Für diese ist nach Lemma 4.1

$$g'(u) = \frac{1}{f'(t)} = \frac{1}{\gamma \cdot u^r} = \frac{u^{-r}}{\gamma} .$$

Dies läßt sich problemlos integrieren zu

$$t = g(u) = \frac{1}{\gamma}\frac{u^{1-r}}{1-r} + C .$$

Auflösen nach u^{1-r} führt auf

$$u^{1-r} = \gamma \cdot (1-r) \cdot (t - C)$$

oder

$$u^{r-1} = \frac{1}{\gamma \cdot (r-1) \cdot (C-t)} ,$$

wobei die zweite Form vorzuziehen ist, denn $r - 1$ ist positiv. Also ist

$$u = f(t) = \frac{1}{\big(\gamma \cdot (r-1)\big)^{\frac{1}{1-r}}} \cdot \frac{1}{(C-t)^{\frac{1}{r-1}}} = \frac{\beta}{(C-t)^s}$$

mit

$$\beta = \frac{1}{\big(\gamma \cdot (r-1)\big)^{\frac{1}{r-1}}} \quad \text{und} \quad s = \frac{1}{r-1} > 0 .$$

Die Integrationskonstante C kann auch hier wieder aus dem Anfangswert für die Zeit $t = 0$ berechnet werden, viel interessanter ist es aber, die Zeit $t = C$ zu betrachten: Je näher t an C herankommt, desto kleiner wird der Nenner, desto größer also der Bruch, und für $t = C$ wird der Nenner Null, $f(t)$ also Unendlich! Zum Zeitpunkt $t = C$ hat die Weltbevölkerung also jede beliebige Grenze überschritten und stirbt wohl aus, da sich die Menschen gegenseitig zu Tode quetschen.

Wie weit ist es noch bis zum Zeitpunkt $t = C$? Die beste Übereinstimmung mit den bekannten Daten zur Bevölkerungsentwicklung erhält man (mit Methoden, die weiter hinten in §8 dargestellt sind) für

$$\begin{aligned} \beta &= (179 \pm 14) \cdot 10^9 \\ s &= 0{,}990 \pm 0{,}009 \\ C &= 2026{,}87 \pm 5{,}5 \text{Jahre} \\ r &= 2{,}01 \pm 0{,}009\,, \end{aligned}$$

die Menschheit wächst also ungefähr nach dem Wachstumsgesetz

$$f'(t) = \gamma \cdot f(t)^2\,.$$

Die Zeit ist bei obigen Zahlen in üblicher Jahreszählung angegeben, der Zeitpunkt, zu dem die Menschheit Unendlich wird, liegt also im Jahr 2026. Wir können ihn noch etwas genauer bestimmen (soweit das bei einer Fehlertoleranz von fünfeinhalb Jahren sinnvoll ist): 0,87 Jahre sind 317,55 Tage, und 0,55 Tage sind 13,2 Stunden; die Katastrophe passiert also gegen 13^{12} Uhr am 317. Tag des Jahres 2026. Dieser Tag liegt offensichtlich im November; da es bis einschließlich Oktober fünf Monate mit 31 und einen mit 28 Tagen gibt, haben Januar bis Oktober zusammen 303 Tage, der

317. Tag des Jahres ist also der 13. November. Wenn wir im Kalender des Jahres 2026 nachschauen, sehen wir, daß dies ein Freitag ist; falls das hier betrachtete Modell richtig ist, wird dieser Freitag der dreizehnte also wirklich ein Unglückstag sein, und dementsprechend hat die oben zitierte Arbeit, in der diese Zahlen berechnet wurden, auch den Titel *„Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026“*.

Wie realistisch ist dieses Modell? Die bisherigen Bevölkerungszahlen stimmen sehr gut mit den Werten von $f(t)$ überein; bei der graphischen Darstellung in der gerade zitierten Arbeit sieht man kaum Abweichungen. Mehr noch: Selbst wenn man neuere Bevölkerungszahlen ignoriert und nur mit alten rechnet, kommt man auf ungefähr die gleichen Zahlen: Ein Wissenschaftler zur Zeit Karls des Großen hätte mit der hier dargestellten Theorie und den (ihm sicherlich unbekannten) Bevölkerungszahlen bis hin zu seiner Zeit ein ähnliches C mit einer Genauigkeit von ± 150 Jahren berechnen können. Zur Zeit von Elisabeth I. schrumpfte die Ungewißheit auf ± 55 Jahre, und zur Zeit Napoleons schließlich hätte man aufgrund der Bevölkerungszahlen bis zur damaligen Zeit die Genauigkeit auf ± 15 Jahre steigern können und damit voraussagen, daß die Weltbevölkerung im Jahr 1994 noch endlich ist.

Trotzdem rechnet natürlich niemand ernsthaft damit, daß die Weltbevölkerung in knapp 25 Jahren unendlich groß sein wird: Die Annahmen dieses Modells müssen schon deshalb bald falsch werden, weil das Zeitintervall, innerhalb dessen sich die Menschheit verdoppelt, aus biologischen Gründen nicht beliebig klein werden kann; nach obiger Formel müßte es am frühen Nachmittag des 13. Novembers 2026 aber ziemlich schnell von Zehntelsekunden auf Millionstelsekunden und dann immer noch weiter sinken. So gut das Modell also die Vergangenheit beschreibt: In der nächsten Zukunft *müssen* die gemachten Modellannahmen falsch werden – so sie es nicht bereits sind; die zitierte Arbeit berücksichtigte nur Daten bis 1958, und ich habe die angegebene Formel nicht mit neueren Daten verglichen. Sicher ist jedenfalls, daß die Formel nicht bis ins Jahr 2026 hinein stimmen kann.

Auch wenn die Bevölkerungszahl eine gewisse Mindestgröße unterschreitet lassen sich die Modellannahmen nicht mehr rechtfertigen und die Formel wird in der Tat falsch. Wenn man etwa ausrechnet, zu welchem Zeitpunkt $f(t) = 1$ war, wann also der erste Mensch lebte, so kommt man auf einen Zeitpunkt vor etwa 200 Milliarden Jahren. Selbst wenn es diesen Zeitpunkt gegeben haben sollte (die gängigen kosmologischen Theorien sprechen dagegen), gab es damals ganz sicher weder eine Erde noch eine Bevölkerung darauf.

§6: Chaotische Dynamik

So verschieden die bislang betrachteten Wachstumsmodelle auch waren, eines hatten alle drei gemeinsam: Für jeden Zeitpunkt t (im Falle des überexponentiellen Wachstums allerdings nur bis zum Augenblick der Katastrophe am Freitag, dem 13. November 2026) konnten wir mit relativ geringem Aufwand den Funktionswert $f(t)$ berechnen und damit eine Voraussage für die Bevölkerungszahlen zur Zeit t machen – was immer die auch mit der Realität zu tun haben mag. In diesem Paragraphen soll es nun um ein Wachstumsmodell gehen, bei dem dies *nicht* mehr möglich ist:

Ausgangspunkt ist wieder das Wachstum nach der logistischen Gleichung

$$f'(t) = \gamma \cdot f(t) \cdot \big(M - f(t)\big) ,$$

allerdings betrachten wir nun eine Population, die sich nur zu bestimmten diskreten Zeitpunkten verändert. Als Beispiele dafür können wir uns Tierpopulationen vorstellen, deren Brunft- und damit auch Gebärperiode jedes Jahr (ungefähr) zur gleichen Zeit liegt; experimentelle Daten gibt es allerdings weniger für balzende Hirsche als für gewisse Insektenarten, die sich ebenfalls an einen Jahresrythmus halten.

Für das Wachstumsverhalten solcher Populationen ist nicht mehr die Funktion $f(t)$ für beliebiges t relevant, sondern nur noch die Funktionswerte zu Beginn jeder Vermehrungsperiode. Deshalb genügt es, wenn wir anstelle der Funktion $f(t)$ nur noch die Funktionswerte $f_n = f(n \cdot \Delta t)$ zu diskreten Zeiten betrachten; Δt ist dabei das Zeitintervall, das zwischen zwei Vermehrungsperioden liegt, in den bisherigen Beispielen also ein Jahr.

Weiter ist es nicht mehr sinnvoll, die Ableitung $f'(t)$ zu betrachten: Außerhalb der Vermehrungsperioden ist diese negativ (wegen der Sterbefälle, die sich im allgemeinen nicht an einen Jahresrythmus halten), und innerhalb einer Vermehrungsperiode gibt es einen mehr oder weniger plötzlichen Sprung, bei dem es für die Berechnung von f_{n+1} aus f_n auch nicht darauf ankommt, wie steil er ist, d.h. also, wie groß $f'(t)$ ist. Sinnvoll und relevant ist nur die Veränderung von f innerhalb des gesamten Zeitraums der Länge Δt, also müssen wir die logistische Gleichung ersetzen durch die neue Gleichung

$$\frac{f_{n+1} - f_n}{\Delta t} = \gamma \cdot f_n \cdot (M - f_n) \,.$$

Auflösen nach f_{n+1} führt auf die Gleichung

$$f_{n+1} = f_n + \gamma \cdot f_n \cdot (M - f_n) \cdot \Delta t = \gamma \cdot \Delta t \cdot f_n \cdot \left(M + \tfrac{1}{\gamma \cdot \Delta t} - f_n\right) .$$

Eine solche Beziehung zwischen f_{n+1} und f_n heißt *diskretes dynamisches System;* wir wollen in diesem Paragraphen sehen, was sich über ein solches System aussagen läßt.

Bevor wir mit dieser Gleichung im Detail rechnen, empfiehlt es sich allerdings, sie etwas zu vereinfachen und insbesondere die vielen darin auftretenden Konstanten auf ein überschaubares Maß zu reduzieren. Mit etwas Probieren findet man, daß dies in der Tat möglich ist, wenn man anstelle von f_n den dazu proportionalen Wert

$$x_n = \frac{f_n}{M + \frac{1}{\gamma \cdot \Delta t}}$$

betrachtet, aus dem sich umgekehrt f_n jederzeit wieder mittels der Formel

$$f_n = x_n \cdot \left(M + \tfrac{1}{\gamma \cdot \Delta t}\right)$$

zurückgewinnen läßt. Für x_n wird die obige Gleichung zu

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \frac{f_{n+1}}{M + \frac{1}{\gamma \cdot \Delta t}} &= \gamma \cdot \Delta t \cdot f_n \cdot \left(1 - \frac{f_n}{M + \frac{1}{\gamma \cdot \Delta t}}\right) \\ &= \gamma \cdot \Delta t \cdot \left(M + \tfrac{1}{\gamma \cdot \Delta t}\right) \cdot x_n \cdot (1 - x_n)\,, \end{aligned}$$

d.h. also zu

$$x_{n+1} = a \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$$

mit

$$a = \gamma \cdot \Delta t \cdot \left(M + \tfrac{1}{\gamma \cdot \Delta t}\right) = \gamma \cdot \Delta t \cdot M + 1\,.$$

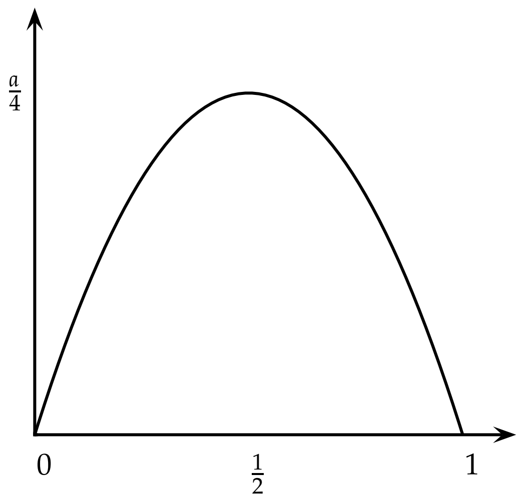
Insbesondere ist damit $a \geq 1$. Der Maximalwert M für $f(t)$ entspricht der Schranke

$$\frac{M}{M + \frac{1}{\gamma \cdot \Delta t}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\gamma \cdot \Delta t \cdot M}} = \frac{\gamma \cdot \Delta t \cdot M}{1 + \gamma \cdot \Delta t \cdot M} = \frac{a - 1}{a} = 1 - \frac{1}{a}\,.$$

Um ein Bild für den Zusammenhang zwischen f_n und f_{n+1} zu bekommen, betrachten wir zunächst die Funktion

$$g(x) = a \cdot x \cdot (1 - x)\,,$$

für die $x_{n+1} = g(x_n)$ ist; wir interessieren uns nur für den Fall, daß $a \geq 1$ ist. g hat Nullstellen bei $x = 0$ und $x = 1$, und die Ableitung $g'(x) = a \cdot (1 - 2x)$ verschwindet bei $x = \frac{1}{2}$, wo $g(x)$ seinen Maximalwert $g(\frac{1}{2}) = \frac{a}{4}$ annimmt. Damit erhalten wir folgendes Bild:



Daran sehen wir, daß $g(x)$ für x-Werte aus der Umgebung von $\frac{1}{2}$ größer als eins werden kann, falls a größer als vier ist. Wenn aber erst einmal ein $x_n > 1$ auftritt, ist x_{n+1} negativ, und damit auch alle folgenden x_m. Zur Modellierung des Wachstumsverhaltens einer Population sind negative Werte natürlich nicht geeignet; wir beschränken uns daher im folgenden auf den Fall $a \leq 4$. Dann ist $a/4 \leq 1$, das Intervall $0 \leq x \leq 1$ wird also von g in sich selbst abgebildet.

Wie soll man sich nun eine „Lösung“ der Gleichung

$x_{n+1} = a \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$ vorstellen? Bei den bisherigen Wachstumsmodellen mit einer kontinuierlichen Funktion $f(t)$ war die Lösung eine Formel, mittels derer sich $f(t)$ aus t und einem gegebenen Anfangswert $f(t_0)$ berechnen ließ. Entsprechend sollte man hier eine Formel erwarten, die x_n als Funktion von n und x_0 ausdrückt; beispielsweise wäre die Gleichung $y_{n+1} = b \cdot y_n$ in diesem Sinne gelöst durch $y_n = b^n \cdot y_0$. In unserem Fall, wie in den meisten anderen Fällen mit einem nichtlinearen Zusammenhang zwischen x_{n+1} und x_n, gibt es leider keine einfache Formel dieser Art: Zwar läßt sich jedes einzelne x_n als Polynom in a und x_0 schreiben, aber diese Polynome werden sehr schnell viel groß und unhandlich: Das für x_5 hat bereits 293 Summanden, das für x_6 gar 1237. Es ist klar, daß man x_6 unter solchen Bedingungen viel schneller ausrechnen kann, wenn man einfach anhand der Gleichung nacheinander $x_1, x_2, \ldots, x_6$ berechnet – in diesem Sinne ist die Gleichung also bereits ihre eigene „Lösung“. Trotzdem wollen wir natürlich wenn möglich einige Gesetzmäßigkeiten erkennen, insbesondere für das Langzeitverhalten des Systems.

Beim kontinuierlichen logistischen Wachstum war eines der wesentlichen Ergebnisse, daß sich die Bevölkerungszahl asymptotisch dem konstanten Wert $f(t) = M$ annähert; das entspräche hier, wie wir oben gesehen haben, dem Wert $\hat{x} = 1 - \frac{1}{a}$. Für diesen gilt in der Tat, daß mit $x_n = \hat{x}$ auch $x_{n+1} = \hat{x}$ ist, denn

$$g(\hat{x}) = a \cdot \hat{x} \cdot (1 - \hat{x}) = a \cdot \hat{x} \cdot \frac{1}{a} = \hat{x}\,.$$

Umgekehrt ist $x = \hat{x}$ auch neben dem uninteressanten Fall $x = 0$ die einzige Lösung von $g(x) = x$. Die Lösungen der

Gleichung $g(x) = x$ bezeichnen wir als *Fixpunkte* des Systems $x_{n+1} = g(x_n)$, denn wenn x_n gleich einem dieser Fixpunkte ist, gilt das gleiche auch für jedes x_m mit $m > n$.

Ein solcher Fixpunkt muß aber nicht unbedingt etwas bedeuten für ein System: Zwar bleibt x_n für alle folgenden Zeiten konstant sobald erst einmal ein Fixpunkt erreicht ist, aber daraus folgt nicht, daß sich das System jemals dem Fixpunkt annähern wird: Wenn wir etwa den Fixpunkt $x = 0$ betrachten, so ist für kleine positive Werte von x

$$g(x) = a \cdot x - a \cdot x^2 \approx a \cdot x$$

größer als x, da $a > 1$; falls also ein Wert x_n in der Nähe des Fixpunkts $x = 0$ liegt, liegt x_{n+1} weiter von der Null entfernt als x_n, die x_n können sich also nicht asymptotisch der Null nähern.

Um solche Fälle auszuschließen definieren wir

DEFINITION: *Ein Fixpunkt $\hat{x}$ des Systems $x_{n+1} = g(x_n)$ heißt* stabil *oder* anziehend, *wenn für jede hinreichend kleine Störung u gilt: Ist $x_n = \hat{x} + u$, so ist*

$$|x_{n+1} - \hat{x}| < |x_n - \hat{x}| = |u| \,.$$

Der Fixpunkt heißt instabil *oder* abstoßend, *wenn statt dessen*

$$|x_{n+1} - \hat{x}| > |x_n - \hat{x}| = |u|$$

für jede solche Störung.

In diesem Sinne ist oben der Nullpunkt ein abstoßender Fixpunkt des Systems: Auch beim diskreten logistischen Wachstum wird sich eine kleine Bevölkerung vermehren statt auszusterben.

Für die praktische Anwendung eines Modells sind nur stabile Fixpunkte interessant, denn mathematische Modelle beschreiben die Wirklichkeit meist nur näherungsweise, so daß ein Fixpunkt nur einer *ungefähr* gleichbleibenden Bevölkerungszahl entspricht. Im Falle eines stabilen Fixpunkts sind diese Schwankungen nicht so schlimm, da sie durch die Dynamik des Systems gedämpft werden. Im Falle eines abstoßenden Fixpunkts dagegen werden sie verstärkt und schaukeln sich so weit auf, daß x_n aus der Umgebung des Fixpunkts verschwindet.

Als einfaches kontinuierliches Analogon für stabile und instabile Fixpunkte kann man sich eine kleine Kugel vorstellen, die entweder oben auf oder unten in einer großen Kugel liegt:

Nach den Gesetzen der Mechanik ist die kleine Kugel in beiden Fällen in einer Gleichgewichtslage, aber nur eine der beiden Gleichgewichtslagen ist stabil.

Zurück zu unserem System! Wir wissen bereits, daß der Fixpunkt Null instabil ist; wie sieht es aus mit $\hat{x} = 1 - \frac{1}{a}$? Für $x_n = \hat{x} + u$ ist

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= g(x_n) = g(\hat{x} + u) = a \cdot (\hat{x} + u) \cdot (1 - \hat{x} - u) \\ &= a \cdot \hat{x}(1 - \hat{x}) - a \cdot \hat{x} \cdot u + a \cdot u \cdot (1 - \hat{x} - u) \\ &= \hat{x} - a \cdot u \cdot (\hat{x} - 1 + \hat{x} + u) \\ &= \hat{x} - a \cdot u \cdot (2\hat{x} - 1 + u) \\ &= \hat{x} - a \cdot u \cdot (2 - \tfrac{2}{a} - 1 + u) = \hat{x} - u \cdot (a - 2 + u) \\ &= \hat{x} - u \cdot (a - 2) + u^2 \,. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$|x_{n+1} - \hat{x}| = |a - 2| \cdot |u| + u^2 \,.$$

Für kleine Werte von u kann u^2 vernachlässigt werden; dann ist also die Stabilitätsbedingung genau dann erfüllt, wenn $|a - 2|$ kleiner als eins ist oder $1 < a < 3$. Für diese Parameterwerte ist somit $\hat{x}$ ein stabiler Fixpunkt, und wie Computersimulationen zeigen (und man auch mathematisch beweisen kann), geht x_n für *praktisch* jeden Anfangswert x_0 gegen $\hat{x}$. Das Wort *praktisch* soll hier nicht weiter präzisiert werden; ich möchte nur darauf hinweisen, daß der Anfangswert $x_0 = 0$ ein (wenn auch instabiler) Fixpunkt ist, so daß in diesem Fall $x_n = 0$ sein muß für alle n.

Für $a > 3$ ist $\hat{x}$ natürlich immer noch ein Fixpunkt, aber da er instabil ist, hat er keine große Bedeutung mehr für die Dynamik unseres Systems. Da auch der zweite Fixpunkt $x = 0$ instabil ist, gibt es also keine Möglichkeit mehr, daß sich x_n für große n einem Grenzwert annähert. Welche sonstigen Möglichkeiten gibt es? Die einfachste noch verbleibende Möglichkeit wäre, daß x_n periodisch zwischen zwei oder mehreren Punkten wechselt; in einem solchen Fall sprechen wir von einem *Zyklus:*

DEFINITION: *Ein p-Zyklus von $x_{n+1} = g(x_n)$ ist eine Folge $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_p$, so daß*

$$g(\hat{x}_1) = \hat{x}_2, \quad g(\hat{x}_2) = \hat{x}_3, \ldots, \quad g(\hat{x}_p) = \hat{x}_1$$

ist.

Wenn wir die Funktion g auf einen der Punkte aus dem Zyklus p-mal hintereinander anwenden, wird dieser wieder auf sich selbst abgebildet; die $\hat{x}_i$ sind also Fixpunkte der p-fach iterierten Abbildung. Diese bezeichnen wir mit $g_{(p)}(x)$, d.h.

$$g_{(p)}(x) = g\Big(g\big(\ldots\big(g(x)\big)\ldots\big)\Big),$$

wobei g auf der rechten Seite genau p-mal auftritt. Da die $\hat{x}_i$ somit Fixpunkte von $g_{(p)}$ sind, können wir von Stabilität sprechen; wir nennen den p-Zyklus *stabil,* wenn alle $\hat{x}_i$ stabile Fixpunkte von $g_{(p)}$ sind.

Für größere Werte von p wird es schnell unhandlich, $g_{(p)}(\hat{x} + u)$ so wie oben explizit auszurechnen. Zum Glück ist das aber auch nicht nötig: Für kleine Werte von u, und nur um solche geht es ja, ist

$$g_{(p)}(\hat{x} + u) \approx g_{(p)}(\hat{x}) + u \cdot g'_{(p)}(\hat{x}),$$

ist also $x_n = \hat{x} + u$, so ist

$$|x_{n+1} - \hat{x}| \approx |g'_{(p)}(\hat{x})| \cdot |u| = |g'_{(p)}(\hat{x})| \cdot |x_n - \hat{x}|$$

genau dann kleiner als $|x_n - \hat{x}|$, wenn $|g'_{(p)}(\hat{x})| < 1$ ist.

Wie sieht das im konkreten Fall unseres Systems aus? Beginnen wir mit Zweierzykeln; diese entsprechen Fixpunkten von $g_{(2)}$, also Nullstellen von $g_{(2)}(x) - x$, und die wollen wir nun ausrechnen. Zwei offensichtliche Lösungen kennen wir schon: Die beiden Fixpunkte von g sind natürlich erst recht Fixpunkte von $g_{(2)}(x) = g\big(g(x)\big)$, wir können also versuchen, $g(x) - x$ auszuklammern, um so zu einer handlicheren Gleichung zu kommen:

$$\begin{aligned}
g_{(2)}(x) - x &= a \cdot g(x)\big(1 - g(x)\big) - x \\
&= a \cdot g(x)\big(1 - g(x)\big) - a \cdot x \cdot \big(1 - g(x)\big) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + a \cdot x \cdot \big(1 - g(x)\big) - x \\
&= a \cdot \big(g(x) - x\big)\big(1 - g(x)\big) + a \cdot x - a \cdot x \cdot g(x) - x \\
&= a \cdot \big(g(x) - x\big)\big(1 - g(x)\big) + \underline{a \cdot x} - \underline{x} \\
&\qquad - a \cdot x \cdot \big(g(x) - x\big) - \underline{a \cdot x^2} \\
&= a \cdot \big(g(x) - x\big)\big(1 - g(x)\big) + \underline{\big(g(x) - x\big)} \\
&\qquad - a \cdot x \cdot \big(g(x) - x\big) \\
&= \big(g(x) - x\big)\Big(a \cdot \big(1 - g(x)\big) + 1 - a \cdot x\Big).
\end{aligned}$$

Dabei entspricht der erste Faktor wie gesagt den beiden Fixpunkten von g; uns interessieren also nur die Nullstellen des zweiten. Dieser wird voll ausgeschrieben zu

$$\begin{aligned}
& a - a \cdot g(x) + 1 - a \cdot x \\
&= a - a \cdot (a \cdot x - a \cdot x^2) + 1 - a \cdot x \\
&= a^2 \cdot x^2 - (a^2 + a) \cdot x + 1 + a \\
&= a^2 \left(x^2 - (1 + \tfrac{1}{a}) \cdot x + \tfrac{1}{a^2} + \tfrac{1}{a}\right) .
\end{aligned}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für x, von der wir nachrechnen müssen, für welche Werte von a sie reelle Lösungen hat.

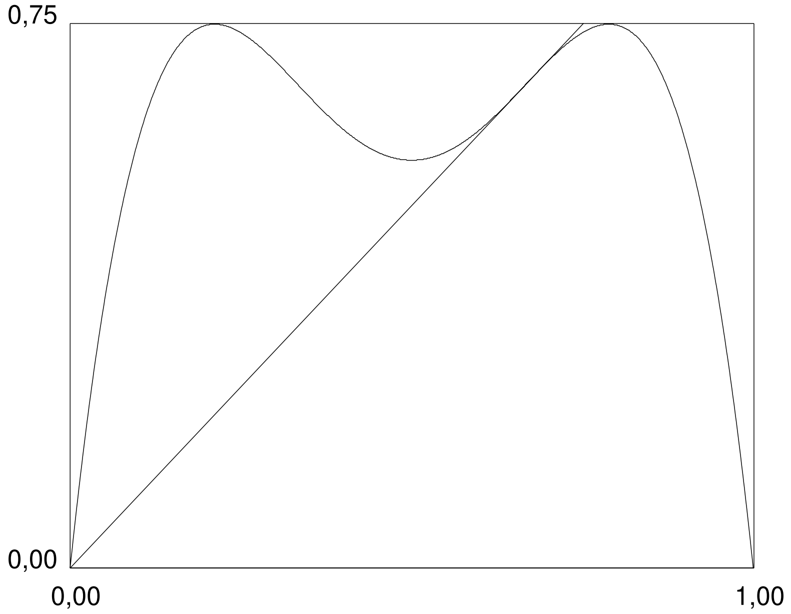
Nach der allgemeinen Lösungsformel für quadratische Gleichungen sind die beiden Lösungen

$$\begin{aligned}
x_{1/2} &= \tfrac{1}{2} \cdot \left(1 + \tfrac{1}{a}\right) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} \cdot \left(1 + \tfrac{1}{a}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{a^2} + \tfrac{1}{a}\right)} \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot \left(1 + \tfrac{1}{a}\right) \pm \tfrac{1}{4a}\sqrt{(a+1)^2 - 4 \cdot (a+1)} \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot \left(1 + \tfrac{1}{a}\right) \pm \tfrac{1}{4a}\sqrt{a^2 - 2a - 3} \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot \left(1 + \tfrac{1}{a}\right) \pm \tfrac{1}{4a}\sqrt{(a+1)(a-3)} .
\end{aligned}$$

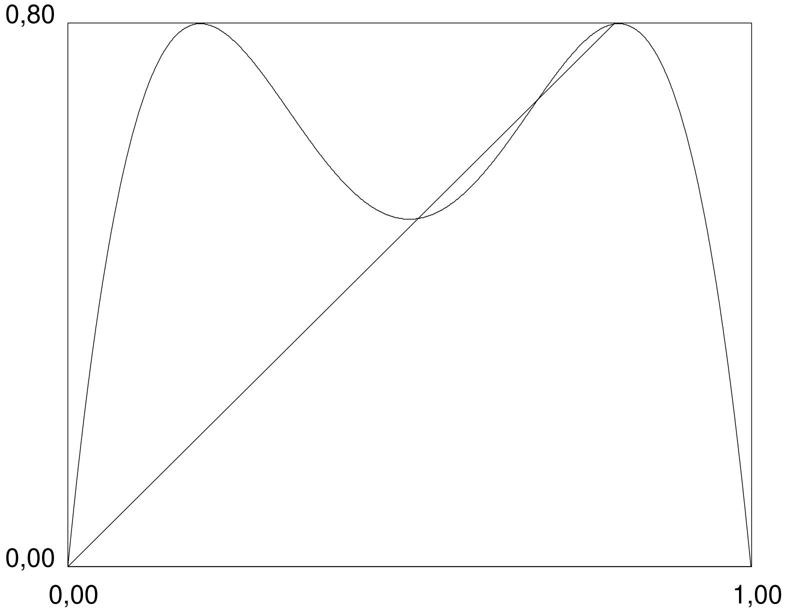
Im uns interessierenden Bereich $a \geq 1$ gibt es also genau dann reelle Lösungen, wenn $a \geq 3$ ist, oder anders ausgedrückt: In dem Augenblick, in dem der Fixpunkt instabil wird, entsteht ein reeller Zweierzyklus.

Wie verhält es sich mit dessen Stabilität? Wir müssen nachprüfen, für welche Werte von a die oben ausgerechnete Bedingung $|g'_{(2)}(x_{1/2})| < 1$ erfüllt ist. Das läßt sich am einfachsten geometrisch sehen: Die Punkte $x_{1/2}$ sind die Schnittpunkte zwischen der Winkelhalbierenden und dem

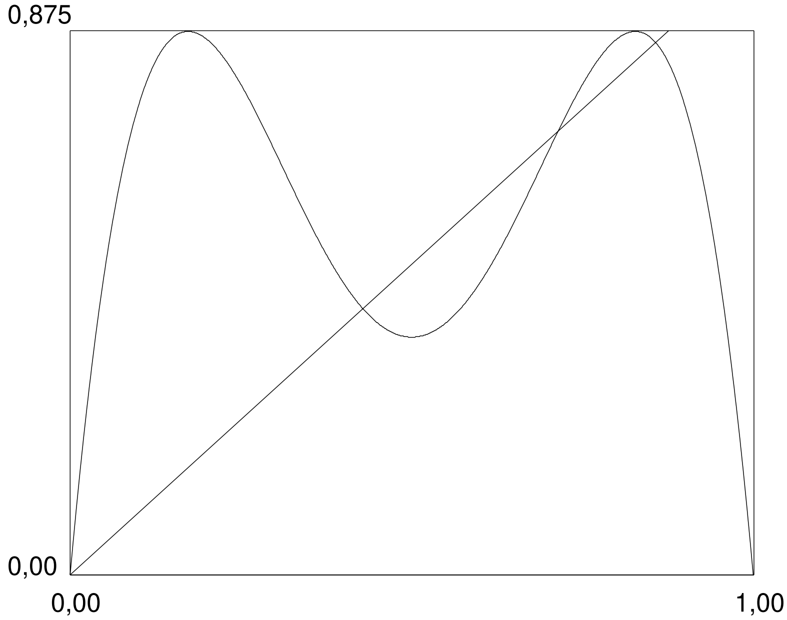
Graphen von $g_{(2)}$, und $|g'_{(2)}(x_{1/2})|$ sind die Steigungen der Tangenten an diese Kurve in den beiden Schnittpunkten, der Steigungswinkel beider Tangenten muß also zwischen $-45°$ und $+45°$ liegen. Bei $a = 3$, wenn der Zweierzyklus entsteht, ist $x_1 = x_2$ gleich dem Fixpunkt, die Winkelhalbierende ist also Tangente und ihre Steigung ist natürlich eins.



Sobald a größer wird, ist die Kurve in der Mitte stärker eingeschnitten; die Punkte $x_{1/2}$ des Zweierzyklus werden verschieden voneinander und auch vom Fixpunkt, es gibt jetzt also drei Schnittpunkte (zusätzlich zum Nullpunkt). Anschaulich ist klar, daß dies geometrisch nur dann möglich ist, wenn die Tangente im ersten Schnittpunkt *flacher* ist als die Winkelhalbierende, im zweiten Schnittpunkt *steiler* als die Winkelhalbierende, und im dritten Schnittpunkt schließlich wieder flacher. Falls a noch hinreichend nahe bei drei liegt, so daß die beiden flacheren Tangenten noch eine Steigung größer als -1 haben, gehören also zwei Schnittpunkte zu *stabilen* Fixpunkten von $g_{(2)}$, nämlich der erste und der dritte, während der mittlere Schnittpunkt zu einem instabilen Fixpunkt von $g_{(2)}$ gehört. Letzterer muß natürlich gleich dem Fixpunkt $x = 1 - \frac{1}{a}$ von g sein, von dem wir bereits wissen, daß er für $a > 3$ instabil ist. Die beiden stabilen Fixpunkte sind daher die beiden Elemente x_1 und x_2 des Zweierzyklus von g. Im nächsten Bild ist diese Situation für $a = 3{,}2$ aufgezeichnet:

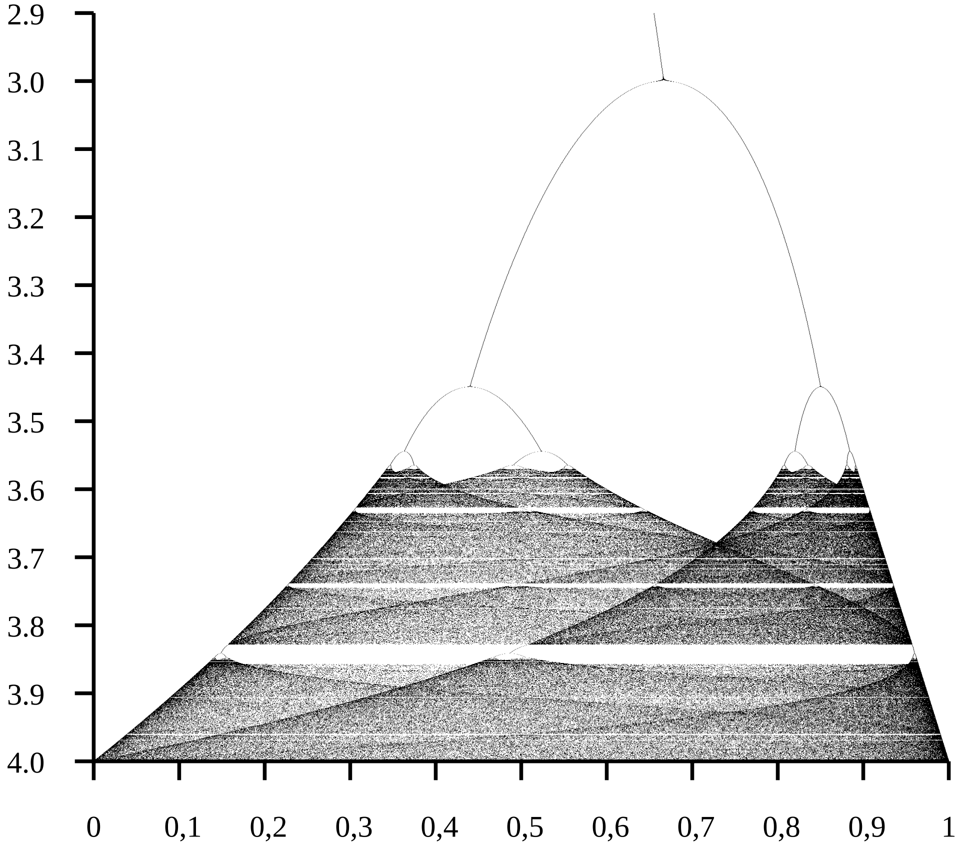


Hier ist die Tangente bereits fast waagrecht geworden; wenn a noch größer wird, wird die Steigung der Tangenten negativ und immer negativer, bis sie schließlich unter -1 gefallen ist, so daß nun auch der Zweierzyklus instabil geworden ist. Ein Beispiel dafür liefert der im nächsten Bild dargestellte Fall $a = 3{,}5$:



In diesem Bereich gibt es also weder einen stabilen Fixpunkt noch einen stabilen Zweierzyklus. Gibt es einen anderen stabilen Zyklus?

Eine solche Frage läßt sich am einfachsten experimentell beantworten: Falls es einen stabilen Zyklus gibt, wird er unter hinreichend vielen zufällig gewählten Punkten sicherlich einige anziehen; wenn man auf diese Punkte g hinreichend oft anwendet, nähern sie sich immer weiter dem Zyklus und werden schließlich zumindest optisch ununterscheidbar von diesem. Druckt man also nur die Werte $g_{(p)}(x)$ für große p, etwa für $p > 1000$, so sollte man ein recht gutes Bild von etwa vorhandenen Zykeln bekommen. Ein grobes Bild der Ergebnisse gibt das folgende Diagramm; für einen besseren Überblick sei auf die in der Vorlesung ausgegebenen Abbildungen verwiesen.



Bei dieser Abbildung sind von oben nach unten die a-Werte von 2,9 bis 4 aufgetragen und von links nach rechts die x-Werte von 0 bis 1. Wie man sieht, entsteht in dem Augenblick, in dem der Zweierzyklus instabil wird, ein stabiler Viererzyklus, der selbst nach kurzer Zeit instabil wird, um durch einen Achterzyklus ersetzt zu werden *usw.* Schließlich gibt es überhaupt keine Zykel mehr, sondern nur noch schwarze Regionen mit mehr oder weniger viel Struktur, die dann aber doch immer wieder durch mehr oder weniger breite „Fenster“ zu Zykeln unterbrochen werden.

Um zu sehen, was in den schwarzen Regionen geschieht, betrachten wir den besonders einfachen Fall $a = 4$, wir setzen also

$$x_{n+1} = 4 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)\,.$$

Die Besonderheit dieses Falls liegt darin, daß sich diese Gleichung dramatisch vereinfachen läßt, wenn wir neue Größen θ_n zwischen 0 und 1 einführen durch die Vorschrift

$$x_n = \sin^2 \frac{\pi \cdot \theta_n}{2}\,.$$

Dies ist möglich, den wie der Sinus steigt auch dessen Quadrat zwischen Null und $\pi/2$ monoton von 0 auf 1. Alsdann ist

$$\begin{aligned}
4 \cdot x_n \cdot (1 - x_n) &= 4 \cdot \sin^2 \frac{\pi \cdot \theta_n}{2} \cdot \left(1 - \sin^2 \frac{\pi \cdot \theta_n}{2}\right) \\
&= 4 \cdot \sin^2 \frac{\pi \cdot \theta_n}{2} \cdot \cos^2 \frac{\pi \cdot \theta_n}{2} \\
&= \left(2 \cdot \sin \frac{\pi \cdot \theta_n}{2} \cdot \cos \frac{\pi \cdot \theta_n}{2}\right)^2 \\
&= \sin^2(\pi \cdot \theta_n)
\end{aligned}$$

nach dem Additionstheorem des Sinus, angewandt auf

$$\sin\Big(\frac{\pi \cdot \theta_n}{2} + \frac{\pi \cdot \theta_n}{2}\Big)\,.$$

Also ist

$$x_{n+1} = \sin^2 \frac{\pi \cdot \theta_{n+1}}{2} = \sin^2(\pi \cdot \theta_n)\,.$$

Daraus folgt allerdings noch nicht, daß $\theta_{n+1} = 2\theta_n$ ist, denn die θ-Werte müssen ja alle zwischen 0 und 1 liegen. Nun ist aber $\sin(\pi - \alpha) = -\sin\alpha$, die Quadrate sind also gleich, und speziell für $\alpha = 2\theta_n$ erhalten wir

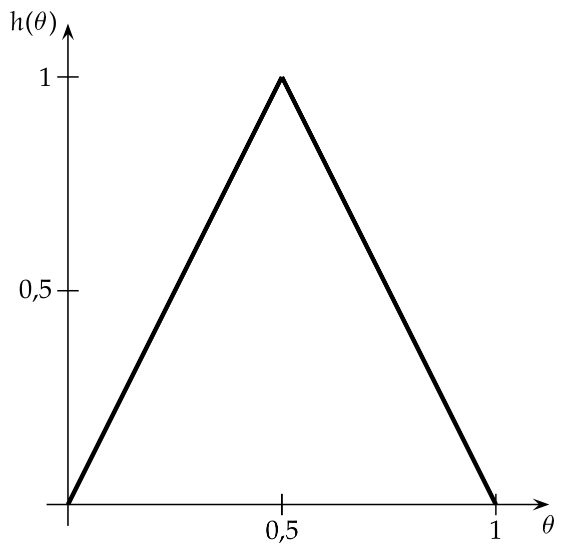
$$\sin^2 \pi \cdot \theta_n = \sin^2 \frac{\pi \cdot 2\theta_n}{2} = \sin^2 \frac{\pi \cdot (2\theta_n - 2)}{2} \,.$$

Setzen wir also

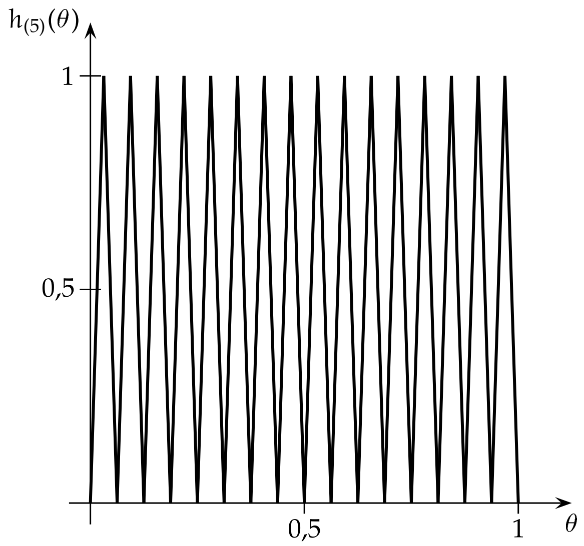
$$\theta_{n+1} = h(\theta_n) = \begin{cases} 2\theta_n & \text{falls } 0 \le \theta_n \le \frac{1}{2} \\ 2\theta_n - 2 & \text{falls } \frac{1}{2} \le \theta_n \le 1 \,, \end{cases}$$

so ist stets $0 \le \theta_{n+1} \le 1$ und $x_{n+1} = \sin^2 \pi \cdot \theta_{n+1}/2$.

Betrachten wir die Funktion h genauer! Ihr Graph ist offensichtlich gerade ein Zacken, der zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ die Steigung 2 und zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 die Steigung -2 hat:



Entsprechend besteht ihre n-fache Iteration aus 2^n Zacken, die mit Steigung 2^{n+1} nach oben und Steigung -2^{n+1} nach unten gehen, denn h bildet sowohl 0 als auch 1 auf 0 ab und $\frac{1}{2}$ auf 1. Insbesondere kann also der Graph einer solchen Abbildung nirgends eine Steigung vom Betrag kleiner eins haben, es kann also keine stabilen Zykeln jedweder Länge geben: Jeder Zyklus ist instabil. In der folgenden Abbildung ist die fünffache Iteration von h als Beispiel aufgezeichnet.



Das Verhalten der n-fach iterierten Abbildung hängt also extrem vom Ausgangswert ab: Der Funktionswert hängt nur davon ab, wo θ relativ zum Beginn eines Zackens liegt, nicht aber davon, um *welchen* Zacken es sich handelt. Dieser Sachverhalt läßt sich am besten im Zweiersystem ausdrücken, d.h. wir betrachten nicht die Dezimalziffern

$d_1, d_2, d_3, \ldots$, für die

$$\theta = 0, d_1 d_2 d_3 \ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \frac{d_3}{1000} + \cdots$$

ist, sondern diejenigen Zahlen $b_1, b_2, b_3, \ldots$, für die

$$\theta = (0, b_1 b_2 b_3 \ldots)_2 = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{4} + \frac{b_3}{8} + \cdots$$

ist. Genauso wie die Dezimalziffern nur Zahlen zwischen 0 und 9 sein können, sind für die Binärziffern nur die beiden Zahlen 0 und 1 zugelassen. Beispielsweise ist also

$$\frac{1}{4} = (0{,}01)_2, \quad \frac{3}{8} = (0{,}001)_2, \quad \frac{1}{3} = (0{,}0101010101\ldots)_2$$

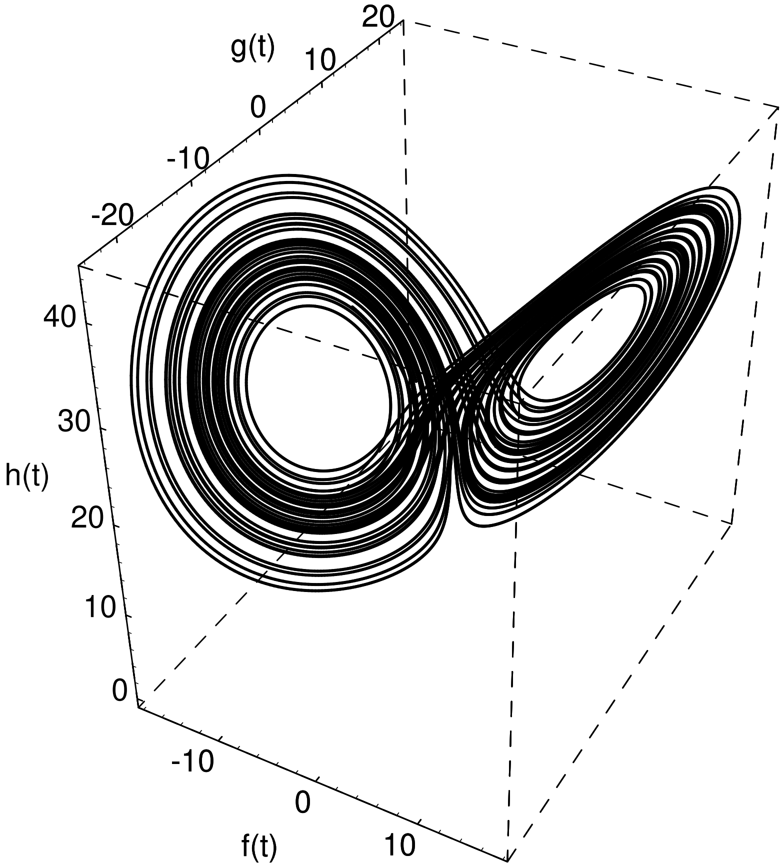
und so weiter. In dieser Darstellung ist $\theta < \frac{1}{2}$ genau dann, wenn die erste Ziffer b_1 Null ist; bei zweimaliger Iteration von h gibt also die erste Binärziffer an, ob θ unter dem ersten oder dem zweiten der beiden Zacken liegt, und die restlichen Ziffern geben an, wo es relativ zum Beginn des Zackens liegt. Der Wert $h_{(2)}(\theta)$ hängt somit nur ab von den Binärziffern ab der zweiten. Entsprechend überlegt man sich leicht, daß bei n-facher Iteration die ersten $n-1$ Ziffern angeben, unter welchem der dann 2^{n-1} Zacken θ liegt, und erst die Ziffern ab der n-ten einen Einfluß auf den Wert von $h_{(n)}(\theta)$ haben. Wir verlieren also pro Iteration eine Binärziffer. Anders ausgedrückt heißt das, daß jede kleine Änderung, selbst wenn sie sich nur auf weit hinter dem Komma stehende Binärziffern auswirkt, nach einer gewissen Anzahl von Iterationen das Geschehen *dominiert*. Was immer man unter Chaos verstehen will: Ein solches Verhalten wird wohl jeder als chaotisch bezeichnen, die Folge der θ_n und mithin auch die in engem Zusammenhang mit ihr stehende Folge der x_n sind also chaotisch.

Ein solches chaotisches Verhalten von Funktionen ist nicht beschränkt auf diskrete Folgen, auch im kontinuierlichen Fall tritt entsprechendes auf. Dort sind Beispiele allerdings schwieriger zu behandeln, denn nach einem Satz von Poincaré und Bendixson gibt es bei Gleichungen, wie wir sie betrachtet haben, selbst im zweidimensionalen Fall immer Gleichgewichtspunkte oder „Zykeln" (die dann natürlich geschlossene Kurven sind), und jede Lösung nähert sich einer solchen speziellen Lösung. Ab Dimension drei gibt es aber wirklich Chaos; das erste Beispiel, das genauer per Computer untersucht wurde, ist das Lorenz-System, das als extreme Vereinfachung jener Gleichungen gelten kann, die unser Wetter bestimmen. Es besteht aus den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} f'(t) &= -a \cdot \big((f(t) - g(t)\big) \\ g'(t) &= -f(t) \cdot h(t) + b \cdot f(t) - g(t) \\ h'(t) &= f(t) \cdot g(t) - c \cdot h(t) \end{aligned}$$

für drei Funktionen $f(t), g(t)$ und $h(t)$; die Zahlen a, b und c sind Parameter. Für $a = 10$, $b = 28$ und $c = 8/3$ ist in der nächsten Abbildung eine Lösungskurve dargestellt als Menge aller Punkte $\big(f(t), g(t), h(t)\big)$ ab einer gewissen Zeit t_0.

Beim Betrachten dieser Kurve fällt auf, daß sie sich im wesentlichen kreisförmig auf zwei Ebenen bewegt, zwischen denen Sie in ziemlich regelloser Weise hin- und herspringt. Es gibt also offensichtlich auch hier eine Region des dreidimensionalen Raums, an die die Kurve gebunden ist, aber diese Region ist nicht einfach ein Fixpunkt oder ein Zyklus, sondern hat eine sehr viel kompliziertere Struktur: Sie ist ein sogenannter seltsamer Attraktor. Dieses Phänomen ist



typisch für chaotische Systeme: Man kann zwar gewisse Aussagen machen über die Geometrie der Lösungskurve, es ist aber unmöglich, diese Geometrie vollständig zu beschreiben, und es ist erst recht unmöglich, aus größerem zeitlichem Abstand vorherzusagen, wo sich das System zu einem späteren Zeitpunkt t aufhalten wird.

Eine sehr ähnliche Lösungskurve erhält man bei einem einfachen Dynamomodell für den Erdmagnetismus; auch hier gibt es zwei Ebenen, und die Lösungskurve verteilt sich auf zwei Kreisringe um Punkte in diesen Ebenen. Dies entspricht dem Phänomen, daß die magnetischen Pole der Erde ihre Lage ständig verändern; meist sind dies nur kleine Schwankungen, aber im Durchschnitt etwa alle 340 000 Jahre vertauschen der magnetische Nordpol und der Südpol im Laufe von wenigen Tausend Jahren ihre Lage – dies entspricht dem Übergang der Lösungskurve von der einen Ebenen in die andere.

§7: Grundzüge der Fehlerrechnung

Messungen in den Natur- oder gar Sozialwissenschaften sind nie völlig exakt: In vielen Fällen unterliegt schon die zu messende Größe statistischen Schwankungen, wie etwa beim radioaktiven Zerfall; in anderen treten Fehler auf durch die begrenzte Genauigkeit von Meßinstrumenten und/oder Sinnesorganen. Aufgabe der Fehlerrechnung ist es, die auftretenden Fehler zu beschreiben und ihre Auswirkungen zu verstehen.

Dabei müssen wir uns allerdings auf *zufällige Fehler* der gerade beschriebenen Art beschränken; die ebenfalls möglichen *systematischen Fehler* sind nicht Gegenstand der Fehlerrechnung. Systematische Fehler entstehen dadurch, daß der Messung fehlerhafte Theorien zugrunde gelegt werden oder Meßinstrumente falsch geeicht sind oder Teile der Versuchsanordnung oder externe Einflüsse nicht berücksichtigt werden *usw.;* sie verfälschen Meßergebnisse in einer konsistenten, nicht zufälligen Weise und können sehr schwer zu finden sein, falls sie nicht zu offensichtlich unsinnigen Ergebnissen führen. In dieser Vorlesung beschränken wir uns daher ausschließlich auf zufällige Fehler und deren Auswirkungen.

Nehmen wir beispielsweise an, daß das Alter einer Holzprobe nach der C^{14}-Methode bestimmt werden soll. Wie wir in §3 nachgerechnet haben, ist dieses Alter

$$t = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{Z_{\text{tot}}}{Z_{\text{lebend}}}\right),$$

wobei Z_{tot} und Z_{lebend} die Anzahlen radioaktiver Zerfälle in der Probe beziehungsweise in lebendem Holz sind und λ die Zerfallskonstante von C^{14} bezeichnet. Jeder Fehler in der Messung von Z_{tot} oder Z_{lebend} führt zu einem falschen Wert von t. (Streng genommen gilt das gleiche auch für Fehler von λ, aber man kann wohl davon ausgehen, daß die Zerfallskonstante von C^{14} im Vergleich etwa zu der jeweils neu zu bestimmenden Zerfallsrate Z_{tot} sehr viel genauer bekannt ist, so daß ihr Fehler vernachlässigt werden kann.)

Angenommen, wir können einigermaßen abschätzen, mit welchem Fehler Z_{tot} und Z_{lebend} behaftet sind; die „wahren Werte“ seien also

$$\widehat{Z}_{\text{tot}} = Z_{\text{tot}} + u_{\text{tot}} \qquad \text{und} \qquad \widehat{Z}_{\text{lebend}} = Z_{\text{lebend}} + u_{\text{lebend}}\,.$$

Was können wir dann über den Fehler von t sagen?

Ein erster, naiver Ansatz besteht darin, die Eigenschaften der Ableitung einer Funktion auszunutzen: Wenn wir t zunächst nur als Funktion der fehleranfälligsten Größe Z_{tot} betrachten, also

$$t = f(Z_{\text{tot}}) = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{Z_{\text{tot}}}{Z_{\text{lebend}}}\right),$$

dann ist

$$f(\widehat{Z}_{\mathrm{tot}}) = f(Z_{\mathrm{tot}} + u_{\mathrm{tot}}) \approx f(Z_{\mathrm{tot}}) + f'(Z_{\mathrm{tot}}) \cdot u_{\mathrm{tot}}\,.$$

Da t aber tatsächlich auch noch von Z_{lebend} abhängt, müssen wir unseren Ableitungsbegriff etwas verallgemeinern:

Für eine Funktion $u = f(t)$ hatten wir in §1 die Ableitung

$$f'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

definiert; in völliger Analogie dazu definierten wir nun *partielle Ableitungen* $f_x, f_y, f_z, \ldots$ einer Funktion

$$u = f(x, y, z, \ldots)\,,$$

die von mehreren Parametern abhängt, als

$$f_x(x, y, z, \ldots) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y, z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)}{h}\,,$$

$$f_y(x, y, z, \ldots) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y+h, z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)}{h}\,,$$

$$f_z(x, y, z, \ldots) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y, z+h, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)}{h}$$

usw., wir betrachten die Funktion also jeweils so, als hinge sie nur von einer Variablen ab und alle restlichen Variablen seien bloße Parameter wie etwa der Parameter a in der logistischen Gleichung oder das λ in $f(t) = e^{-\lambda t}$.

Für $f(x,y,z) = x^5 + y^6 + z^7$ beispielsweise ist

$$f_x(x,y,z) = 5x^4, \quad f_y(x,y,z) = 6x^5 \quad \text{und} \quad f_z(x,y,z) = 7x^6\,,$$

denn bei der partiellen Ableitung nach x werden die Potenzen von y und z als Konstanten betrachtet, bei der nach y die Potenzen von x und z, bei der nach z die von x und y. Entsprechend ist für $f(x,y,z) = x^5 \cdot y^6 \cdot z^7$

$$f_x(x,y,z) = 5x^4 \cdot y^6 \cdot z^7, \qquad f_y(x,y,z) = 6x^5 \cdot y^5 \cdot z^7,$$
$$f_z(x,y,z) = 7x^5 \cdot y^6 \cdot z^6\,.$$

Allgemein gilt auch hier wieder

$$\begin{aligned} f(x+h,y+k,z+\ell,\,\dots) &\approx f(x,y,z,\,\dots) + h \cdot f_x(x,y,z,\,\dots) \\ &\quad + k \cdot f_y(x,y,z,\,\dots) + \ell \cdot f_z(x,y,z,\,\dots) + \dots\,. \end{aligned}$$

Streng genommen müßte rechts hier zwar beispielsweise $f_x(x,y+k,z+\ell,\dots)$ anstelle von $f_x(x,y,z,\dots)$ stehen, aber die Fehler, die wir dabei machen, sind Vielfache von $k,\ell,\dots$ und werden dann auch noch mit h multipliziert; da wir Formeln der obigen Art ohnehin nur für kleine Werte von $h,k,\ell,\dots$ anwenden können, können wir Produkte wie $h \cdot k$ unbesorgt vernachlässigen.

Damit zurück zur C^{14}-Methode: Dort ist

$$\begin{aligned} t = f(Z_{\text{tot}}, Z_{\text{lebend}}) &= -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{Z_{\text{tot}}}{Z_{\text{lebend}}}\right) \\ &= -\frac{1}{\lambda}\left(\ln(Z_{\text{tot}}) - \ln(Z_{\text{lebend}})\right)\,, \end{aligned}$$

also

$$f_{Z_{\text{tot}}}(Z_{\text{tot}}, Z_{\text{lebend}}) = -\frac{1}{\lambda \cdot Z_{\text{tot}}}$$

und

$$f_{Z_{\text{lebend}}}(Z_{\text{tot}}, Z_{\text{lebend}}) = +\frac{1}{\lambda \cdot Z_{\text{lebend}}} .$$

Für das „wahre Alter“ $\hat{t}$ der Probe erhalten wir damit

$$\begin{aligned} \hat{t} &= f(\hat{Z}_{\text{tot}}, \hat{Z}_{\text{lebend}}) = f(Z_{\text{tot}} + u_{\text{tot}}, Z_{\text{lebend}} + u_{\text{lebend}}) \\ &\approx f(Z_{\text{tot}}, Z_{\text{lebend}}) + \frac{u_{\text{lebend}}}{\lambda \cdot Z_{\text{lebend}}} - \frac{u_{\text{tot}}}{\lambda \cdot Z_{\text{tot}}} . \end{aligned}$$

Warum ist dieser erste Ansatz naiv?

Als erstes kennen wir die Fehler u_{tot} und u_{lebend} natürlich nicht wirklich (ansonsten würden wir gleich $\hat{Z}_{\text{tot}}$ und $\hat{Z}_{\text{lebend}}$ berechnen und mit diesen Werten weiterarbeiten); das einzige, worauf wir hoffen können, ist eine Abschätzung für den zu erwarteten Betrag dieser Fehler. Hier beim radioaktiven Zerfall könnte diese Abschätzung etwa aus der (bekannten) Statistik radioaktiver Zerfälle kommen; bei anderen Anwendungen liefert möglicherweise die Toleranz der Meßgeräte die entscheidende Schranke. In jedem Fall wird man aber davon ausgehen können, daß der tatsächliche Fehler oftmals kleiner ist als die Schranke, und da die Fehler u_{tot} und u_{lebend} das gleiche Vorzeichen haben können (aber nicht müssen), werden sich die beiden Fehler auch gelegentlich gegenseitig aufheben.

Um also zu realistischeren Aussagen zu kommen, müssen wir uns zunächst überlegen, was wir als Maß für einen Fehler betrachten wollen. Ein Ansatz dazu ist das *Laplacesche Fehlermodell:*

Angenommen, der Fehler kommt durch n verschiedene Störungen zustande, wobei jede dieser Störungen den gleichen Betrag ε habe und mit gleicher Wahrscheinlichkeit entweder $+\varepsilon$ oder $-\varepsilon$ sei; der Gesamtfehler u sei die Summe aller dieser Störungen. Was wissen wir dann über u? Im Falle $n = 0$ ist natürlich $u = 0$, für $n = 1$ ist $u = +\varepsilon$ oder $u = -\varepsilon$ mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit; für $n = 2$ sind in jeweils einem der vier Fälle beide Störungen positiv oder beide Störungen negativ, also $u = \pm 2\varepsilon$; in den restlichen beiden Fällen heben sich die beiden Störungen auf, d.h. $u = 0$. Entsprechend ist für $n = 3$ in jeweils einem der acht möglichen Fälle $u = \pm 3\varepsilon$, und in jeweils drei Fällen ist $u = \pm\varepsilon$ *usw.* Insgesamt erhalten wir also die folgende Tabelle für die Anzahl der Fälle, in denen der oben angegebene Fehler u auftritt:

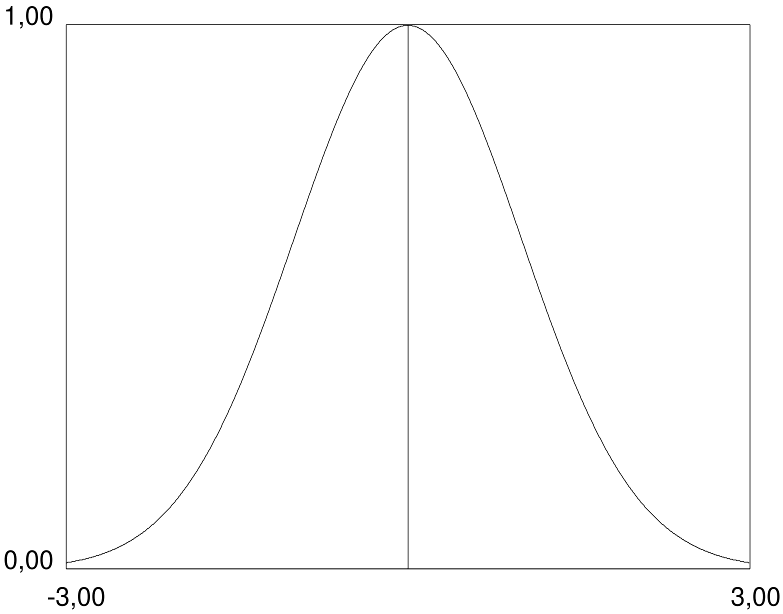
$u =$	-5ε	-4ε	-3ε	-2ε	$-\varepsilon$	0	$+\varepsilon$	$+2\varepsilon$	$+3\varepsilon$	$+4\varepsilon$	$+5\varepsilon$
$n = 0$						0					
$n = 1$					1		1				
$n = 2$				1		2		1			
$n = 3$			1		3		3		1		
$n = 4$		1		4		6		4		1	
$n = 5$	1		5		10		10		5		1

Diese dreiecksförmige Anordnung von Zahlen bezeichnet man als *Pascalsches Dreieck.* Offenbar kann man es dadurch berechnen, daß man an jede Stelle genau die Zahl schreibt, die die Summe der beiden links und rechts darüberstehenden ist: Die n-te Störung bringt den Fehler genau dann auf $i \cdot \varepsilon$, wenn sie entweder gleich $+\varepsilon$ ist und die ersten $n-1$ Störungen einen Fehler $(i-1) \cdot \varepsilon$ produziert haben, oder aber wenn sie gleich $-\varepsilon$ ist und die ersten $n-1$ Störungen einen Fehler $(i+1) \cdot \varepsilon$ produziert haben. Entsprechend ist auch klar, daß die Summe aller Zahlen in der n-ten Zeile gleich 2^n ist, denn in der nullten Zeile haben wir Summe eins, und da die jeweils neu hinzukommende Störung genau zwei Möglichkeiten hat, verdoppelt sich die Summe von Zeile zu Zeile. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich n Störungen zu $i \cdot \epsilon$ aufsummieren, ist also gerade gleich der Zahl, die in der n-ten Spalte unter $i \cdot \varepsilon$ steht (beziehungsweise Null, wenn dort keine Zahl steht), dividiert durch 2^n.

Wenn wir nun n immer größer werden lassen und ε dementsprechend immer kleiner, so erhalten wir schließlich für die so berechneten Wahrscheinlichkeiten, die ungleich Null sind, eine fast kontinuierliche Abhängigkeit von i, die etwa der Kurve aus der folgenden Abbildung entspricht:

Diese Kurve heißt *Glockenkurve* oder *Gaußsche Normalverteilung* nach dem deutschen Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777–1855), der zusammen mit dieser Kurve auf dem Zehnmarkschein abgebildet ist. Eine nicht sonderlich schwierige Rechnung, die hier allerdings zu viel Zeit kosten würde, zeigt, daß sie der Gleichung

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}$$



genügt. Der Parameter σ gibt dabei an, wie schnell wir ε gegen Null gehen lassen, wenn n gegen unendlich geht; er wird als *Standardabweichung* bezeichnet. Auf der Glockenkurve ist σ daran zu erkennen, daß die beiden Wendepunkte der Kurve bei $u = \pm\sigma$ liegen. Berechnen läßt sich σ^2 als Erwartungswert von u^2; im Laplaceschen Fehlermodell mit n Störungen also als Mittelwert der Größen $i^2 \cdot \varepsilon^2$, von denen jede so oft berücksichtigt wird, wie die Zahl unter $i\varepsilon$ im Pascalschen Dreieck angibt.

Unter dem Gesichtspunkt der Fehlerabschätzung läßt sich die Funktion $\varphi(u)$ folgendermaßen interpretieren: Wenn n hinreichend groß wird, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Fehler u zwischen a und b liegt, gleich

$$\int_a^b \varphi(u)\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\int_a^b e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\,du\,.$$

Speziell können wir uns fragen, mit welcher Wahrscheinlichkeit u zwischen $-i\,\sigma$ und $+i\,\sigma$ liegt; das Ergebnis ist:

$i =$	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeit:	0,683	0,954	0,9973	0,99994

Damit liegen also etwa zwei Drittel aller Fehler zwischen $-\sigma$ und σ, 95% liegen zwischen -2σ und 2σ und 99,7% zwischen -3σ und 3σ; die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Fehler größer als 3σ ist, beträgt also nur etwa 0,27%. Da Ereignisse mit einer so geringen Wahrscheinlichkeit praktisch nie auftreten, betrachtet man Fehler, die außerhalb des 3σ-Bereichs liegen, meist als „Ausreißer“, d.h. als grobe Meßfehler, die bei der Bestimmung des Ergebnisses nicht berücksichtigt werden.

Das Laplacesche Fehlermodell mag zwar übermäßig einfach erscheinen, aber ein wichtiger Satz der Statistik, der *zentrale Grenzwertsatz*, besagt, daß (fast) jedes Modell, das den Fehler in irgendeiner Weise als Summe irgendwie verteilter Störungen interpretiert, auf die gleiche Glockenkurve führt. Das Wort „fast“ bedeutet dabei, daß es zwar möglich ist, theoretische Modelle zu finden, für die das nicht gilt, daß diese aber keine praktische Bedeutung haben.

Falls wir nicht die Fehler betrachten, sondern die Meßgrößen selbst, so können wir diese in der Form $x_n = \hat{x} + u_n$ schreiben, wobei $\hat{x}$ der „korrekte“ Wert und u_n der Fehler des n-ten Meßwerts x_n ist. Da die Verteilung der u_n durch eine Normalverteilung gegeben ist, wird die Verteilung der x_n durch eine verschobene Glockenkurve gegeben, deren Gleichung zu

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{(x-\hat{x})^2}{2\sigma^2}}$$

wird. Wir nennen $\hat{x}$ den *Mittelwert* dieser Normalverteilung, und σ natürlich weiterhin die Standardabweichung.

Wenn wir im folgenden vom *Fehler* einer Meßgröße sprechen, so soll damit immer die Standardabweichung ihrer Verteilung gemeint sein; der so angegebene Fehler ist also *keine absolute Fehlerschranke,* denn etwa ein Drittel aller Meßergebnisse liegt außerhalb dieser Schranken. (Wenn sie es nicht tun, ist das im allgemeinen ein Hinweis auf manipulierte Meßergebnisse.) Wir schreiben kurz

$$x = \hat{x} \pm \sigma$$

um auszudrücken, daß x einer Normalverteilung mit Mittelwert $\hat{x}$ und Standardabweichung σ genügt.

Nachdem wir somit einen nichtnaiven Fehlerbegriff gefunden haben, können wir als nächstes nach einem nichtnaiven Fehlerfortpflanzungsgesetz suchen. Gegeben seien also zwei Größen

$$x = \hat{x} \pm \sigma_x \quad \text{und} \quad y = \hat{y} \pm \sigma_y$$

(die Verallgemeinerung auf mehr als zwei Größen erfordert, wie man sich bei der folgenden Rechnung leicht klarmacht, nur etwas mehr Schreibaufwand; sie ist nicht prinzipiell schwieriger), und eine Größe

$$w = f(x, y)\,,$$

die von diesen beiden abhängt. Für x seien n Meßwerte $x_1, \ldots, x_n$ gegeben, und für y entsprechend m Werte $y_1, \ldots, y_m$. Realistischerweise wird man davon ausgehen können, daß die Fehler der x-Werte und die der y-Werte voneinander unabhängig sind, und das wollen wir im folgenden auch annehmen.

Für w haben wir dann $n \cdot m$ Werte

$$w_{ij} = f(x_i, y_j)\,,$$

deren Mittelwert die beste Schätzung für den „wahren" Wert $\widehat{w} = f(\hat{x}, \hat{y})$ ist. Dieser Mittelwert ist für große Werte von n und m umständlich auszurechnen; einfacher wäre es, einfach den Mittelwert $\bar{x}$ der x_i und den Mittelwert $\bar{y}$ der y_j zu berechnen und dann $\overline{w} = f(\bar{x}, \bar{y})$ als Schätzung für $\widehat{w}$ zu benutzen. Dies ist in der Tat möglich: Ist

$$x_i = \bar{x} + h_i \quad \text{und} \quad y_j = \bar{y}_j + k_j\,,$$

so ist, wie zu Beginn dieses Paragraphen nachgerechnet, für nicht zu große Fehler h_i und k_j

$$\begin{aligned} w_{ij} &= f(x_i, y_j) = f(\bar{x} + h_i, \bar{y} + k_j) \\ &\approx f(\bar{x}, \bar{y}) + h_i \cdot f_x(\bar{x}, \bar{y}) + k_j \cdot f_y(\bar{x}, \bar{y})\,. \end{aligned}$$

Da die h_i und die k_j als Abweichungen von einem Mittelwert jeweils Mittelwert Null haben, ist also der Mittelwert der w_{ij} in der Tat näherungsweise gleich $f(\bar{x}, \bar{y})$.

Als nächstes müssen wir den Fehler von $\widehat{w}$ berechnen, also den Erwartungswert der $(w_{ij} - \widehat{w})^2$. Dazu schreiben wir zunächst

$$x_i = \hat{x} + u_i \quad \text{und} \quad y_j = \hat{y}_j + v_j \;,$$

betrachten also anstelle der Abweichungen vom Mittelwert die echten Meßfehler, und erhalten genau wie eben

$$\begin{aligned} w_{ij} - \widehat{w} &= f(x_i, y_j) - f(\hat{x}, \hat{y}) \\ &\approx u_i \cdot f_x(\hat{x}, \hat{y}) + v_j \cdot f_y(\hat{x}, \hat{y}) \;, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} (w_{ij} - \widehat{w})^2 &\approx \big(u_i \cdot f_x(\hat{x}, \hat{y}) + v_j \cdot f_y(\hat{x}, \hat{y})\big)^2 \\ &= u_i^2 \cdot f_x(\hat{x}, \hat{y})^2 + v_j^2 \cdot f_y(\hat{x}, \hat{y})^2 + 2u_i \cdot v_j \cdot f_x(\hat{x}, \hat{y}) \cdot f_y(\hat{x}, \hat{y}) \;. \end{aligned}$$

Der Erwartungswert der u_i^2 ist σ_x^2, der der v_j^2 entsprechend σ_y^2, und da die u_i und die v_j jeweils Erwartungswert Null haben und voneinander unabhängig sind, ist der Erwartungswert für $u_i \cdot v_j$ ebenfalls Null. Damit folgt das *Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz*

$$\sigma_w^2 = f_x(\hat{x}, \hat{y})^2 \cdot \sigma_x^2 + f_y(\hat{x}, \hat{y})^2 \cdot \sigma_y^2$$

oder

$$\sigma_w = \sqrt{f_x(\hat{x}, \hat{y})^2 \cdot \sigma_x^2 + f_y(\hat{x}, \hat{y})^2 \cdot \sigma_y^2} \;.$$

Genauso gilt dieses Gesetz auch für Funktionen von mehr als zwei Größen; für $w = f(x_1, \ldots, x_n)$ ist

$$\sigma_w = \sqrt{f_{x_1}(\hat{x}_1, \ldots \hat{x}_n)^2 \cdot \sigma_{x_1}^2 + \cdots + f_{x_n}(\hat{x}_1, \ldots \hat{x}_n)^2 \cdot \sigma_{x_n}^2} \,.$$

Als eine erste Anwendung betrachten wir die Funktion

$$\bar{x} = f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \,,$$

also den Mittelwert der x_i. Jede Messung x_i sei mit demselben erwarteten Fehler σ behaftet; da alle partiellen Ableitungen von f gleich $1/n$ sind, folgt für den Fehler des Mittelwerts also

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,.$$

Dies bestätigt die implizit stets angewandte Regel, daß man durch mehrfaches Messen ein zuverlässigeres Ergebnis erhält; durch 25 Messungen beispielsweise läßt sich der Fehler auf ein Fünftel reduzieren.

Damit wissen wir, wie man aus den Meßwerten auf den Fehler des Mittelwerts schließen kann – sofern man die Fehler der Meßwerte kennt. Wie lassen sich diese schätzen?

Da der Mittelwert die bestmögliche Schätzung für den Erwartungswert ist, könnte man beispielsweise den Mittelwert der $(\bar{x} - x_i)^2$ als Schätzung für σ^2 nehmen. Diese Schätzung ist aber zu optimistisch, da ja $\bar{x}$ selbst noch fehlerbehaftet ist. Stattdessen müssen wir den Mittelwert der

$(\hat{x} - x_i)^2$ betrachten, und dieser läßt sich wie folgt schätzen: Zunächst ist

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{x} - x_i)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big((\hat{x} - \bar{x}) + (\bar{x} - x_i)\big)^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{x} - \bar{x})^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{x} - \bar{x}) \cdot (\bar{x} - x_i)\,.\end{aligned}$$

Die letzte dieser drei Summen ist

$$\frac{(\hat{x} - \bar{x})}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i) = 0\,,$$

da $\bar{x}$ der Mittelwert der x_i ist, die zweite Summe ist der Mittelwert der $(\bar{x} - x_i)^2$, und von der ersten schließlich wissen wir, daß $(\hat{x} - \bar{x})^2$, das Quadrat des Fehlers des Mittelwerts, den Erwartungswert σ^2/n hat. Die gesamte erste Summe ist somit

$$\frac{1}{n} \cdot n \cdot \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\sigma^2}{n}\,,$$

und obige Formel wird zu

$$\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2\,.$$

Bringt man hier noch den Term σ^2/n auf die linke Seite, so folgt

$$\frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2$$

oder

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2 \,,$$

also

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}} \,.$$

Somit läßt sich auch σ aus den Meßdaten berechnen, der Meßfehler kann also ohne Kenntnis des „wahren“ Werts anhand der gemessenen Werte geschätzt werden.

§8: Die Maximum Likelihood Methode

Oftmals ist zu gegebenen Beobachtungsdaten grundsätzlich bekannt, welcher *Art* von Gesetz sie genügen sollten, und das Problem besteht „nur“ noch darin, die in diesem Gesetz vorkommenden *Parameter* zu bestimmen. Im einfachsten Fall könnte man etwa an einen Widerstand denken, der dadurch gemessen wird, daß man verschiedene Spannungen U_i anlegt und die zugehörigen Stromstärken I_i mißt. Nach dem Ohmschen Gesetz ist dann $U_i = R \cdot I_i$, aber aufgrund der unvermeidlichen Meßfehler werden die verschiedenen Quotienten U_i/I_i natürlich nicht alle gleich sein. Die Lösung dieses Problems ist klar: Man nimmt den Mittelwert der Quotienten. Schwieriger wird es, wenn mehrere Parameter ins Spiel kommen: Beim überexponentiellen Wachstum beispielsweise führte die Modellannahme zu einer Gleichung der Form

$$u = f(t) = \frac{\beta}{(C-t)^s}$$

für die Bevölkerung u zum Zeitpunkt t mit unbekannten Parametern β, s und C. Für zahlreiche Zeitpunkte t_i sind die Bevölkerungszahlen u_i oder zumindest Schätzungen dafür bekannt, aber natürlich gibt es auch hier keine Parameterwerte, für die *alle* u_i gleich $f(t_i)$ sind; Ziel kann es nur sein, die Parameter so zu wählen, daß die Unterschiede zwischen u_i und $f(t_i)$ nicht zu groß werden.

Der Ansatz dazu ist folgender: Sei $u = f(a, b, \ldots; t)$ der von den Parametern $a, b, \ldots$ abhängige Zusammenhang zwischen den Größen t und u, und seien $(t_1, u_1), \ldots, (t_n, u_n)$ gegebene (Meß-)Werte, an die die Parameter angepaßt werden sollen.

Nehmen wir an, es gäbe Parameter $a, b, \ldots$, für die $u = f(a, b, \ldots; t)$ den exakten Zusammenhang zwischen den Größen u und t wiedergibt, daß aber die Werte u_i aufgrund von Beobachtungsfehlern von den $f(a, b, \ldots; t_i)$ abweichen – das ist genau die Situation, mit denen man es in den Naturwissenschaften meist zu tun hat. Nach unserem Fehlermodell aus dem letzten Paragraphen sollte dann der Wert u_i aus einer Normalverteilung mit Mittelwert $f(a, b, \ldots; t_i)$ kommen, deren Standardabweichung σ_i von der Genauigkeit abhängt, mit der u_i bestimmt werden kann. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß u_i zwischen zwei Werten a und b liegt, ist damit

$$\int_a^b e^{-\left(u - f(a, b, \ldots; t_i)\right)^2 / 2\sigma_i} .$$

Von der Wahrscheinlichkeit, daß u_i gleich einem Wert c ist, können wir natürlich nicht reden, da diese nach obiger Formel ein Integral von c nach c wäre, also Null. Aber die Wahrscheinlichkeit dafür, daß u_i in einem kleinen Intervall vorgegebener Länge um c liegt, ist proportional zum Wert des Integranden an der Stelle c, also zu

$$e^{-\left(c-f(a,b,\,\ldots;\,t_i)\right)^2/2\sigma_i}\,.$$

Entsprechend ist

$$e^{-\left(d-f(a,b,\,\ldots;\,t_j)\right)^2/2\sigma_j}$$

ein Maß für die Wahrscheinlichkeit dafür, daß u_j in der Umgebung von d liegt. Wenn wir wie üblich davon ausgehen, daß keine systematischen Fehler auftreten, sind die Fehler von u_i und u_j voneinander unabhängig, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß u_i in der Umgebung von c liegt und u_j in der Umgebung von d ist also proportional zum Produkt der beiden obigen Ausdrücke, also zu

$$e^{-\left(c-f(a,b,\,\ldots;\,t_i)\right)^2/2\sigma_i\;-\;\left(d-f(a,b,\,\ldots;\,t_j)\right)^2/2\sigma_j}\,.$$

Als Maß für die Güte einer Wahl der Parameter $a, b, \ldots$ können wir daher die Größe

$$L(a,b,\,\ldots) = e^{\sum_{i=1}^{n}\left(u_i-f(a,b,\,\ldots;\,t_i)\right)^2/2\sigma_i}$$

definieren, die zwar keine Wahrscheinlichkeit ist, aber doch eng zusammenhängt mit der Wahrscheinlichkeit, daß die Meßreihe eine (fehlerbehaftete) Messung von Größen (t, u) ist, die der Beziehung $u = f(a, b, \ldots)$ genügen. $L(a, b, \ldots)$ heißt *Likelihoodfunktion* nach dem englischen Wort germanischen Ursprungs für Wahrscheinlichkeit. Dieses tritt in der Mathematik nur in diesem Zusammenhang auf; ansonsten wird in der englischsprachigen Mathematik das romanische Wort *probability* für Wahrscheinlichkeit benutzt.

Die Maximum Likelihood Methode besteht nun genau in dem, was ihr Name besagt: *Man wähle die Parameter $a, b, \ldots$ so, daß die Likelihoodfunktion maximal wird.*

Da $L(a, b, \ldots)$ durch eine Exponentialfunktion beschrieben wird, wird die Likelihoodfunktion genau dann maximal, wenn ihr Exponent maximal wird. Dieser Exponent ist eine negative Zahl, wird also genau dann maximal, wenn sein Betrag *minimal* wird, das heißt, wenn die Quadratsumme

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\big(u_i - f(a, b, \ldots; t_i)\big)^2}{2\sigma_i}$$

minimal wird. Man spricht daher auch häufig von der *Methode der kleinsten Quadrate;* sie geht, wie auch die Normalverteilung, auf Carl Friedrich Gauß zurück.

In vielen Fällen wird die Zuverlässigkeit der einzelnen Paare (t_i, u_i) miteinander vergleichbar sein, so daß alle σ_i gleich sind; in diesem Fall kann man die σ_i ignorieren und einfach die Quadratsumme

$$\sum_{i=1}^{n} \big(u_i - f(a, b, \ldots; t_i)\big)^2$$

minimieren. Es gibt aber auch Anwendungen, wie etwa oben beim überexponentiellen Bevölkerungswachstum, bei denen die Verschiedenheit des σ_i sehr wesentlich ist: Sicherlich wird man etwa der auf Volkszählungen beruhenden Weltbevölkerungszahl, die die Vereinten Nationen für 1980 veröffentlichten, mehr Vertrauen entgegenbringen als der Schätzung eines Historikers für die Weltbevölkerung des Jahres Null.

Bevor wir die Maximum Likelihood Methode wirklich anwenden können, müssen wir uns noch überlegen, wie man die Parameterwerte $a, b, \ldots$ findet, für die die Likelihoodfunktion maximal *bzw.* die Quadratsumme minimal wird. Aus der Schule ist bekannt, daß eine Funktion $u = g(t)$ *einer* Veränderlichen nur in solchen Punkten (t, u) ein Maximum oder Minimum haben kann (aber nicht muß), in denen $g'(t) = 0$ ist. Entsprechendes gilt, aus genau dem gleichen Grund, auch für Funktionen mehrerer Veränderlicher:

Wenn die (differenzierbare) Funktion $F(x,y,\ldots,z)$ im Punkt $(x_0,y_0,\ldots,z_0)$ ein Maximum oder Minimum hat, müssen dort alle partiellen Ableitungen verschwinden:

$$F_x(x_0, y_0, \ldots, z_0) = F_y(x_0, y_0, \ldots, z_0) = \cdots = F_z(x_0, y_0, \ldots, z_0)\,.$$

Der Grund ist ebenso einfach wie im Fall einer Veränderlichen: Falls etwa $F_x(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ von Null verschieden ist, so ist für kleine Werte von h

$$F(x_0 + h, y_0, \ldots, z_0) \approx F(x_0, y_0, \ldots, z_0) + h \cdot F_x(x_0, y_0, \ldots, z_0)\,,$$

und das kann je nach Vorzeichen von h sowohl größer als auch kleiner als $F(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ sein. Daher kann F im

Punkt $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ weder ein Maximum noch ein Minimum haben.

Die Frage, wie man Maxima, Minima und sonstige Punkte, in denen alle partiellen Ableitungen verschwinden, voneinander unterscheiden kann, ist schwieriger; darauf möchte ich hier nicht eingehen, denn im einzigen Beispiel, für das noch Zeit bleibt, wird dies auch so klar sein:

Wir betrachten den einfachsten Fall einer Funktion, die von zwei Parametern abhängt: die lineare Funktion

$$u = f(a, b; t) = a \cdot t + b \ .$$

In der Statistik bezeichnet man die Anwendung der Maximum Likelihood Methode auf dieses Problem als *lineare Regression*. Da wir alles so einfach wie möglich halten wollen, nehmen wir zusätzlich an, daß alle Messungen (t_i, u_i) die gleiche Zuverlässigkeit haben, so daß es einfach darum geht, die Funktion

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (u_i - a \cdot t_i - b)^2$$

zu minimieren. Bevor wir diese Funktion nach den Parametern a und b ableiten, empfiehlt es sich, sie zunächst auszumultiplizieren und a und b auszuklammern:

$$\begin{aligned} F(a, b) = {} & \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + a^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + n \cdot b^2 - 2 \cdot a \cdot \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot t_i \\ & - 2 \cdot b \cdot \sum_{i=1}^{n} u_i + 2 \cdot a \cdot b \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i \ . \end{aligned}$$

Damit ist

$$F_a(a,b) = 2 \cdot a \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot t_i + 2 \cdot b \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i$$

und

$$F_b(a,b) = 2 \cdot n \cdot b - 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} u_i + 2 \cdot a \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i \,.$$

Da beide partielle Ableitungen verschwinden sollen, müssen beide Ausdrücke Null sein; nach Division durch zwei erhalten wir also die beiden Gleichungen

$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot u_i$$

$$\text{und} \qquad a \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} u_i \,.$$

Um b zu eliminieren, multiplizieren wir die zweite Gleichung mit $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$

$$a \cdot \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)$$

und subtrahieren dies von der ersten Gleichung:

$$a \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot u_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right) ,$$

d.h.

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot u_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2} .$$

Entsprechend läßt sich a eliminieren, wenn wir die erste Gleichung mit $\sum t_i$ und die zweite mit $\sum t_i^2$ multiplizieren, und wir erhalten

$$b = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot u_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^{n} t_i^2} .$$

Als Beispiel dazu können wir die Voraussagen des Sachverständigenrats über den realen Anstieg des Bruttosozialprodukt (in den alten Bundesländern) mit den tatsächlichen Zahlen vergleichen:

Jahr:	1982	1983	1984	1985	1986	1987
vorausgesagt:	$+\frac{1}{2}$	+1	$+2\frac{1}{2}$	+3	+3	+2
tatsächlich:	−1,1	+1,9	+3,1	+1,8	+2,2	+1,5

Jahr:	1988	1989	1990	1991	1992
vorausgesagt:	$+1\frac{1}{2}$	$+2\frac{1}{2}$	+3	+3	+2
tatsächlich:	+3,7	+4,0	+4,9	+3,6	+0,9

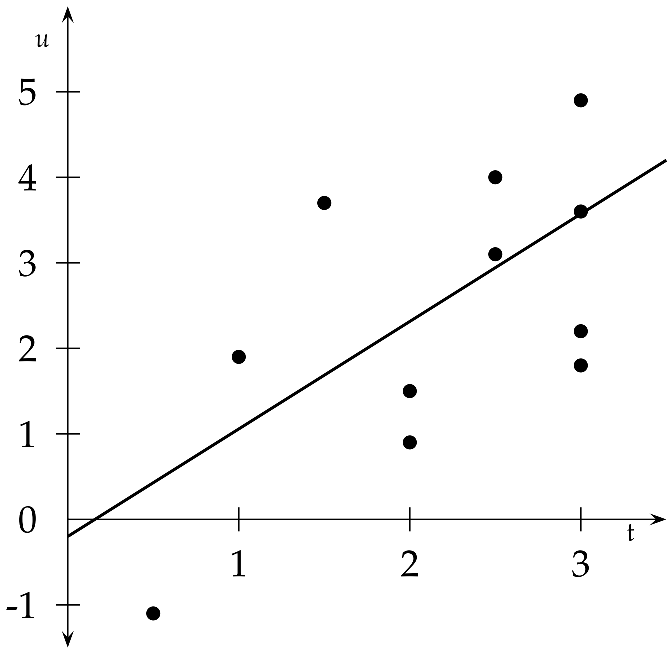
Mit t_i = *vorausgesagtes Wachstum* und u_i = *tatsächliches Wachstum* ergibt sich nach Einsetzen in die obigen Formeln $a \approx 1{,}2$ und $b = -0{,}2$; die wirklichen Zahlen liegen also im Durchschnitt etwa 20% höher als die vorausgesagten. Genauer können wir sagen, daß der Sachverständigenrat *Trends*, das heißt Veränderungen der Wachstumsrate, *unterschätzt*, denn $(u_i - u_j) = a \cdot (t_i - t_j)$ ist im Durchschnitt 20% größer als das vorhergesagte $(t_i - t_j)$, und daß er im übrigen einen gewissen Grundoptimismus hat, der durch die Subtraktion von 0,2 ausgeglichen werden muß.

Graphisch zeigt dies die Verteilung der Wertepaare für vorhergesagtes und tatsächliches Wachstum ist in der folgenden Abbildung; dort ist auch die Gerate $u = a \cdot t + b$ eingezeichnet. Wie man sieht, geht die Gerade zwar mitten durch die Punktwolke, aber viele Punkte liegen doch recht weit entfernt von ihr.

Dies stellt die Frage, wie man die Qualität der Ausgleichsgerade messen kann. Eine Antwort darauf liefert ein Argument, daß wir schon bei der Herleitung des Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes benutzt haben: Seien im folgenden $\bar{t}$ der Mittelwert der t_i und $\bar{u}$ der Mittelwert der u_i. Falls die u_i und die t_i aus voneinander unabhängigen Prozessen stammen, ist der Erwartungswert von

$$\sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar{t}) \cdot (u_i - \bar{u})$$

Null, da die Summen der $t_i - \bar{t}$ und der $u_i - \bar{u}$ jeweils Null sind. Falls aber im anderen Extrem $u_i = a \cdot t_i + b$ ist für alle i,



so ist $\bar{u} = a \cdot \bar{t} + b$ und

$$\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t}) \cdot (u_i - \bar{u}) = \sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t}) \cdot (a \cdot t_i - a \cdot \bar{t}) = a \cdot \sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2$$

eine (fast immer) positive Zahl, die eng mit der Standardabweichung der Verteilung der t_i zusammenhängt. Um sie weiter auszurechnen, beachten wir, daß

$$\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2 = a^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2$$

ist und damit

$$\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u}) = a^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2\right)^2$$

oder

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})} = a \cdot \sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2\,,$$

wobei im Zähler immer die nichtnegative Quadratwurzel gewählt werden soll. Damit ist also der Quotient

$$r = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})\cdot(u_i-\bar{u})}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})}}$$

gleich ± 1, je nach Vorzeichen von a, wenn alle $u_i = a \cdot t_i + b$ sind, und $r = 0$, wenn die u_i unabhängig von den t_i sind. Mit elementaren Grundkenntnissen der Vektorrechnung läßt sich zeigen, daß r immer zwischen -1 und $+1$ liegt, und auch ohne Vektorrechnung ist das eine zwar etwas längliche, aber nicht allzu schwierige Rechnung. Dieses r nennen wir den *Korrelationskoeffizienten;* sein Betrag gibt an, wie gut die Beziehung zwischen den u_i und den t_i durch eine Gerade beschrieben werden kann, während sein Vorzeichen angibt, ob diese Gerade ansteigt oder sinkt. Im obigen Zahlenbeispiel ist $r \approx 0{,}62$, die Approximation ist also eher mittelprächtig.