Auf der Suche nach Ordnung im Chaos – Ansätze der Mathematik

von Wolfgang K. Seiler

Auf der Suche nach Ordnung im Chaos ... Die Mathematik wäre sicherlich eine der populärsten Wissenschaften überhaupt, wenn sie in jedem Chaos dieser Welt eine Ordnung finden könnte, wenn sie die vielen chaotisch anmutenden Phänomene, mit denen wir täglich konfrontiert werden, erklärbar, verstehbar und vielleicht sogar steuerbar machen könnte. Tatsächlich kann natürlich auch die Mathematik nicht alle Probleme dieser Welt lösen; sie kann auch beim Thema Chaos nicht mehr und nicht weniger leisten als das, was sie auch sonst tut: Sie geht aus von einem klar definierten Problem und versucht, dieses zu lösen.

Gerade bei einem Schlagwort wie „Chaos“, das in den verschiedensten Zusammenhängen mit den verschiedensten Bedeutungen (und gelegentlich wohl auch ohne Bedeutung) benutzt wird, wäre es sinnlos, ohne klare Begriffsdefinition auch nur *irgend etwas* zu diesem Thema zu sagen; die erste Aufgabe dieses Beitrags muß also sein zu erklären, was überhaupt unter Chaos verstanden werden soll. Dem Leser bleibt überlassen, dann für sich selbst zu entscheiden, inwieweit dies mit seinen Vorstellungen von Chaos übereinstimmt – und ob die hier vorgestellte Theorie wirklich all das leisten kann, was ihr nachgesagt wird. Für eine Auswahl der wundertätigen Kräfte, die der Chaostheorie nach Überzeugung der wahren Gläubigen innewohnen, seien stellvertretend für viele andere Stimmen einige Aussagen aus dem Septemberheft einer großen deutschen Wissenschaftsillustrierten zitiert: Danach ist die Chaostheorie die „neue Dimension des Denkens“, „wird eine ähnliche Revolution in den Naturwissenschaften bewirken wie die Quantenmechanik zu Beginn des Jahrhundert“, holt die Mathematik „aus dem Elfenbeinturm“, hat „Die Börse fest im Griff“, gibt „Impulse für die deutsche Wirtschaft“ und „soll den wirtschaftlichen Aufschwung bringen“. Wir werden sehen.

1. Was ist Chaos?

1.1 Drei Beispiele

Drei einfache Beispiele sollen veranschaulichen, was hier unter Chaos verstanden werden soll und was nicht: Bei jedem der drei Diagramme in Abbildung 1 sind jeweils hundert Werte x_1 bis x_{100} aufgetragen; in der Sprache der Mathematik bezeichnet man solche Reihen aufeinanderfolgender Zahlen als *Zeitreihen.* Auf den ersten Blick schwanken alle drei Zeitreihen recht chaotisch hin und her; es fällt schwer, größere Unterschiede zwischen den drei Bildern zu sehen oder gar zu formulieren. Trotzdem ist nur eine dieser Zeitreihen im mathematischen Sinne chaotisch: Welche? Abb. 1

Wie wir sehen werden, bieten die hundert Werte x_1 bis x_{100} bereits genügend Anhaltspunkte für eine Antwort auf diese Frage. Der Begriff „Chaos“ wird aber klarer verständlich, wenn wir statt dessen zunächst von den Bildungsgesetzen der drei Zeitreihen ausgehen:

Bei der ersten Kurve ist

$$x_n = \cos n + \cos \sqrt{2}n + \cos \sqrt{10}n \, ;$$

x_n entsteht also einfach durch Addition von drei Kosinuswerten. Sicherlich wird niemand die sanft und regelmäßig hin- und herschwingende Kosinuslinie als chaotisch bezeichnen wollen, und so wäre es auch kaum zu rechtfertigen, die Überlagerung dreier Kosinuslinien mit verschiedenen Perioden so zu nennen. Da die drei hier betrachteten Perioden kein gemeinsames Vielfaches haben, insbesondere auch kein ganzzahliges, ist die Überlagerung dieser drei Kosinuslinien allerdings keine periodische Funktion mehr; eine solche Überlagerung endlich vieler periodischer Funktionen bezeichnet man als *quasiperiodisch.*

Die zweite Zeitreihe entstand durch Würfeln: Um mehr als nur sechs mögliche Werte für die x_n zu bekommen, würfelte ich mit zwei verschiedenfarbigen Würfeln und berechnete x_n als die Summe aus der Augenzahl des grünen und der sechsfachen Augenzahl des roten Würfels. Das Ergebnis liegt zwischen 7 und 42, wobei im Mittel jede Zahl zwischen diesen beiden Werten mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten sollte. Die Folge der hundert Werte x_1 bis x_{100} ist also rein zufällig und damit, sollte man meinen, so chaotisch, wie es nur geht. Tatsächlich redet ein Mathematiker aber auch hier *nicht* von Chaos: Die Mathematik zufälliger Phänomene, die *Stochastik,* hat ihre eigenen Gesetze und Probleme, die von denen, die ein Mathematiker dem Bereich „Chaos" zuordnet, völlig verschieden sind – auch wenn man es bei vielen Anwendungen mit einer Mischung von Zufall und Chaos zu tun hat.

Bleibt also noch die dritte Zeitreihe, die dann ja wohl chaotisch sein muß: Hier ist $x_1 = 0{,}123456789$ und dann jeweils

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)\,.$$

Wie im ersten Beispiel gibt es also auch hier eine klare Vorschrift, nach der jedes x_n berechnet werden kann; sie ist zwar etwas komplizierter als dort, aber natürlich kann jeder Computer in kürzester Zeit etwa den Wert x_{100} berechnen. Hier sind die Rechenergebnisse eines programmierbaren Taschenrechners, zweier PCs, einer *workstation,* eines Großrechners (mit zwei verschiedenen Rechengenauigkeiten) und des Supercomputers des Rechenzentrums der Universität Mannheim:

Rechner	*Ergebnis*
SHARP PC-1403	0,5014489803
PC/XT	0,7724279399
Atari ST	0,6516888142
HP9000/705	0,3680003583
IBM 4381-P12	0,7954374552
IBM 4381-P12*)	0,5657687146
KSR1	0,9815497216

*) *beim Rechnen mit doppelter Genauigkeit*

Trotz der eindeutigen Rechenvorschrift liefern die Computer also völlig verschiedene Ergebnisse! Zwar liegen die Zahlen alle zwischen null und eins, aber da dies für x_1 gilt und mit x_n auch $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$ zwischen null und eins liegt, war das auch ohne jede Rechnung klar. Dem wirklichen Wert von x_{100}, der laut Abbildung ziemlich nahe bei null liegt, kommt keiner der berechneten Werte sonderlich nahe; die Ergebnisse in obiger Tabelle sind also samt und sonders unbrauchbar.

1.2 Der Schmetterlingseffekt

Wie aber kann es kommen, daß verschiedene Computer bei exakt derselben Rechenvorschrift so unterschiedliche Ergebnisse liefern?

Der Grund liegt darin, daß keiner der verwendeten Computer die *exakten* Werte x_n berechnete: Wie allgemein beim numerischen Rechnen üblich, wurde jedes Zwischenergebnis auf eine vom Rechner abhängige Genauigkeit gerundet. In jedem Rechenschritt gab es also kleinere Rundungsfehler, wobei die Art der Rundung vom Rechner abhängt (und von der verwendeten Gleitkommaarithmetik und eventuell selbst da noch von zusätzlichen Parametern). Diese Fehler sind zwar nicht sehr groß, idealerweise höchstens eine Einheit der letzten darstellbaren Ziffer, aber selbst diese minimalen Abweichungen der einzelnen Computer voneinander genügen, um zu völlig verschiedenen Endergebnissen zu führen. Tatsächlich wäre es sogar nicht einmal notwendig, daß die Computer in *jedem* Rechenschritt einen Fehler machen: Schon ein kleiner Fehler im ersten Schritt würde ausreichen, um die Folge der weiteren Ergebnisse permanent zu verändern. *Diese* Art von Verhalten soll hier als chaotisch bezeichnet werden:

Ein deterministischer Vorgang heißt chaotisch, *wenn selbst minimale Veränderungen der Ausgangswerte zu extremen Veränderungen bei den späteren Werten führen.*

Eines der bekanntesten Beispiele für ein chaotisches System lieferten die Computersimulationen des amerikanischen Meteorologen EDWARD N. LORENZ Anfang der sechziger Jahre **[Lor1]**: Bei der numerischen Simulation eines stark vereinfachten Konvektionsmodells fand LORENZ zu seiner Überraschung nichtperiodische Lösungen (er erwähnt in seiner Arbeit, daß ihn erst sein Kollege SALTZMANN auf die grundsätzliche Möglichkeit solcher

Lösungen hinweisen mußte), und er mußte außerdem feststellen, daß sich seine Ergebnisse nicht reproduzieren ließen, wenn er Zwischenergebnisse für Kontrollrechnungen nur in gerundeter Form eintippte: Der geringe Rundungsfehler bei der Eingabe des Startwerts reichte bereits aus, um das Langzeitverhalten des Systems grundlegend zu verändern.

Falls das gleiche Phänomen auch in der wirklichen Atmosphäre auftritt, können also minimale Veränderungen etwa des Luftdrucks oder der Temperatur auf längere Sicht zu einer völlig anderen Entwicklung des Wetters führen – eine Idee, die vielen Meteorologen damals als zu phantastisch erschien um ernstgenommen zu werden: Als LORENZ am 22. Januar 1963 seine Ergebnisse vor der New York Academy of Sciences vortrug **[Lor2]**, schloß er seinen Vortrag mit den Worten:

Als die Instabilität eines gleichförmigen Flusses gegenüber infinitesimalen Störungen erstmals als eine Erklärung für das Auftreten von Zyklonen und Antizyklonen in der Atmosphäre vorgeschlagen wurde, wurde diese Idee nicht allgemein akzeptiert. Ein Meteorologe bemerkte, daß, falls die Theorie korrekt wäre, ein Flügelschlag einer Möwe ausreichte, um die Entwicklung des Wetters für immer zu verändern. Die Kontroverse ist noch nicht entschieden, aber die neueste Evidenz scheint für die Möwen zu sprechen.

Inzwischen ist der Sieg der Möwen bekanntlich allgemein anerkannt; man fordert sogar nicht einmal mehr den relativ kräftigen Flügelschlag einer Möwe, um das Wetter permanent zu verändern: Im Dezember 1972 hielt LORENZ vor der American Association for the Advancement of Sciences in Washington, DC, einen Vortrag mit dem Titel „Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil set off a Tornado in Texas", und seitdem geht das Wort vom *Schmetterlingseffekt* um die Welt (*vgl.* **[Hln]**, *Seite 40*).

1.3 Warum ist Beispiel 3 chaotisch?

Im allgemeinen ist es sehr schwierig, einem System nur anhand seiner Gleichungen anzusehen, ob es sich im obigen Sinne chaotisch verhält oder nicht. Das hier betrachtete Beispiel allerdings hat den Vorteil, daß man mit einem kleinen Trick genau sehen kann, was passiert:

Da alle Werte x_n zwischen null und eins liegen, gibt es zu jedem Wert x_n einen Winkel α_n zwischen 0° und 90°, so daß $x_n = \sin^2 \alpha_n$ ist. Nach den aus der Schule bekannten Rechenregeln für trigonometrische Funktionen ist dann

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 4x_n(1-x_n) = 4\sin^2\alpha_n(1-\sin^2\alpha_n) \\ &= 4\sin^2\alpha_n\cos^2\alpha_n = (2\sin\alpha_n\cos\alpha_n)^2 \\ &= \sin^2(2\alpha_n)\,, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Additionsregel für den Sinus folgt:

$$\sin(2\alpha_n) = \sin(\alpha_n+\alpha_n) = 2\sin\alpha_n\cos\alpha_n\,.$$

Somit ist $x_{n+1} = \sin^2\alpha_{n+1} = \sin^2(2\alpha_n)$. Daraus folgt allerdings noch nicht, daß $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n$ ist, denn α_{n+1} soll ja zwischen 0° und 90° liegen. Nun ist aber $\sin(180° - 2\alpha_n) = -\sin(2\alpha_n)$, die Quadrate sind also gleich, und mindestens einer der beiden Winkel $2\alpha_n$ und $180° - 2\alpha_n$ liegt zwischen 0° und 90°. Damit ist

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} 2\alpha_n & \text{falls } 0° \le \alpha_n \le 45° \\ 180° - 2\alpha_n & \text{falls } 45° \le \alpha_n \le 90°\,. \end{cases}$$

Graphisch ist der Zusammenhang zwischen α_n und α_{n+1} in Abbildung 2 dargestellt. Abb. 2

α_{n+1} durchläuft also bereits den gesamten Bereich von 0° bis 90°, wenn α_n nur zwischen 0° und 45° oder zwischen 45° und 90° variiert. Etwaige Fehler von α_n werden somit in jedem Schritt verdoppelt, womit klar ist, daß kleine Fehler der Ausgangswerte schon nach wenigen Schritten zu gewaltigen Störungen anwachsen: Die Folge der α_n und damit auch die der $x_n = \sin^2\alpha_n$ ist also in der Tat chaotisch.

Anschaulich wird dies besonders klar, wenn man den Zusammenhang zwischen α_n und höheren Iterierten, zunächst etwa α_{n+2}, aufzeichnet: Da α_{n+1} das Einheitsintervall *zweimal* durchläuft, wenn α_n dies einmal tut, muß α_{n+2} das Intervall *viermal* durchlaufen, und zwar je zweimal vorwärts und rückwärts. Wir erhalten also die in Abbildung 3 dargestellten zwei Zacken anstelle des einen Zacken von Abbildung 2. Entsprechend hat das Bild, das α_{n+3} in Abhängigkeit von α_n darstellt vier Zacken, für α_{n+4} gibt es acht und für α_{n+5} schließlich die in Abbildung 4 dargestellten sechzehn Zacken. Abb. 3 Abb. 4

Natürlich hängt dabei der Wert von α_{n+5} nicht davon ab, unter *welchem* der Zacken α_n liegt, sondern nur davon, wo es *relativ zum Beginn* des Zackens liegt. Daraus läßt sich ein quantitatives Maß für das chaotische Verhalten der Zeitreihe bestimmen:

Schreiben wir $\alpha_n = \theta_n \cdot 90°$ mit $0 \leq \theta_n \leq 1$, so ist

$$\theta_{n+1} = \begin{cases} 2\theta_n & \text{falls } 0 \leq \theta_n \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2\theta_n & \text{falls } \frac{1}{2} \leq \theta_n \leq 1\,. \end{cases}$$

Graphisch sieht der Zusammenhang zwischen θ_n und θ_{n+1} oder θ_{n+2} *usw.* natürlich genauso aus wie der zwischen den entsprechenden αs, nur daß die Achsen etwas anders beschriftet sind.

Als nächstes schreiben wir θ_n nicht im Zehnersystem, sondern im *Zweiersystem,* d.h. wir betrachten nicht die Dezimalziffern $d_1, d_2, d_3, \ldots$, für die

$$\theta_n = 0, d_1 d_2 d_3 \ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \frac{d_3}{1000} + \cdots$$

ist, sondern diejenigen Zahlen $b_1, b_2, b_3, \ldots$, für die

$$\theta_n = (0, b_1 b_2 b_3 \ldots)_2 = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{4} + \frac{b_3}{8} + \cdots$$

ist. Genau wie die Dezimalziffern nur Zahlen zwischen 0 und 9 sein können, sind als Binärziffern nur die beiden Zahlen 0 und 1 zugelassen. Beispielsweise ist also

$$\frac{1}{4} = (0, 01)_2, \quad \frac{3}{8} = (0, 011)_2, \quad \frac{1}{3} = (0, 0101010101 \ldots)_2$$

und so weiter. In dieser Darstellung ist $\theta_n < \frac{1}{2}$ genau dann, wenn die erste Ziffer $b_1 = 0$ ist; die erste Binärziffer von θ_n gibt also an, ob α_{n+2} unter dem ersten oder dem zweiten der beiden Zacken liegt, und die restlichen Ziffern geben an, wo es relativ zum Beginn des Zackens liegt. α_{n+2} ist somit unabhängig von der ersten Binärziffer von θ_n, es hängt nur ab von der zweiten und den dahinter stehenden Ziffern. Entsprechend überlegt man sich leicht, daß α_{n+3} nur von den Binärziffern ab der dritten abhängt, α_{n+4} nur von denen ab der vierten *usw.*

Bei einer numerischen Simulation muß man notgedrungen mit einer festen Anzahl N von Binärziffern rechnen; von θ_1 sind also N Ziffern bekannt, wobei der berechnete Wert von α_2 nur von den $N-1$ letzten und der von α_3 nur von den $N-2$ letzten abhängt *usw.* Aus der Kenntnis des berechneten Werts von α_2 lassen sich also nur noch $N-1$ der Ziffern von θ_1 rekonstruieren, aus der von α_3 nur noch $N-2$ *usw.* Mit anderen Worten: *Wir verlieren pro Iteration eine der Binärziffern von* θ_1, bis schließlich nach N Iterationen alle Ziffern aufgebraucht sind und das weitere Verhalten des Systems nur noch von der Rundungsfunktion des Computers abhängt.

Da $2^{10} = 1024 \approx 1000 = 10^3$ ist, entsprechen *zehn* Binärstellen etwa *drei* Dezimalstellen, in Dezimalstellen ausgedrückt verlieren wir daher alle zehn Iterationen drei Stellen, nach hundert Iterationen also etwa dreißig – falls wir θ_1 überhaupt mit dieser Genauigkeit kannten.

Für die ursprünglich betrachtete Folge der

$$x_n = \sin^2 \alpha_n = \sin^2(\theta_n\, 90^\circ)$$

sollte in etwa dasselbe gelten; da keiner der verwendeten Computer auch nur annähernd mit dreißigstelliger Genauigkeit rechnete, ist klar, daß die für x_{100} berechneten Werte in der Tat nur vom Computer abhängen, nicht aber vom tatsächlichen, mathematisch korrekten Wert.

Dieser korrekte Wert läßt sich natürlich trotzdem mit beliebiger vorgegebener Genauigkeit berechnen: Nachdem wir wissen, daß im Verlauf der Rechnung etwa dreißig Dezimalstellen verlorengehen, müssen wir nur mit so vielen Stellen rechnen, daß nach diesem Verlust immer noch genügend viele geltende Ziffern übrigbleiben; für zehnstellige Genauigkeit des Endergebnisses sollten wir also die Rechnung mit mindestes vierzigstelliger Genauigkeit durchführen. Da *a priori* nicht ganz klar ist, wie sich der Genauigkeitsverlust der α_n über die Sinusfunktion auf die x_n überträgt, und um noch etwas Spielraum für Rundungsfehler zu erlauben, empfiehlt es sich, zur Vorsicht lieber etwas genauer zu rechnen: Mit hundert geltenden Ziffern gerechnet erhält man

$$x_{100} \approx 0{,}018312069896117626026\,.$$

Auch die chaotische Abhängigkeit vom Ausgangswert läßt sich nun leicht demonstrieren: Startet man statt mit $x_1 = 0{,}123456789$ mit $x_1 = 0{,}1234567891$, so ergibt die gleiche Rechnung

$$x_{100} \approx 0{,}95676417030637668081 6\,,$$

der Wert liegt also am anderen Ende des Einheitsintervalls. Wiederholt man die beiden Rechnungen zur Kontrolle mit tausendstelliger Genauigkeit, erhält man Ergebnisse, die sich um etwa anderthalb Einheiten *bzw.* eine Drittel Einheit der 74. Stelle von denen unterscheiden, die mit hundertstelliger Genauigkeit berechnet wurden; der tatsächliche Genauigkeitsverlust beträgt in diesem Beispiel also 26 bis 27 Ziffern.

2. Wie erkennt man Chaos?

Die Definition des Begriffs „Chaos“ aus dem vorigen Paragraphen läßt sich nur anwenden, wenn eine mathematische Formel bekannt ist, nach der sich eine Zeitreihe nach Art der drei Kurven aus Abbildung 1 berechnen läßt oder wenn es sonst eine Möglichkeit gibt, die Ausgangswerte systematisch zu variieren, um dann das Verhalten künftiger Werte zu untersuchen. Bei experimentellen Untersuchen ist dies nicht immer möglich; oft sind die Daten x_1 bis x_{100} die einzige Arbeitsgrundlage. In diesem Paragraphen soll es darum gehen, wie man diesen Daten ansehen kann, welcher der drei Verhaltenstypen aus Abbildung 1 vorliegt.

2.1 Harmonische Analyse

Am einfachsten ist dies bei der Quasiperiodizität: Hier muß nur ein Signal, das durch Überlagerung mehrerer periodischer Schwingungen entstanden ist, wieder in seine periodischen Bestandteile zerlegt werden – eine Aufgabe, die jedes Radio- oder Fernsehgerät durchführt, um aus einem komplexen elektromagnetischen Feld die Frequenz des eingestellten Senders herauszufiltern. Dieses „Herausfiltern“ der einzelnen Frequenzen läßt sich auch rein mathematisch bewerkstelligen mittels der sogenannten *harmonischen Analyse,* deren erste Anfänge bis 1730 zurückgehen und die ab etwa 1810, also lange vor Entdeckung der elektromagnetischen Wellen, von dem französischen Mathematiker JEAN-BAPTISTE JOSEPH FOURIER perfektioniert wurde; sie gehört heute zum Standardwissen jedes Mathematikers, Physikers oder

Technikers. Für die drei Beispiele von Abbildung 1 zeigt Abbildung 5 die Beiträge der einzelnen Frequenzen: Bei der ersten Kurve sind klar drei Spitzen erkennbar, entsprechend den drei Kosinusfunktionen, aus denen sich x_n zusammensetzt. Es mag zunächst überraschen, daß es außer diesen drei Spitzen noch weitere Beiträge gibt, aber das liegt natürlich daran, daß die endliche Zeitreihe $x_1, \ldots, x_{100}$ nicht wirklich periodisch ist, sondern bei x_1 plötzlich beginnt und nach x_{100} ebenso plötzlich wieder abbricht. Eine solche Ausschnittbildung führt dazu, daß anstelle einer klar definierten Spitze eine abklingende Sinusschwingung der Form $\sin(ax)/x$ zu sehen ist – ein wohlbekanntes und leicht erkennbares Phänomen. Abb. 5

Bei den beiden anderen Zeitreihen zeigt die harmonische Analyse keine klare Bevorzugung einiger weniger Frequenzen, diese Reihen sind also nicht quasiperiodisch.

2.2 Gesetze des Zufalls

Auch das zweite Beispiel, bei dem die Zeitreihe gewürfelt wurde, hat seine eigenen Gesetze: Die Statistik kennt zahlreiche Testverfahren, um zufällige Zeitreihen zu erkennen und zu klassifizieren. Da die meisten dieser Verfahren nur mit Grundkenntnissen der Statistik verständlich sind, möchte ich statt dessen eine Eigenschaft zufälliger Zeitreihen betrachten, die zwar nur mit sehr großem Aufwand und bei sehr langen Zeitreihen überprüft werden kann, die aber dafür auch jedem mathematischen Laien wohlbekannt ist:

Beim Würfeln fällt (idealerweise) jede Augenzahl zwischen eins und sechs mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Trotzdem wird man bei zehn Würfen schon mit ziemlicher Sicherheit erwarten, daß die *durchschnittliche* Augenzahl zwischen drei und vier liegt; betrachtet man alle $6^{10} = 60\,466\,176$ Möglichkeiten für die Ergebnisse von zehn Würfelversuchen, so ist dies in etwa zwei Drittel aller Fälle so. Bei hundert Versuchen liegt die entsprechende Wahrscheinlichkeit schon bei 99,7%, und in zwei Drittel aller Fälle liegt der Mittelwert zwischen 3,33 und 3,66. Bei tausend Würfen schließlich wird man erwarten, daß der Mittelwert noch näher beim mittleren Wert 3,5 liegt *usw.* Die mathematische Rechtfertigung für diese Erwartungen ist das *Gesetz der großen Zahlen,* wonach sich die Schwankungsbreite des Mittelwerts etwa halbiert, wenn die Anzahl der Einzelwerte vervierfacht wird, oder – anders ausgedrückt – mit hundert mal so vielen Werten kann man ungefähr eine Dezimalstelle mehr des Mittelwerts vorhersagen. Dieses Gesetz gilt um so genauer, je größer die Anzahl dieser Einzelwerte ist.

Berechnet man dieselben Mittelwerte für ein chaotisches System, so kann die chaotische Dynamik des Systems der Eingrenzung der Mittelwerte entgegenwirken; Computerexperimente des japanischen Physikers KUNIHIKO KANEKO **[Kan]** mit einer leicht modifizierten Version der dritten Zeitreihe aus Abbildung 1 deuten an, daß dies wohl in der Tat der Fall ist. Bei der deterministischen, nicht chaotischen ersten Zeitreihe dagegen ist die Schwankungsbreite der Mittelwerte geringer als beim Würfeln: Da der Mittelwert einer Kosinusfunktion über jede Periode null ist, entsteht hier bei der Mittelwertbildung nur dadurch ein von null verschiedener Wert, daß die betrachteten Werte im allgemeinen nicht regelmäßig auf die Perioden verteilt sind; die entsprechenden Fehler schwanken um null hin und her, wobei sich die Amplitude dieser Schwingung langfristig bereits bei Verdopplung der Anzahl der x_n halbiert.

Somit läßt sich ein stochastischer Vorgang beispielsweise daran erkennen, daß er das Gesetz der großen Zahlen erfüllt. Das ist zwar, wie gesagt, kein sehr praktikables Verfahren, denn der notwendige Rechenaufwand und die Zahl der benötigten Daten sind viel zu groß, aber die Statistik kennt noch zahlreiche andere, mit deutlich geringerem Rechenaufwand durchführbare Tests, die im allgemeinen eine recht zuverlässige Antwort darauf geben können, ob eine Zeitreihe zufällig ist oder nicht.

2.3 Gesetze des Chaos

Schließlich hat auch die dritte Zeitreihe ihre eigenen spezifischen Gesetze – wie bei einer deterministischen Reihe ja auch nicht anders zu erwarten ist. In der Tat kann man schon mit bloßem Auge eine Besonderheit dieser Reihe erkennen: Sobald ein x_n in die Nähe der Eins kommt, liegt x_{n+1} nahe bei der Null, die Kurve geht also zwischen x_n und x_{n+1} steil nach unten. Ist dagegen x_n hinreichend nahe bei null, so bleiben auch noch eine ganze Reihe der folgenden x_m in der Umgebung der Null, die Kurve steigt also zunächst nur sehr langsam an. Dadurch unterscheidet sich die dritte Zeitreihe fundamental von der zweiten: Wenn beim n-ten Würfeln zwei Sechser fallen, sind trotzdem beim $(n+1)$-ten Wurf wieder alle Zahlenkombinationen gleich wahrscheinlich, die Kurve kann den oberen Bereich also beliebig steil oder flach wieder verlassen.

Der deterministische Zusammenhang zwischen x_n und x_{n+1} bei der dritten Zeitreihe läßt sich am einfachsten dadurch aus der Folge der x_n zurückgewinnen, daß man die Punkte (x_n, x_{n+1}) in einem kartesischen (x, y)-Koordinatensystem aufträgt *(s. Abb. 6)*: Natürlich liegen alle Punkte auf der Parabel $y = 4x(1 - x)$. Die entsprechenden Bilder für die beiden anderen Zeitreihen in den Abbildungen 7 und 8 sehen sehr viel „zweidimensionaler" aus, ein qualitativer Eindruck, der sich auch quantitativ fassen läßt – zumindest wenn hinreichend viele Punkte zur Verfügung stehen: Dazu unterteilen wir die Quadrate in den Abbildungen 6 bis 8 in jeweils r^2 kleinere Quadrate, deren Kantenlänge nur $1/r$ der vollen Kantenlänge ist; der Fall $r = 4$ ist in den Abbildungen durch dünne durchgezogene Linien markiert. In Abbildung 6 verteilen sich die eingezeichneten Punkte auf acht der sechzehn kleinen Quadrate, während in Abbildung 8 *alle* und in Abbildung 7 alle bis auf eines der kleinen Quadrate Punkte enthalten. Noch deutlicher wird der Unterschied, wenn man den durch gestrichelte Linien markierten Fall $r = 8$ betrachtet: Jetzt enthalten nur noch neunzehn der vierundsechzig Quadrate aus Abbildung 6 einen Punkt, wohingegen in den Abbildungen 7 und 8 immer noch 44 *bzw.* 52 Quadrate besetzt sind, also etwa so viele, wie man bei einer zufälligen Verteilung von nur 99 Punkten noch erwarten kann. Eine weitere Unterteilung ist bei so wenigen Punkten nicht mehr sinnvoll, aber selbst wenn erheblich mehr Punkte eingezeichnet wären, lägen diese in Abbildung 6 alle auf der Parabel; bei immer weiterer Unterteilung würde die Anzahl der von der Parabel berührten Quadrate schließlich *linear* in r ansteigen. Bei der hier betrachteten zufälligen Reihe gibt es nur 36×36 mögliche Punkte – eine diskrete Struktur, die in Abbildung 8 bei genauem Hinsehen bereits erkennbar ist. Wenn man aber mit mehr als zwei Würfeln arbeitet, so daß man eine im Vergleich zu den betrachteten Werten von r große Anzahl möglicher Würfelergebnisse bekommt, wird nach hinreichend vielen Würfen wieder jedes oder fast jedes Quadrat besetzt sein, die Anzahl der besetzten Quadrate steigt also bei hinreichend kontinuierlich gewählten Zufallswerten mit r^2.

Abb. 6

Abb. 7

Abb. 8

Bei beliebigen Punkteverteilungen kann die Anzahl der besetzten Quadrate statt mit r oder r^2 auch mit irgendeiner *beliebigen* Potenz r^d mit d zwischen

0 und 2 ansteigen; das jeweils berechnete d bezeichnet man als *fraktale Dimension* der Punktmenge. (Eine ähnliche fraktale Dimension definierte erstmals 1919 der deutsche Mathematiker FELIX HAUSDORFF.) Nach den obigen Überlegungen hat die Menge der Paare (x_n, x_{n+1}) also die fraktale Dimension zwei, falls alle x_n zufällig gewählt werden, wohingegen die fraktale Dimension für Beispiel 3 nur eins ist. Dies muß allerdings nicht bei jedem Fall von deterministischem Chaos so sein: Der Wert von x_n kann nicht nur von x_{n-1}, sondern auch noch von x_{n-2} und eventuell noch früheren Werten abhängen, was die fraktale Dimension im allgemeinen erhöht, und die Abhängigkeit kann auch so komplex sein, daß die fraktale Dimension ihrem Namen gerecht wird und keine ganze Zahl mehr ist: Sie kann jeden beliebigen Wert zwischen null und zwei annehmen.

Die fraktale Dimension läßt sich dazu benutzen, um auch in komplizierteren Fällen eine deterministische Zeitreihe von einer zufälligen zu unterscheiden: Man betrachtet die Paare (x_n, x_{n+1}) oder, allgemeiner, die Tupel $(x_n, x_{n+1}, \ldots x_{n+k})$ für geeignete Werte von k; bei zufälliger Verteilung der x_n sollte die fraktale Dimension der so entstehenden Punktmenge ziemlich genau gleich der Dimension $k + 1$ des Einbettungsraums sein, während deterministische Zeitreihen zu Punktmengen kleinerer Dimension führen sollten.

Erkennen läßt sich mit dieser Methode allerdings nur die *Gesetzmäßigkeit* der Zeitreihe, nicht aber ihre *Chaotizität:* Auch bei Zeitreihen, die schließlich periodisch werden, können genauso einfache Kurven auftreten wie die Parabel $y = 4x^2$. Wie wir weiter unten sehen werden, kann eine wie in Beispiel 3 definierte Zeitreihe, bei der nur der Faktor vier durch eine andere Zahl λ ersetzt wird, für geeignete Werte von λ auf periodische Zeitreihen mit beliebig langer Periode führen, und natürlich liegen auch für diese Zeitreihen alle Wertepaare (x_n, x_{n+1}) auf einer Parabel! Es ist also zusätzlich notwendig, solche Fälle auszuschließen. Auch dazu gibt es Verfahren; mit größerem mathematischem Aufwand kann man beispielsweise auch die sogenannten LYAPUNOV-Exponenten schätzen, die den „Verlust von geltenden Ziffern“ quantisieren und somit direkt mit der Definition von Chaos zusammenhängen. (Für einen Überblick über verschiedene Methoden zum Erkennen von Chaos und eine Diskussion ihrer Vor- und Nachteile sei etwa auf **[Bu]** verwiesen.) Oft wird man sich auch damit begnügen, quasiperiodisches Verhalten durch harmonische Analyse auszuschließen, denn einen wirklichen Beweis liefert ohnehin keines dieser Verfahren: Eine Zeitreihe könnte beispielsweise zwar periodisch sein, aber mit einer Periode, die größer ist als die Anzahl der zur Verfügung stehenden x_n. Ein typisches Beispiel einer Zeitreihe, die viele Tests in die Irre führt, ist ein (Pseudo-)Zufallszahlengenerator: Hierbei handelt es sich um eine Rechenvorschrift, die eine Reihe von Zahlen erzeugt, die sich so verhalten soll, als sei sie zufällig. Die so erzeugte Zeitreihe ist wegen der Endlichkeit des Rechners stets periodisch, und sie ist, da sie auf einer Rechenvorschrift beruht, strikt deterministisch. Trotzdem wird ein *guter* Zufallsgenerator die meisten gängigen Tests auf Zufälligkeit problemlos meistern; er wird wegen seiner großen Periodenlänge nicht mit realistischem Rechenaufwand als periodisch erkannt werden, und – da er ja auch dazu verwendet wird, um Punkte in höherdimensionalen Räumen zu erzeugen – wird er zumindest für nicht zu große Einbettungsdimensionen alle Dimensionen des Einbettungsraums ausfüllen. Zwar sind *gute* Zufallsgeneratoren leider sehr viel seltener als Tests, mit denen die schlechten leicht entlarvt werden können, aber es gibt sie, und man muß immer darauf gefaßt sein, daß die experimentelle Untersuchung einer Zeitreihe mit den gängigen Tests gelegentlich zu falschen Ergebnissen führen kann.

2.4 Anwendungen

Von den vielen Zeitreihen, die mit Methoden wie denen aus den letzten drei Abschnitten untersucht wurden, sollen hier nur exemplarisch drei Beispiele vorgestellt werden; die ersten beiden können auch ausführlicher in **[Ca]** nachgelesen werden.

Der Psychologe T. HANNAH bat Testpersonen, ihren Gemütszustand in regelmäßigen Abständen (15 *bzw.* 30 Minuten) durch eine Zahl zu beschreiben. In **[Han]** untersucht er die so erhaltenen Zeitreihen, indem er jeweils die Quadrupel aus vier aufeinanderfolgenden Werten in den vierdimensionalen Raum einbettet und die fraktale Dimension der resultierenden Menge berechnet; sie liegt jeweils zwischen 1,68 und 1,84. Damit ist diese Zeitreihe nicht rein zufällig (was einer fraktalen Dimension von vier entspräche), sondern ist zumindest teilweise durch eine deterministische Komponente gesteuert – was natürlich von vornherein zu hoffen war: Es wäre fürchterlich, wenn alle unsere Stimmungen durch rein zufällig auftretende Launen gesteuert würden. HANNAH untersucht leider nicht, inwieweit seine Zeitreihen von periodischen Vorgängen beeinflußt sind, jedoch sollte man erwarten, daß auch chaotische Vorgänge eine Rolle spielen: Zwar ist es sicherlich ein nichtchaotischer Vorgang, wenn die Zornesröte ins Gesicht schießt, wenn aber anschließend die Erregung wieder abgebaut wird, soll natürlich nicht – um im Bild zu bleiben – die Zornesröte nun in den linken Fuß schießen, sondern die aufgestaute Erregung muß möglichst schnell und unschädlich abgebaut werden. Hierfür ist eine chaotische Dynamik ideal, denn da nichts in der Natur völlig homogen ist, sorgt sie durch die extreme Verstärkung kleinster Unterschiede für eine möglichst weitgefächerte Streuung und damit für die Aufteilung der Erregung in kleine, unschädlich abbaubare Portionen.

Chaos in Zeitreihen aus Wirtschaftsdaten untersuchen beispielsweise die kanadischen Ökonomen M. FRANK und T. STENGOS in **[F-S]**. Diese Arbeit gibt sowohl eine ausführliche Übersicht über Verfahren zum Erkennen von Chaos (darunter auch vielen, die hier nicht erwähnt sind) als auch eine Übersicht über vorliegende empirische Studien. Ausführlich behandeln die Autoren die täglichen Schwankungen des Goldpreises: Sie betrachten die Mengen aller Tupel $(x_i, \ldots, x_{i+n})$ für verschiedene n und erhalten folgende fraktale Dimensionen d:

n	5	10	15	20	25
d	1,11	2,45	3,83	5,41	6,31

Daraus und aus weiteren Test können sie schließen, daß der Goldpreis auch nichtlinearen deterministischen Einflüssen unterliegt.

Auch auf das Wahlverhalten wurden entsprechende Methoden der Zeitreihenanalyse schon angewandt: S. COLEMAN **[Co]** fand bei seiner Untersuchung von Ergebnissen politischer Wahlen in Deutschland, Japan, USA und Kanada hauptsächlich periodische Strukturen, zumindest bei den Wahlen im US-Bundesstaat Alabama allerdings auch Hinweise auf Chaotizität.

3. Chaos in dynamischen Systemen

In den Naturwissenschaften werden Probleme meist nicht durch Zeitreihen beschrieben, sondern durch kontinuierliche Prozesse; Chaos in naturwissenschaftlichen Anwendungen muß sich also auf solche Prozesse beziehen. Das *mathematische* Problem besteht meist darin, daß man aus den bekannten Regeln für die Entwicklung des Systems *im nächsten Augenblick* Aussagen über das *Langzeitverhalten* herleiten möchte.

Ist $y(t)$ eine von der Zeit abhängige Variable, die eine Eigenschaft des betrachteten Systems beschreibt, so ist für hinreichend kleine Zeitdifferenzen h

$$y(t+h) \approx y(t) + h y'(t)\,;$$

die Kenntnis des Systems im nächsten Augenblick besteht also darin, daß man die Ableitung $y'(t)$ in Abhängigkeit vom jetzigen Zustand des Systems berechnen kann. Eine solche Berechnungsvorschrift bezeichnet man in der Mathematik als *Differentialgleichung* oder, falls die zeitlichen Ableitungen mehrerer Variablen auf diese Weise ausgedrückt werden, als System von Differentialgleichungen. In beiden Fällen spricht man auch – mit Blick auf die für die historische Entwicklung besonders wichtigen Anwendungen in der Mechanik – von einem *dynamischen System.* Die zu lösende Aufgabe besteht darin, aus der Kenntnis des Anfangszustands eines solchen Systems, also etwa des Zustands zur Zeit $t = 0$, für jeden beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ die Werte aller Variablen für diesem Zeitpunkt zu bestimmen. Die obige Chaosdefinition läßt sich problemlos auch auf diese Situation übertragen: Die Funktion $y(t)$ verhält sich chaotisch, wenn minimale Veränderungen des Ausgangswerts $y(0)$ und gegebenenfalls auch der anderen Systemvariablen zum Zeitpunkt $t = 0$ zu großen Abweichungen bei hinreichend positiven Werten von t führen.

3.1 Grundtypen dynamischen Verhaltens

Die zeitliche Entwicklung eines Systems, dessen Zustand durch nur zwei Variablen $x(t)$ und $y(t)$ beschrieben werden kann, läßt sich anschaulich durch eine Kurve in der (x, y)-Ebene beschreiben. Wenn sich das System zum Zeitpunkt t im Zustand $\big((x(t), y(t)\big)$ befindet, hängt sein weiteres Verhalten nur von diesem Zustand ab, die Ableitungen $x'(t)$ und $y'(t)$ können daher als Funktionen von $x(t)$ und $y(t)$ ausgedrückt werden:

$$x'(t) = F\big(x(t), y(t)\big) \quad \text{und} \quad y'(t) = G\big(x(t), y(t)\big)$$

mit geeigneten Funktionen F und G.

Es ist selbstverständlich unmöglich, einen Überblick über die Vielfalt möglicher Lösungskurven eines solchen Systems zu gewinnen; für das *Langzeitverhalten* des Systems, das Verhalten von $x(t)$ und $y(t)$ für große t also, gibt es aber erstaunlicherweise nur einige wenige leicht zu veranschaulichende Grundtypen:

Am einfachsten ist die Situation, wenn die ganze Lösungskurve nur aus einem Punkt (x_0, y_0) besteht, wenn also $x(t) = x_0$ und $y(t) = y_0$ ist für alle t. Eine solche Lösung bezeichnet man als *Gleichgewichtslösung,* der Punkt (x_0, y_0) entsprechend als *Gleichgewichtspunkt.* Da dann die Ableitungen nach der Zeit verschwinden, ist für diesen Punkt $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$.

Ein einfaches Beispiel für eine Gleichgewichtslösung liefert das Pendel: Stellen wir uns einen dünnen Stab vor, der am einen Ende so aufgehängt ist, daß er ungehindert hin- und herschwingen kann; am anderen Ende sei ein Gewicht befestigt. Als Variablen x und y kann man beispielsweise die Auslenkung des Pendels aus seiner Ruhelage und seine Geschwindigkeit betrachten. Offensichtlich ist das System im Gleichgewicht, wenn beide gleich null sind: Das Pendel hängt einfach senkrecht nach unten. Nach allgemeiner Lebenserfahrung wird diese Ruhelage auch aus jeder anderen Lage heraus nach mehr oder weniger langer Zeit erreicht: Wenn das Pendel nicht immer wieder angestoßen wird, muß jede Schwingung einmal abklingen, und das Pendel wird, zumindest für alle praktischen Zwecke, unbeweglich nach unten hängen.

Rein mathematisch betrachtet gibt es allerdings noch eine zweite Ruhelage, nämlich wenn das Pendel senkrecht nach *oben* steht: Hier ist die Auslenkung gleich 180° und die Geschwindigkeit natürlich wieder gleich null. Mit etwas Geschicklichkeit kann man für geeignete Pendel auch dieses Gleichgewicht herbeiführen, allerdings wird das Pendel erfahrungsgemäß nicht sehr lange in dieser Position bleiben. Abb. 9

Der Grund liegt natürlich darin, daß ein schwingendes Pendel kein isoliertes System ist, sondern ständig von außen durch kleinere Störungen beeinflußt wird. Sobald eine solche Störung das Pendel auch nur geringfügig aus der oberen „Ruhelage" entfernt, wird es aufgrund seiner Eigendynamik diese Störung sofort verstärken und nach unten schwingen. In der Mathematik bezeichnet man ein solches Gleichgewicht als *instabil* oder *abstoßend,* wohingegen ein Gleichgewichtspunkt wie die untere Ruhelage des Pendels als *stabil* oder *anziehend* bezeichnet wird. Ein stabiles Gleichgewicht verkraftet auch kleinere Störungen, indem diese durch die Dynamik des Systems zum Abklingen gebracht werden. Alle Lösungskurven in der Umgebung eines anziehenden Fixpunkts nähern sich diesem direkt oder auf spiralförmigen Bahnen, während sie sich von einem abstoßenden Fixpunkt entfernen; siehe Abbildung 10. Abb. 10

Eine der Möglichkeiten für das Langzeitverhalten eines Systems besteht also darin, daß es sich im Gleichgewicht befindet oder auf ein (stabiles) Gleichgewicht zuläuft. Beispiele für ein solches Verhalten sind sehr häufig; in einigen Anwendungen, wie etwa in vielen traditionelleren Ansätzen der Wirtschaftswissenschaften, wird sogar grundsätzlich nur dieser Fall betrachtet.

In anderen Wissenschaften, wie etwa der Biologie, sind allerdings gerade diese Lösungen uninteressant: Leben ist nicht statisch, ist nicht im Gleichgewicht, sondern beruht auf ständiger Veränderung – sei dies nun der Wechsel zwischen Wachsein und Schlaf, oder die periodische Kontraktion des Herzmuskels, oder einer der vielen anderen Vorgänge, deren Dynamik uns am Leben erhält. Nachdem bereits 1952 der englische Mathematiker ALAN TURING **[Tu2]** Nichtgleichgewichtslösungen von Differentialgleichungen für chemische Prozesse als Erklärung für komplexe biologische Strukturen vorgeschlagen hatte, haben vor allem ILYA PRIGOGINE und seine Gruppe in Brüssel systematisch Nichtgleichgewichte bei chemischen Reaktionen untersucht und deren Dynamik berechnet **[N-P]**; PRIGOGINE wurde für seine entsprechenden Arbeiten 1977 mit dem Nobelpreis für Chemie ausgezeichnet.

Als einfaches Beispiel zu diesem Themenkreis und für einen weiteren Grundtyp dynamischen Verhaltens möchte ich ein System vorstellen, das zwar auch in **[N-P]** als Modell für eine chemische Reaktion auftritt, das aber bereits in den zwanziger Jahren der amerikanische Biologe ALFRED JAMES LOTKA in einem leichter verständlichen Zusammenhang untersuchte: Er betrachtete eine Population von Raubtieren, die sich von nur einer Art von Beutetieren ernähren; die Anzahl der Beutetiere zur Zeit t sei $x(t)$, die der Raubtiere $y(t)$. Hierbei sind $x(t)$ und $y(t)$ natürlich stets ganze Zahlen, wenn diese aber genügend groß sind, machen wir keinen großen Fehler, wenn wir $x(t)$ und $y(t)$ als kontinuierliche Funktionen der Zeit betrachten.

Wie sieht die Dynamik dieser Funktionen aus? Solange es für die Beutetiere genügend Platz und Nahrung gibt, vermehren sie sich mit einer konstanten Geburtenrate α; falls es keine Raubtiere gäbe, wäre also $x'(t) = \alpha x(t)$. Die Raubtiere dagegen müßten, falls es keine Beutetiere gäbe, verhungern und damit langsam aber sicher aussterben; wenn wir auch hier von einer konstanten Sterberate γ ausgehen, wäre also $y'(t) = -\gamma y(t)$. Da es nun aber beide Populationen gibt, wird immer wieder ein Beutetier von einem Raubtier gefressen; die Häufigkeit dafür hängt von der Zahl der Begegnungen zwischen den beiden Arten ab und ist damit ungefähr proportional sowohl zu $x(t)$ als auch zu $y(t)$, also auch zum Produkt $x(t)y(t)$. Da jedes Fressen eines Beutetiers die Raubtierpopulation stärkt und die Beutetierpopulation verringert, erhalten wir somit ein System

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \quad \alpha\, x(t) - \beta\, x(t)y(t) \\
y'(t) &= -\gamma\, y(t) + \delta\, x(t)y(t)
\end{aligned}
$$

mit positiven Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Dieses System hat die beiden Gleichgewichtslösungen $x = y = 0$ sowie $x = \gamma/\delta$ und $y = \alpha/\beta$, wobei die erste sowohl uninteressant als auch instabil ist. Die zweite Lösung gibt an, bei welchen Populationsstärken ein ökologisches Gleichgewicht besteht; untersucht man allerdings die Stabilität dieser Lösung, so findet man, daß sie weder stabil noch instabil im Sinne obiger Definitionen ist: Eine Störung des Gleichgewichts bleibt permanent erhalten, das System schwingt ungedämpft um seinen Gleichgewichtspunkt. Sowohl der Gleichgewichtspunkt als auch einige der Nichtgleichgewichtslösungen sind in Abbildung 11 in der (x, y)-Ebene dargestellt; abgesehen vom Gleichgewichtspunkt hat man *geschlossene Kurven* als Lösungen. Man kann sich leicht klarmachen, was der Umlauf auf so einer Lösungskurve biologisch bedeutet: Im jeweils untersten Punkt

Abb. 11

ist die Raubtierpopulation minimal, so daß sich die Beutetiere stark vermehren können; dadurch verbessert sich die Nahrungsgrundlage für die Raubtiere, was nun auch zu deren Vermehrung führt, so daß die Kurve auf ihren am weitesten rechts gelegenen Punkt zusteuert, in dem die Beutetiere ihre maximale Populationsstärke erreichen. Die gestiegene Raubtierpopulation frißt nun, nachdem sie ihren Gleichgewichtswert überschritten hat, mehr Beutetiere als nachwachsen, kann sich aber wegen der großen Anzahl vorhandener Beutetiere weiterhin vermehren auf ein Maximum hin, das am obersten Punkt der Lösungskurve erreicht ist. Danach reicht der bereits gesunkene Bestand an Beutetiere nicht mehr aus als Nahrungsgrundlage für die Raubtiere, ihre Population geht also zurück, reicht aber immer noch aus, um die Beutetiere weiter zu dezimieren. Im Punkt links außen hat deren Bestand schließlich sein Minimum erreicht; die weiterhin sinkende Raubtierpopulation frißt nun weniger Beutetiere als nachwachsen und leidet trotzdem weiter an Nahrungsmangel. Sobald sie ihr Minimum erreicht hat, schließt sich der Kreis, und der gleiche Zyklus beginnt wieder von vorne.

Solche periodischen Lösungen bezeichnet man als *Grenzkreise,* wobei *Kreis* nichts anderes als kreuzungsfreie geschlossene Kurve bedeuten soll. Im vorliegenden Beispiel gibt es zwar keine sinnvolle Rechtfertigung für das Wort *Grenz*kreis, aber bei allgemeineren Systemen werden die meisten Lösungen nicht auf geschlossenen Kurven liegen, sondern sich ihnen nur *annähern,* so daß der Grenzkreis in der Tat das Langzeit- oder Grenzverhalten einer Lösung beschreibt. Ein Beispiel dafür zeigt die linke Hälfte von Abbildung 12, wo ein instabiler Fixpunkt Lösungskurven abstößt und gegen einen Abb. 12
– hier wirklich kreisförmigen – Grenzkreis treibt. Diese Art von Verhalten erklärt nach TURING und PRIGOGINE das Entstehen von Strukturen fernab vom Gleichgewicht.

Somit haben wir mit dem Grenzkreis einen zweiten Grundtyp des dynamischen Verhaltens gefunden; wie ein Gleichgewichtspunkt kann auch er natürlich sowohl stabil als auch instabil sein: Läßt man etwa in Abbildung 12 die Dynamik rückwärts laufen, so stößt der Grenzkreis Lösungen ab und treibt sie zum Fixpunkt. Es kann auch vorkommen, daß ein Grenzkreis in einer Richtung, etwa nach innen, anziehend ist, in der anderen aber abstoßend.

Zumindest im Zweidimensionalen haben wir damit einen vollständigen Überblick über das Langzeitverhalten dynamischer Systeme: Nach einem Satz von POINCARÉ und BENDIXSON muß sich *jede* Lösung eines zweidimensionalen Systems, bei der die Variablen endlich bleiben, entweder einem Fixpunkt oder einem Grenzkreis nähern. Anschaulich ist dieser Satz ziemlich klar: Eine Kurve ohne Überkreuzungen, die nicht auf einen (Gleichgewichts-)Punkt zuläuft, sondern immer weiter geht, muß entweder ins Unendliche laufen, oder sich aber, wenn sie in einem beschränkten Gebiet bleibt, einer geschlossenen Grenzkurve annähern. Da es jedoch neben den anschaulichen auch noch viele schwer vorstellbare ebene Kurven gibt, ist der exakte mathematische Beweis dieses Satzes ziemlich aufwendig.

3.2 Die Lorenz-Gleichungen und ihr Attraktor

In höheren Dimensionen gilt dieser Satz bekanntlich nicht mehr; das bereits erwähnte LORENZ-System

$$\begin{aligned} x'(t) &= -s\,\bigl(x(t) - y(t)\bigr) \\ y'(t) &= -x(t)\,z(t) + r\,x(t) - y(t) \\ z'(t) &= x(t)\,y(t) - b\,z(t) \end{aligned}$$

mit $s = 10$, $r = 28$ und $b = 8/3$ zeigt ein Langzeitverhalten, das weder auf einen Fixpunkt noch auf einen Grenzkreis zuläuft, sondern auf den bekannten LORENZ-Attraktor (Abbildung 13). Dieses System kann beispielsweise als extreme Vereinfachung der NAVIER-STOKES-Gleichungen der Strömungsmechanik aufgefaßt werden (siehe dazu den Beitrag von KLAUS, POTH und VOSS in diesem Heft), oder als Beschreibung von Lasern **[Hak]**. Es hat drei Fixpunkte, nämlich für $x = y = z = 0$ und für Abb. 13

$$x = y = \pm\sqrt{b(r-1)}, \quad z = r - 1\,,$$

die bei den gewählten Parameterwerten allesamt instabil sind. Die beiden letzteren bilden die Zentren der beiden Blätter des LORENZ-Attraktors; Lösungskurven entfernen sich spiralförmig von diesen abstoßenden Fixpunkten, nähern sich dann aber keinem Grenzkreis, sondern springen irgendwann in die Umgebung des anderen Fixpunkts, um dann von diesem abgestoßen zu werden.

Damit ist insbesondere klar, daß die beiden ziemlich eben aussehenden Blätter des LORENZ-Attraktors nicht wirklich zweidimensional sein können, denn sonst würde ja der Satz von POINCARÉ-BENDIXSON einen Grenzkreis erzwingen. Tatsächlich zeigen Computersimulationen, daß die Dimension des Attraktors bei etwa 2,06 liegt – eine zwar nur kleine Abweichung von zwei, aber sie reicht aus, um der Lösungskurve das „Entkommen“ aus der Ebene und damit die Vermeidung eines Grenzkreises zu ermöglichen.

3.3 Chaos in der dreidimensionalen Dynamik

Nachdem der Satz von POINCARÉ-BENDIXSON das Langzeitverhalten zweidimensionaler Systeme vollständig klassifiziert, liegt es nahe, nach einem entsprechenden Satz für höhere Dimensionen zu suchen, der dann beispielsweise den LORENZ-Attraktor und einige andere Verhaltensweisen als weitere Möglichkeiten neben Fixpunkt und Grenzkreis zuläßt, der aber trotzdem insgesamt eine endliche Liste von Möglichkeiten liefert. In diesem Abschnitt soll erklärt werden, warum es einen solchen Satz schon im Dreidimensionalen nicht mehr geben kann.

Ausgangspunkt dazu ist die Frage, was in der Mathematik überhaupt berechnet werden kann. Noch 1928, auf dem internationalen Mathematikerkongreß in Bologna, forderte der große deutsche Mathematiker DAVID HILBERT **[Hi]** die versammelten Mathematiker auf, nach einem von ihm entworfenen Programm ein mechanisches Verfahren zu finden, womit man *jede* Aussage der Zahlentheorie oder auch der Analysis als richtig oder falsch erkennen könne – in die Sprache unserer Zeit übersetzt ging es also um ein Computerprogramm, das eine solche Aussage als Eingabe bekommt und entscheidet, ob sie wahr oder falsch ist. Bereits 1931 zeigte KURT GÖDEL **[Gö]**, daß es für die Zahlentheorie kein widerspruchsfreies (bei GÖDEL war diese Voraussetzung noch etwas stärker) endliches Axiomensystem geben kann, bezüglich dessen jede Aussage entweder wahr oder falsch ist, und 1936 zeigte der bereits im Zusammenhang mit Nichtgleichgewichtslösungen erwähnte ALAN TURING **[Tu1]**, daß es nicht einmal ein endliches Entscheidungsverfahren gibt, das alle wahren und falschen Aussagen bezüglich eines *gegebenen* endlichen Axiomensystems als solche erkennt. Genauer gesagt definierte TURING einen abstrakten Computer (nach 1945 konstruierte er auch einen der ersten konkreten), der jede Berechnung ausführen kann, die irgendein beliebiger anderer konkreter oder abstrakter Computer durchführen kann. TURING zeigte, daß das Langzeitverhalten dieses heute als universelle TURING-Maschine bezeichneten Computers selbst bei genauer Kenntnis des Anfangszustands nicht vorhersehbar ist; beispielsweise kann man nicht einmal entscheiden, ob er bei der Verarbeitung eines gegebenen Satzes von Eingabedaten jemals anhält.

Vor etwa fünf Jahren zeigte dann der amerikanische Physiker CHRISTOPHER MOORE **[M]**, daß es ein dreidimensionales dynamisches System gibt, dessen Langzeitverhalten in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen *genau* dem Langzeitverhalten einer universellen (oder sonstigen) TURING-Maschine in Abhängigkeit von deren Anfangszustand entspricht und somit selbst bei *genauer* Kenntnis der Anfangsbedingungen nicht vorhersagbar ist: Die Kenntnis des Langzeitverhaltens dieses Systems wäre äquivalent etwa zur Lösung aller zahlentheoretischer Probleme – einschließlich der unentscheidbaren. Es ist klar, daß die Suche nach Ordnung im Chaos spätestens hier an ihre Grenzen stößt, jedoch sind die meisten für Anwendungen relevante chaotische Systeme zum Glück nicht so extrem chaotisch wie das MOOREsche.

3.4 Determinismus und Vorhersagbarkeit

Im achtzehnten Jahrhundert wurde die Welt oft mit einem Uhrwerk verglichen, das von Gott, dem großen Uhrmacher, geschaffen war und völlig gesetzmäßig ablief. Eine typische Stimme aus jener Zeit ist die oft zitierte Äußerung des französischen Mathematikers PIERRE SIMON LAPLACE aus seiner 1795 gehaltenen Antrittsvorlesung vor den *Ecoles normales* in Paris; sie wurde später auch abgedruckt als Einleitung seines Buchs **[Lap]**:

Wir können also den gegenwärtigen Zustand des Universums als Wirkung seines vorherigen Zustands betrachten und als Ursache dessen, der folgen wird. Eine Intelligenz, die für einem gegebenen Zeitpunkt alle in der Natur wirkenden Kräfte und die Lage aller Dinge, aus der die Welt besteht, kennen würde, und die außerdem so umfassend wäre, daß sie diese Daten einer Analyse unterziehen könnte, würde in derselben Formel die Bewegung der größten Körper des Universums und der leichtesten Atome erfassen: Nichts wäre ihr ungewiß, die Zukunft wie die Vergangenheit wären ihren Augen gegenwärtig.

Etwa hundert Jahre später zeigte der französische Mathematiker HENRI POINCARÉ mit seinen Arbeiten **[P]** über die Stabilität des Sonnensystems, daß diese Auffassung zu optimistisch ist: POINCARÉ konnte zeigen, daß es Systeme gibt, in denen zwei beliebig nahe beieinander liegende Anfangszustände zu völlig verschiedenem Langzeitverhalten führen können, mit anderen Worten: Er bewies, daß es chaotische Systeme gibt. Insbesondere zeigte er, daß bereits das eingeschränkte Dreikörperproblem, ein stark vereinfachtes Modell des Sonnensystems, von dieser Art ist. (Eine Übersicht über POINCARÉS diesbezügliche Ergebnisse ist in **[Ho]** zu finden.)

POINCARÉS Arbeiten fanden große Beachtung innerhalb der Mathematik; 1890 etwa bekam er dafür einen Preis des schwedischen Königs OSCAR II, und auch nach POINCARÉ ging die Entwicklung kontinuierlich weiter, wurde allerdings von den angewandten Wissenschaften weitgehend ignoriert. Ein Grund dafür war sicherlich, daß die von POINCARÉ postulierte Chaotizität des Sonnensystems keinerlei Einfluß auf dessen Vorhersagbarkeit zu haben schien: Die altbekannten astronomischen Rechenverfahren lieferten weiterhin ausgezeichnete Übereinstimmung mit den Beobachtungen, von Chaos war weit und breit nichts zu sehen. Erst über fünfzig Jahre später, zwischen 1954 und 1962, zeigten KOLMOGOROW, ARNOLD und MOSER mit der inzwischen nach ihren Anfangsbuchstaben benannten KAM-Theorie, daß auch in gewissen chaotischen Systemen stabile Bahnen nicht nur möglich, sondern sogar vorherrschend sind – ein erstes Beispiel dafür, daß Ordnung im Chaos zu einer besseren Voraussagbarkeit führt, als eigentlich zu erwarten wäre.

In der Meteorologie jedoch gab es damals wie heute große Probleme mit der Vorhersagbarkeit; deshalb ist vielleicht verständlich, daß erst die Ergebnisse von LORENZ in den sechziger Jahren unseres Jahrhunderts das Problem auch den angewandten Wissenschaftlern bewußt machten. Tatsächlich dauerte es noch bis etwa Mitte der achtziger Jahre, bis diese zunächst hauptsächlich in meteorologischen Fachzeitschriften veröffentlichten Ergebnisse auch von Vertretern anderer Fachrichtungen zur Kenntnis genommen wurden und jedermann klarmachten, daß – selbst in einer rein NEWTONschen Mechanik – auch für die von LAPLACE betrachtete Intelligenz die Zukunft höchstens dann gewiß wäre, wenn ihr der gegenwärtige Zustand des Universums mit *unendlicher* Genauigkeit bekannt wäre, was für eine endliche Intelligenz natürlich ausgeschlossen ist.

Dreihundert Jahre nachdem NEWTON der *Royal Society* den ersten Band seiner *Principia* vorgelegt hatte, die für die meisten Physiker – wenn auch nicht unbedingt für NEWTON selbst – die Grundlage ihres deterministischen Weltbilds war, organisierte dieselbe *Royal Society* 1986 eine Tagung über Vorhersagbarkeit in Wissenschaft und Gesellschaft, auf der SIR JAMES LIGHTHILL, F.R.S., als Präsident der Internationalen Vereinigung für theoretische und angewandte Mechanik die neue Situation wie folgt zusammenfaßte **[Li]**:

Wir sind uns heute alle zutiefst bewußt, daß der Enthusiasmus unserer Vorgänger für die wunderbaren Leistungen der Newtonschen Mechanik diese zu Verallgemeinerungen im Bereich der Vorhersagbarkeit geführt haben, die wir zwar vor 1960 alle mehr oder weniger glaubten, die wir nun aber als falsch erkannt haben. Wir möchten uns gemeinsam dafür entschuldigen, daß wir das allgemeine gebildete Publikum in die Irre führten durch die Verbreitung von Ideen über die Determiniertheit von Systemen, die die Newtonschen Bewegungsgleichungen erfüllen; Ideen, die sich nach 1960 als falsch herausstellten.

4. Ordnung im Chaos

Bislang haben wir Chaos und Ordnung vor allem als Gegenspieler kennengelernt; es wird Zeit, endlich zum Thema zu kommen und die Ordnung *im* Chaos zu betrachten. Die bereits erwähnte KAM-Theorie ist mathematisch zu anspruchsvoll, als daß sie im Rahmen dieses Vortrags behandelt werden könnte; es gibt aber zum Glück genügend viele einfacher zu verstehende Hinweise auf Ordnung im Chaos.

Bevor wir uns mit einer Auswahl solcher Beispiele befassen, sollten wir uns zunächst überlegen, was überhaupt sinnvollerweise erwartet werden kann. Natürlich kann uns keine Ordnung im Chaos dazu verhelfen, etwa den Wert $x_{1\,000\,000}$ für die Zeitreihe aus Beispiel 3 zu berechnen; hier hilft wirklich nur die millionenfache Iteration der definierenden Gleichung mit mindestens 300 000-stelliger Genauigkeit – und selbst dann ist das Ergebnis für eine reale Anwendung nur dann relevant, wenn wir sicher sind, daß das System keinerlei äußeren Störungen ausgesetzt ist und wir den Ausgangszustand mit mindestens 300 000-stelliger Genauigkeit kennen; zwei Prämissen, die weit jenseits jeglicher Realität liegen: Kein reales System, außer eventuell dem gesamten Universum, ist wirklich völlig abgeschlossen, und was die Genauigkeit betrifft, mit der man physikalische Größen messen kann, so gibt es nur wenige Beispiele, bei denen man auf zehn geltende Ziffern kommt; soweit mir bekannt ist, gibt es kein einziges, bei dem man zwanzig erreichen könnte.

Die Suche nach Ordnung im Chaos bedeutet also insbesondere auch, daß man sich darüber im klaren sein muß, welche Fragen noch sinnvoll beantwortbar sind und für welche dies grundsätzlich unmöglich ist. Die folgenden Abschnitte sollen einige Beispiele für sinnvolle Fragen und mögliche Antworten aufzeigen.

4.1 Statistische Ordnung im Chaos

Gehen wir noch einmal zurück zur Zeitreihe mit $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$. Wie wir gesehen haben, ist die Frage nach dem Wert von $x_{1\,000\,000}$ zumindest unter dem Gesichtspunkt einer möglichen Anwendung nicht sinnvoll. Das heißt aber nicht, daß es für die x_n mit großem n *überhaupt keine* Ordnung mehr gäbe: Auch bei diesem System entsteht *unabhängig vom Anfangszustand* eine Struktur mit inhärenter Ordnung, die hier durch eine statistische Verteilung beschrieben wird: Schreiben wir wieder $x_n = \sin^2 \alpha_n$, so sind die α_n gleichverteilt im Intervall zwischen 0° und 90°, falls wir entweder von der (etwas dubiosen) mathematischen Annahme ausgehen, daß die Binärziffern von $\theta_n = \alpha_n/90°$ gleichverteilt sind, oder von der (realistischen) physikalischen Annahme, daß in jedem Iterationsschritt ein kleiner zufälliger Fehler auftritt. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein α_n zwischen den beiden Winkeln β und γ aus dem Intervall von 0° und 90° liegt, ist also proportional zur Länge des Intervalls zwischen β und γ; da sie für das gesamte Intervall eins sein muß, ist sie gleich $(\gamma - \beta)/90°$.

Mit nur geringfügig größerem mathematischem Aufwand läßt sich auch die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen, daß $x_n = \sin^2 \alpha_n$ zwischen zwei Zahlen b und c aus dem Intervall von 0 bis 1 liegt: Sie ist wieder $(\gamma - \beta)/90°$, wobei γ jener Winkel zwischen 0° und 90° ist, für den $\sin^2 \gamma = c$ ist, und entsprechend ist $\sin^2 \beta = b$. Mit dem Arkussinus, der Umkehrfunktion des

Sinus im Intervall von 0° bis 90°, läßt sich dies nach β *bzw.* γ auflösen: β = arcsin $\sqrt{b}$ und γ = arcsin $\sqrt{c}$. Also liegt x_n mit Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\arcsin\sqrt{b} - \arcsin\sqrt{c}}{90°}$$

zwischen b und c. Die Funktion α = arcsin $\sqrt{x}$ ist in Abbildung 14 aufgezeichnet. Wie man sieht, wird sie zu den Intervallenden hin sehr steil, während sie in der Intervallmitte eher flach verläuft; genauer sieht man dies in Abbildung 15, wo ihre Ableitung dargestellt ist, die sogenannte *Wahrscheinlichkeitsdichte*. Somit liegen die x_n häufiger in der Nähe der Intervallenden als in der Nähe der Intervallmitte, und für jedes Teilintervall läßt sich genau sagen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein x_n dort liegt. Abb. 15

Die so gefundene Verteilung *ist* die Ordnung, die wir in diesem chaotischen System finden können; jede langfristige Vorhersage, die mehr als die Information aus dieser Verteilung benutzen möchte, ist unrealistisch.

4.2 Attraktoren und Selbstorganisation

Auch ein Attraktor, egal ob es sich nun um einen anziehenden Fixpunkt oder Grenzkreis oder chaotischen Attraktor wie beim LORENZ-System handelt, ist ein Zeichen von Ordnung: Sobald das System einen Zustand in hinreichender Nähe des Attraktors erreicht hat, wird es von diesem angezogen, und sein Zustand wird für immer in der Nähe des Attraktors bleiben. Die Dynamik *auf* dem Attraktor mag zwar chaotisch und damit nicht langfristig vorhersehbar sein, aber sobald das System in den Einflußbereich des Attraktors kommt, wissen wir, daß es langfristig auf diesen zulaufen muß. Ein Attraktor ist somit ein Ausdruck der *Selbstorganisation* des Systems, eine Struktur, die für einen mehr oder weniger breiten Bereich von Anfangsbedingungen durch die Dynamik des Systems geschaffen wird.

Wenn der Attraktor in einem geometrisch gut beschreibbaren Teil des gesamten Zustandsraums liegt, und wenn sich auch einige hinreichend große Teilmengen seines Einzugsbereichs geometrisch gut beschreiben lassen, führt dies zu Aussagen über das Langzeitverhalten des Systems. Wenn wir Glück haben, reicht dieses Wissen aus, um die gerade interessierenden Eigenschaften des Systems vorherzusagen; andernfalls, wenn die betreffenden

Eigenschaften von der Dynamik *auf* dem Attraktor abhängen, sind sie bei einem chaotischen Attraktor nicht langfristig voraussagbar.

4.3 Das FEIGENBAUM-*Szenarium für den Übergang zwischen Ordnung und Chaos*

Ein anderer Gesichtspunkt ist die Suche nach Ordnung beim *Übergang* zum Chaos: Viele Systeme hängen von Parametern ab, die LORENZ-Gleichung etwa von den Zahlen s, r und b. Oftmals hat das System für einige Parameterwerte stabile Gleichgewichtslösungen oder periodische Lösungen, während es für andere chaotisch wird. Bei der Untersuchung der Frage, wie dieser Übergang bei einer kontinuierlichen Veränderung der Parameter vor sich geht, stieß man bei den verschiedensten Systemen immer wieder auf die gleichen relativ wenigen Szenarien, die somit eine Ordnung beim Übergang zum Chaos darstellen und beispielsweise dazu verhelfen können, das Abgleiten eines Systems in ein chaotisches Verhalten rechtzeitig zu erkennen und eventuell durch Gegensteuern noch zu verhindern.

Als Beispiel dafür betrachten wir die für $\lambda = 4$ bereits ausführlich diskutierte diskrete logistische Gleichung

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n)$$

für λ zwischen null und vier. (Das sind die einzigen interessanten Fälle, denn man überlegt sich leicht, daß im Fall $\lambda > 4$ der Wert von x_n für fast jeden Startwert x_1 schließlich immer negativer wird, also gegen minus Unendlich strebt, und für ein negatives λ verhalten sich die x_n bis auf das ständig wechselnde Vorzeichen genauso wie beim entsprechenden positiven λ.) Dieses System hat zwei Gleichgewichtslösungen: Bei der einen sind alle $x_n = 0$, bei der anderen sind sie $1 - 1/\lambda$. Diese beiden Fixpunkte gibt es für jeden Wert von λ, selbst für das bereits als chaotisch erkannte $\lambda = 4$, für das sie aber natürlich instabil sein müssen.

Tatsächlich läßt sich leicht entscheiden, wann diese Fixpunkte stabil sind: Für x_n nahe null ist $(1 - x_n)$ nur unwesentlich kleiner als eins, also ist x_{n+1} ungefähr gleich λx_n; dies ist kleiner als x_n, falls λ kleiner oder gleich eins ist, und größer, falls $\lambda > 1$. Somit ist die Gleichgewichtslösung $x_n = 0$ stabil für $\lambda \leq 1$.

Eine nur unwesentlich umfangreichere Rechnung zeigt entsprechend, daß die andere Gleichgewichtslösung stabil ist für $1 \leq \lambda \leq 3$; für $\lambda > 3$ gibt es damit keine stabile Gleichgewichtslösung mehr. Trotzdem ist das System dann noch nicht gleich chaotisch: Abbildung 16 zeigt eine Computersimulation für den Bereich $2{,}9 \leq \lambda \leq 4$, wobei für jedes abgebildete λ ausgehend von einem geeigneten x_1 die ersten 3 000 Werte x_i berechnet wurden; die in der zu λ gehörenden Zeile aufgezeichneten Punkte entsprechen den Zahlen x_{1001} bis x_{3000}. Falls es einen stabilen Endzustand gibt, ist zu erwarten, daß er nach tausend Iterationen für alle praktischen Zwecke erreicht ist, so daß die aufgezeichneten Werte gerade diesen Endzustand zeigen. Abb. 16

Erwartungsgemäß ist für $\lambda \leq 3$ nur ein Punkt zu sehen, der in diesem Bereich stabile Fixpunkt $1 - 1/\lambda$. Sobald er bei $\lambda = \lambda_1 = 3$ instabil wird und damit vom Bild verschwindet, teilt sich die Kurve in zwei Zweige, die Zeitreihe pendelt also zwischen zwei Werten hin und her: Aus dem stabilen Fixpunkt wurde also ein stabiler *Zweierzyklus.* Er bleibt stabil bis etwa $\lambda = 3{,}45$ (der genaue Wert kann berechnet werden und ist $\lambda_2 = 1 + \sqrt{6} \approx 3{,}449$), wo nun ein *Viererzyklus* entsteht. Bei einem nur wenig größeren λ_3 wird daraus ein Achterzyklus, und dann folgen in immer kürzer werdenden Abständen Werte $\lambda_4, \lambda_5, \ldots$, bei denen sich die Zykellänge weiter verdoppelt, bis schließlich bei $\lambda = \lambda_\infty \approx 3{,}5699456$ etwas entsteht, was kein Zyklus mehr ist, sondern ein *fraktaler Attraktor.* Wie FEIGENBAUM **[Fb]** anhand numerischer Simulationen beobachtete, verringert sich der Abstand zwischen aufeinanderfolgenden λ_i jeweils ziemlich genau um den konstanten Faktor

$$\delta \approx 4{,}6692016091029909\,,$$

der heute nach ihm als FEIGENBAUM-Konstante bezeichnet wird. Die Aussage gilt um so genauer, je größer i wird, je näher man also bei λ_∞ ist. Inzwischen hat LANFORD **[Lan]** durch die geometrische Untersuchung eines geeigneten unendlichdimensionalen dynamischen Systems und mit umfangreichen Rechnungen bewiesen, daß diese Gesetzmäßigkeit in der Tat für beliebig große Werte von i gilt; die Folge der Zahlen $(\lambda_i - \lambda_{i-1})/(\lambda_{i+1} - \lambda_i)$ strebt also wirklich gegen einen Grenzwert δ der angegebenen Größe. Daraus kann die fraktale Dimension des Attraktors bei λ_∞ berechnet werden; sie ergibt sich zu 0,538.

Diese Gesetzmäßigkeit der *Periodenverdoppelung* beim Übergang zu einem chaotischen Zustand (bei $\lambda = \lambda_\infty$) bezeichnet man als das FEIGENBAUM-Szenarium des Übergangs zum Chaos; es wird auch in vielen komplizierteren Systemen beobachtet und kann auch experimentell nachgewiesen werden. Dabei wird immer die gleiche Konstante δ beobachtet; man spricht daher auch von der FEIGENBAUM-*Universalität.*

Nach λ_∞ kommen Bereiche mit „verschmierten" Zykeln: Hier bewegen sich die x_i zwar grundsätzlich wie in einem Zyklus, aber diese gesetzmäßige Bewegung wird überlagert von chaotischen Störungen, die aus den Punkten des Zyklus kleine Intervalle machen. Mit wachsendem λ werden diese Intervalle immer länger, wobei in immer größer werdenden Abständen (die wieder der FEIGENBAUM-Universalität genügen) jeweils zwei Intervalle verschmelzen, so daß sich die Anzahl der Intervalle halbiert. Kurz vor 3,7 entsteht schließlich ein einziges Intervall, das sich weiterhin kontinuierlich vergrößert, bis es bei $\lambda = 4$ ganz von null bis eins reicht.

Das mehr oder weniger stark strukturierte Grau der verschmierten Intervalle wird immer wieder unterbrochen durch klar ausgeprägte Zykel, deren prominenteste der Dreierzyklus in der Umgebung von $\lambda = 3{,}84$ und der Fünferzyklus in der Umgebung von $\lambda = 3{,}74$ sind. Bei genauem Hinsehen erkennt man, daß auch hier Periodenverdoppelungen stattfinden: Der Dreierzyklus wird zunächst zum Sechserzyklus, dann zum Zwölferzyklus *usw.,* wobei auch hier wieder die Regeln der FEIGENBAUM-Universalität gelten. Entsprechendes gilt auch für die anderen Zykel. Außerdem sieht man, daß die Abfolge der Zykeln zwischen 3,7 und 4, dem Bereich also, in dem es nur noch ein Intervall gibt, genau der Abfolge von doppelt so langen Zykeln in Bereich des verschmierten Zweierzyklus entspricht *usw.*

Die hier betrachteten Gesetzmäßigkeiten zeigen, daß man sich bei der Erforschung von Ordnung im Chaos nicht nur auf das Studium oder gar nur die Simulation *chaotischer* Systeme beschränken darf: Schließlich ist die diskrete logistische Gleichung für $\lambda < \lambda_\infty$ alles andere als chaotisch, und auch für $\lambda > \lambda_\infty$ wechseln die chaotischen Bereiche immer wieder ab mit Zykeln. Tatsächlich kann man zeigen **[Ja]**, daß sich diese beide Verhaltenstypen in der Nähe von λ_∞ selbst auf beliebig kleinem Raum ständig abwechseln, man hat also eine „chaotische" Abhängigkeit des Langzeitverhaltens vom Parameter λ. Deshalb gibt es in den üblichen Unterteilungen der Mathematik auch keine eigenständige *Chaostheorie:* Chaos ist ein Phänomen, das bei nichtlinearen dynamischen Systemen auftreten kann (aber nicht muß) und das daher nur *ein* Aspekt der Theorie dieser Systeme ist. Im vorliegenden Beispiel könnte eine reine Chaostheorie nicht einmal angeben, für welche Menge von λ-Werten sie überhaupt zuständig ist.

4.4 Bifurkationen bei der LORENZ*-Gleichung*

Auch die LORENZ-Gleichung zeigt nicht für alle Parameterwerte chaotisches Verhalten. Da die Parameter b und s durch als konstant betrachtete physikalische Größen gegeben sind, läßt man diese im allgemeinen konstant bei den von LORENZ angegebenen Werten $s = 10$ und $b = 8/3$ und betrachtet nur r als veränderbar. Schon damit zeigt die LORENZ-Gleichung allerdings eine so große Vielfalt von Verhaltenstypen, daß man ganze Bücher darüber schreiben kann; ein solches Buch ist etwa **[Sp]**.

Wie die logistische Gleichung beginnt auch die LORENZ-Gleichung mit stabilen Gleichgewichtslösungen: Liegt r zwischen null und eins, so ist $x = y = z = 0$ ein stabiler Fixpunkt; für größere r wird er instabil und dafür sind die beiden anderen oben angegebenen Fixpunkte bis etwa $r = 24{,}74$ stabil. Abbildung 17 zeigt (für $r = 18$) eine der Lösungskurven aus diesem Abb. 17
Bereich. Um den Fixpunkt ist nur eine schwarze Scheibe zu sehen, die Spirale zieht sich also in der Nähe des Fixpunkts nur sehr langsam auf diesen Punkt zusammen.

Danach kommt ein Bereich mit den charakteristischen LORENZ-Attraktoren, aber für *große* Werte von r gibt es immer wieder stabile periodische Lösung, und zumindest in drei Bereichen werden auch Periodenverdoppelungen beobachtet, nämlich für r zwischen 99,542 und 100,795, zwischen 145 und 166, und schließlich für $r > 214{,}364$. In allen drei Fällen verdoppeln sich die Perioden bei *kleiner* werdendem r, ein chaotischer Attraktor wird also jeweils am *unteren* Ende des Intervalls erreicht. Abbildung 18 Abb. 18
zeigt die Grundkurve des erstgenannten Intervalls, hier gezeichnet für den Parameterwert $r = 100{,}5$. Bei $r \approx 99{,}98$ verdoppelt sich diese Kurve, wird also durch zwei zusammenhängende, fast parallel laufende Kurven ersetzt; der Effekt ist allerdings so klein, daß er kaum zu sehen ist, so daß ich auf eine Darstellung verzichtet habe.

Die Berechnung der r-Werte, bei denen eine Periodenverdoppelung eintritt, ist hier erheblich aufwendiger als bei der logistischen Gleichung; zumindest für den ersten der genannten Bereichen hat aber FRANCESCHINI **[Fr]** die Werte $r_1, \ldots, r_6$ berechnet, an denen die ersten sechs Periodenverdoppelungen auftreten: Er erhält

$$\frac{r_5 - r_4}{r_6 - r_5} \approx 4{,}671 ,$$

was sehr gut mit der Annahme übereinstimmt, daß sich die weiteren Quotienten immer mehr der FEIGENBAUM-Konstanten δ annähern.

Das LORENZ-System zeigt also in der Tat eine große Vielfalt von dynamischen Verhaltensweisen; wie bei der diskreten logistischen Gleichung ist Chaos nur *eine* Möglichkeit, die sich ständig mit anderen Verhaltenstypen abwechselt. Auch dieses System kann nur verstanden werden mit einer Theorie, die sich *nicht* als eine reine Chaostheorie begreift.

5. Was nützt die Ordnung im Chaos?

Nachdem wir bereits mehrfach gesehen haben, daß Chaos nicht isoliert von anderen Phänomenen betrachtet werden darf, soll es auch hier allgemeiner um Anwendungen von (diskreten wie kontinuierlichen) dynamischen Systemen gehen. Im Mittelpunkt stehen zwei Arten von Anwendungen: Einmal geht es um die (in vielen Anwendungen erwünschte) *Vermeidung von Chaos,* zum anderen aber auch um das *Ausnützen von Chaos:* Ein dynamisches System kann durch seine Fähigkeit zur Selbstorganisation extrem komplexe Strukturen erzeugen, die der Lösung eines gegebenen Problems viel optimaler angepaßt sein können, also jede explizit konstruierbare Struktur.

5.1 Vermeidung von numerischem Chaos

Betrachten wir als einfaches Beispiel eine eindimensionale Dynamik, die der Differentialgleichung

$$y'(t) = \gamma\, y(t) \big(M - y(t)\big)$$

genügt, der sogenannten kontinuierlichen logistischen Gleichung. Ihre Lösung kann jeder Mathematiker nach dem Grundstudium unschwer angeben; sie ist in Abbildung 19 aufgezeichnet und steigt, wie man sieht, Abb. 19

kontinuierlich an, wobei sie sich immer mehr der Gleichgewichtslösung $y = M$ nähert – ein typischer Fall einer nichtchaotischen Dynamik also.

Wenn wir die Gleichung aber auf einem Computer *numerisch* lösen, müssen wir uns beispielsweise eine endliche Schrittweite h vorgeben und die Gleichung ersetzen durch

$$y(t + n\,h) \approx y(t) + h\,y'(t) = y(t) + h\,\gamma\,y(t)\bigl(M - y(t)\bigr)\;;$$

sie wird, wie man in der Mathematik sagt, *diskretisiert.* Bei Kenntnis des Anfangswerts $y(0)$ sollte es diese Gleichung erlauben, alle Werte $y(n\,h)$ näherungsweise zu berechnen.

Tatsächlich ist diese Berechnungsvorschrift aber nicht anderes als eine *diskrete* logistische Gleichung: Setzt man

$$x_n = \frac{y(n\,h)}{M + 1/(\gamma\,h)}\;,$$

so zeigt eine kurze Rechnung, daß $x_{n+1} = \lambda\,x_n\,(1-x_n)$ ist mit $\lambda = 1+\gamma\,M\,h$. Für $\lambda < 3$ konvergiert die Folge der x_n gegen den Gleichgewichtspunkt $1 - 1/\lambda$, der gerade der Gleichgewichtslösung $y = M$ der Differentialgleichung entspricht: Zumindest das Langzeitverhalten des Systems wird also korrekt vorausgesagt. Ist aber h zu groß, so daß λ größer als drei wird, so enden die x_n in einem Zyklus oder einem chaotischen Attraktor, der nichts mehr mit der Lösung der betrachteten Differentialgleichung zu tun hat, oder sie gehen, für $\lambda > 4$, gegen minus Unendlich.

Bei diesem einfachen Beispiel dürfte das wohl kaum zur Verwirrung führen; da die Gleichung leicht explizit gelöst werden kann, wird sie ohnehin niemand per Computer lösen wollen. Betrachtet man aber statt dessen ein komplexeres System, wie es etwa in der Wettervorhersage auftritt, so kann man keine explizite Lösung erwarten, und wie LORENZ in **[Lor3]** ausführt, wird man wegen der im Vergleich zur Komplexität der Gleichungen recht geringen Leistungsfähigkeit selbst von Supercomputern stark versucht sein, eine relativ große Schrittweite h zu wählen. Wie LORENZ zeigt, führen auch hier bereits bei Konvektionsmodellen, die gegenüber der LORENZ-Gleichung noch weiter vereinfacht sind, zu grobe Diskretisierungen zu numerischem Chaos – selbst wenn die Differentialgleichung eine stabile

Gleichgewichtslösung hat. Auch wenn man das hier beschriebene relativ einfache Diskretisierungsverfahren durch ein komplizierteres ersetzt, wie es Mathematiker und Meteorologen bei der Lösung solcher Probleme wirklich einsetzen, ändert sich nichts an diesem Verhalten: Sobald die Diskretisierung zu grob wird, hat die Computerlösung nichts mehr mit der Lösung des wirklichen Systems zu tun und suggeriert oft ein chaotisches Verhalten, wo tatsächlich keines ist.

Leider gibt es im allgemeinen keine so einfache Bedingung wie bei der logistischen Gleichung, wo man nur sicherstellen muß, daß

$$\lambda = 1 + \gamma M h \leq 3 \quad \text{oder} \quad h \leq \frac{2}{\gamma M}$$

ist; bei realistischeren Anwendungen hat man meist nur die numerische Lösung der diskretisierten Gleichung, und *a priori* ist es alles andere als klar, ob diese etwas mit der Lösung der Differentialgleichung zu tun hat. Oft verläßt man sich einfach auf die Erfahrung, daß die bekannten und bewährten Diskretisierungsverfahren im allgemeinen vernünftige Lösungen liefern, aber auch diese Erfahrung hat schon oft getrogen: Viele erfolgreiche Verfahren aus der Zeit, als numerische Berechnungen noch mit Kurbelmaschinen ausgeführt wurden, verloren ihre numerische Stabilität, als sie mit dem Aufkommen elektronischer Rechenanlagen auf die nun möglich gewordenen sehr viel komplexeren Probleme angewandt wurden, und es muß immer damit gerechnet werden, daß auch einige der heute bewährten Verfahren auf immer schneller werdenden Supercomputern das gleiche Schicksal erleiden können.

Seit einigen Jahren hat sich aus der Theorie der dynamischen Systeme das Gebiet der *numerischen Dynamik* entwickelt, das auch für allgemeine Systeme nach Kriterien dafür sucht, wann die Lösungen einer diskretisierten Gleichung solchen der Ausgangsgleichung entsprechen; siehe dazu etwa **[St]**. Als eine Anwendung sei etwa **[CKP]** erwähnt, wonach die LORENZ-Gleichung für $r = 100{,}5$ in der Tat eine periodische Lösung hat, die wie die in Abbildung 18 gezeichnete Kurve aussieht. Abbildung 18 entstand natürlich durch numerische Iteration einer diskretisierten Gleichung, allerdings mit einer sehr feinen Diskretisierung, die den Bedingungen aus **[CKP]** entspricht: Rechnet man mit derselben, 500 mal gröberen Diskretisierung wie in den übrigen Beispielen, erhält man für die gleichen Startwerte die in Abbildung 20 zu sehende chaotische Bahn, die eher an den LORENZ-Attraktor erinnert als an die einfache Kurve aus Abbildung 18. Damit stellt sich natürlich die Frage, ob der LORENZ-Attraktor selbst wirklich chaotisch ist. LORENZ drückte sich in **[Lor1]** zu dieser Frage sehr vorsichtig aus, aber mit den seither entwickelten theoretischen Methoden aus der Geometrie und der Topologie dynamischer Systeme, angewandt in Verbindung mit verfeinerten numerischen Berechnungsverfahren, konnte 1993 bewiesen werden, daß das LORENZ-System für geeignete Parameterwerte wirklich chaotische Lösungen hat (**[HZHT]** und **[MM]**). Bei den von LORENZ betrachteten Parameterwerten greift zumindest die Methode aus **[MM]** wohl auch, jedoch sind die entsprechenden Untersuchungen noch nicht abgeschlossen.

Abb. 20

5.2 Neue Berechnungsmodelle

In den letzten fünfzig Jahren konnten wir eine stürmische Entwicklung beobachten, die zu immer schnelleren und immer billigeren Computern führte. Die wesentlichen Motoren dieser Entwicklung waren der Übergang von Relais zu Röhren, Transistoren und schließlich zu immer höher integrierten (und miniaturisierten) Schaltungen sowie die Möglichkeit, mit diesen Schaltelementen immer mehr Schaltvorgänge pro Zeiteinheit zu realisieren. Diese Entwicklung nähert sich ihrem Ende: Bereits bei einem der heutigen mit 100 MHz getakteten Rechnern legt das Licht pro Takt gerade noch knapp drei Meter zurück; da die Signalgeschwindigkeit innerhalb des Rechners nicht schneller sein kann als die Lichtgeschwindigkeit, gibt es spätestens bei einem um den Faktor hundert schneller getakteten Rechner Schwierigkeiten, die Daten hinreichend schnell aus dem Speicher zum Prozessor zu übertragen. Ebenso wird die weitere Verkleinerung von Schaltelementen bald an ihre quantenmechanischen und thermodynamischen Grenzen stoßen. Trotzdem gibt es eine ganze Reihe von Anwendungen, von der künstlichen Intelligenz bis zur Wettervorhersage, bei denen Geschwindigkeitssteigerungen um Faktoren deutlich über einer Million wünschenswert wären.

Ein naheliegender Ansatz besteht darin, anstelle des *einen* Prozessors, über den gängige Computer heute verfügen, eine Vielzahl von Prozessoren *parallel* rechnen zu lassen. Idealerweise sollte sich dann die Rechenleistung mit der Anzahl der Prozessoren multiplizieren. Tatsächlich aber ist der Geschwindigkeitsvorteil so gut wie immer beträchtlich kleiner, denn nur in ganz seltenen Fällen läßt sich eine Aufgabe in hinreichend viele voneinander unabhängige Teilaufgaben gleicher Länge zerlegen. Hauptproblem bei der Parallelverarbeitung ist also die Organisation der Zusammenarbeit zwischen den einzelnen Prozessoren.

Dies zwingt, wie W. DANIEL HILLIS **[Hls]** bereits 1982 ausführte, zu einer Umorientierung des Denkens weg von den Prinzipien der traditionellen Informatik und hin zu denen der physikalischen Welt. Als erstes Beispiel eines solchen Prinzips nennt er die *Lokalität:* Eine sinnvolle Zusammenarbeit zwischen verschiedenen Prozessoren ist ohne Kommunikation nicht möglich, aber offensichtlich ist es bei Tausenden von Prozessoren technisch unmöglich, jeden dieser Prozessoren mit *jedem* anderen zu verbinden: Schon bei 1 000 Prozessoren wären dazu 499 500 Verbindungen notwendig. Also kann jeder Prozessor nur mit einem Bruchteil der anderen in direkter Verbindung stehen, die dadurch zu seinen „Nachbarn“ werden. Damit entsteht eine räumliche Struktur, denn die Kommunikation wird um so aufwendiger, je länger die Kette jeweils benachbarter Prozessoren vom Sender zum Empfänger der Nachricht ist. Da sich auch Ordnung im Chaos in räumlichen Strukturen manifestieren kann, wird damit bereits ganz schwach eine Verbindung zu dynamischen Systemen sichtbar.

Sie wird unterstützt durch das zweite von HILLIS genannte Prinzip der *Symmetrie:* Physikalische Gesetze sind symmetrisch, und nur durch konsequentes Ausnutzen dieser Symmetrien können kompliziertere physikalische Probleme wie auch kompliziertere Probleme über dynamische Systeme überhaupt gelöst werden. Entsprechend läßt sich die Verdrahtung von Tausenden von Prozessoren wohl nur dann beherrschen, wenn sie durch eine starke Symmetrie organisiert wird.

Der dritte und wohl wesentlichste Unterschied zwischen Physik und Informatik besteht darin, daß man zum Verständnis der physikalischen Welt die Dinge *zerlegt,* um so nach und nach immer speziellere Phänomene bis hin zu Atomen und Elementarteilchen zu untersuchen. In der Informatik dagegen beginnt man auf der untersten Stufe, indem man jedes Programm aus einfachsten Rechenbefehlen *zusammensetzt* – eine Vorgehensweise, die für die ersten Computer zwar adäquat war, da diese nur wenige Rechenschritte ausführen konnten, die aber heute, wie die sogenannte *Softwarekrise* in eindrucksvoller Weise belegt, schon bei Standardrechnern an ihre Grenzen stößt: Kaum ein komplexes Programm ist wirklich korrekt, und für einen Programmierer, der es verändern soll, ist es meist schon gar nicht mehr beherrschbar. Wenn es aber schon so schwer ist, einem *einzigen* Prozessor detailliert und fehlerfrei vorzuschreiben, was er tun soll, so ist es schlechterdings unmöglich, dies für *Tausende* von Prozessoren zu tun: HILLIS vergleicht dies mit dem Bau einer Brücke, ausgehend von den Prinzipien der Quantenchromodynamik. Welcher Ausweg bietet sich an? Offensichtlich müssen die Prozessoren ihre Zusammenarbeit selbst organisieren, und damit sind wir mit dem Stichwort *Selbstorganisation* bei einer der wesentlichen Stärken dynamischer Systeme angelangt.

Im Augenblick sind dynamische Systeme und neue Rechnerarchitekturen noch relativ weit voneinander entfernt, allerdings gibt es von beiden Seiten Entwicklungen in die jeweils andere Richtung, von denen im folgenden einige beschrieben werden sollen. Beginnen wir mit zwei Beispielen, wie Ideen aus der Theorie der dynamischen Systeme bei heute existierenden Rechnern angewandt werden:

Das erste sind die künstlichen neuronalen Netze, die in stark vereinfachter Form den Aufbau unseres Gehirns imitieren: Die als Neuronen bezeichneten Prozessoren sind in mehreren Schichten angeordnet, deren oberste der Eingabe und deren unterste der Ausgabe dient. Der Zustand eines jeden Neurons kann durch *eine* reelle Zahl beschrieben werden, und die Informationsverarbeitung geschieht dadurch, daß ein Neuron den Zustand einnimmt, der einer geeignet gewichteten Summe der Zustände seiner Nachbarneuronen entspricht. Das „Programm“ besteht aus den Gewichten für diese Summen; diese werden jedoch nicht von einem Programmierer festgelegt, sondern bilden sich in der *Lernphase* des Systems durch Selbstorganisation heraus: Falls das neuronale Netz etwa zur Mustererkennung benutzt werden soll, eine seiner erfolgreichsten Anwendungen, zeigt ihm ein Bediener in der Lernphase verschiedene Muster, deren Grau- oder Farbwerte zu den Anfangszuständen von Eingabeneuronen werden. Mit zunächst zufällig verteilten Gewichten identifiziert das System ein gezeigtes Testmuster (durch Anzeige geeigneter Werte an den Ausgabeneuronen) teils richtig, teils falsch, was ihm der

Bediener jeweils mitteilt. Als Reaktion darauf verändert das neuronale Netz seine Gewichte in geeigneter Weise, bis der Bediener mit den Ergebnissen bei seinen Testmustern zufrieden ist und die Lernphase für beendet erklärt.

In abstrakt-mathematischer Sprache ist ein neuronales Netz in seiner Lernphase also nichts anderes als ein dynamisches System, dessen Zustand durch die Zustände der einzelnen Neuronen und die Gewichte gegeben ist, und das sich durch Selbstorganisation einer vorgegebenen Aufgabe anpaßt. In der Anwendungsphase sind die Gewichte konstant; das System wird dadurch sehr einfach und kann in kürzester Zeit auf ein eingegebenes Muster reagieren. Bei Anwendungen dieser Art sind neuronale Netze um mehrere Größenordnungen schneller als herkömmliche Rechner, die gerade für solche Aufgaben sehr schlecht geeignet sind. Umgekehrt sind neuronale Netze für Aufgaben, bei denen die klassischen Computer ihre Stärke haben, wenig geeignet: Genau wie unser Gehirn haben sie beispielsweise Schwierigkeiten mit umfangreichen Rechnungen. Neuronale Netze sind also eher komplementär zu herkömmlichen Rechnern und können diese nur bei Spezialanwendungen ersetzen.

Natürlichen wie auch künstlichen neuronale Strukturen war die Vortragsreihe 1993 des *Studium generale* der Universität Mannheim gewidmet; für Einzelheiten sei daher auf Heft 42 der *Mannheimer Berichte* verwiesen.

Ein zweites Beispiel ist die vom bereits zitierten Autor HILLIS und anderen Wissenschaftlern des Massachussetts Institute of Technology gebaute *connection machine,* ein Computer, bei dem die Prozessoren nach Art eines Quadratgitters oder Würfelgitters angeordnet sind. Bei der zur Zeit größten *connection machine,* der CM-2, sind bis zu $16^4 = 65\,536$ Prozessoren nach Art eines vierdimensionalen Würfelgitters miteinander verdrahtet; zur besseren Verdeutlichung des Prinzips möchte ich mich hier aber auf Quadratgitter beschränken. Dann kann man sich die *connection machine* vorstellen als ein kariertes Blatt Papier, auf dem an jeder Ecke eines Karos ein Prozessor sitzt; benachbarte Prozessoren sind entlang der Karokanten miteinander verbunden.

Zur Lösung eines Problems werden die anfallenden Teilaufgaben zunächst in irgendeiner Weise auf die gerade freien Prozessoren verteilt. Wenn ein Prozessor Ergebnisse eines anderen Prozessors benötigt, muß er mit diesem kommunizieren; dies ist um so effizienter, je kürzer ein Kantenzug entlang der Karos ist, der die beiden Prozessoren miteinander verbindet: Je weniger Kanten gebraucht werden, desto weniger unbeteiligte Prozessoren werden mit der Kommunikation behelligt. Falls sich nun herausstellt, daß beispielsweise die beiden Prozessoren in der linken unteren und der rechten oberen Ecke viel miteinander kommunizieren, wohingegen der Prozessor links unten kaum Kommunikation mit seinem rechten Nachbar hat, so tauscht dieser rechte Nachbar seine Rolle mit dem Prozessor aus der oberen Ecke: Da alle Prozessoren als physikalische Systeme identisch sind, unterscheiden sie sich abgesehen von ihrem Platz nur durch die gespeicherte Information; wenn zwei Prozessoren diese Information austauschen, übernimmt jeder die bisherige Aufgabe des anderen. Auf diese Weise entsteht eine Dynamik, die Prozessoren mit großem Kommunikationsbedarf aufeinander zu bewegt und sie gegebenenfalls, wenn ihre Kommunikation nachläßt und andere Verbindungen wichtig werden, auch wieder auseinandertreibt. Diese Dynamik wird im allgemeinen chaotisch sein, jedoch spielt dieser Aspekt eigentlich keine Rolle: Wichtig ist nur, daß die Dynamik zu einer Selbstorganisation des Systems führt, die die Rechenleistung erhöht.

Trotz aller Vorteile, die eine solche Architektur bietet, ist allerdings auch die *connection machine* noch recht nahe am klassischen Computer; idealerweise sollten physikalische Prinzipien *unmittelbar* statt durch elektronische Simulation in die Rechnung eingehen. Dies ist bislang noch in keinem real existierenden Computer verwirklicht, es gibt aber bereits erste theoretische Ansätze, die zeigen, daß dynamische Systeme langfristig vielleicht *direkt* als Rechner eingesetzt werden können.

Eine sehr theoretische Möglichkeit haben wir bereits kennengelernt mit dem MOOREschen Resultat, wonach jede Rechnung durch die Dynamik eines dreidimensionalen Systems beschrieben werden kann. Da hierbei jedoch allfällige kleine Störungen bei den Anfangswerten (dem „Programm“) die Dynamik (die „Rechnung“ und das „Ergebnis“ also) in chaotischer Weise beeinflussen, ist dieses Resultat für reale Anwendungen nutzlos.

Fehlertoleranter ist ein Ansatz von OMOHUNDRO **[Om]**, der die Eingabedaten durch eine Folge von Pulsen kodiert, die Eingabefunktion, und ein dynamisches System angibt, das diese Eingabefunktion in eine entsprechend kodierte Ausgabefunktion überführt. Ein anderer Ansatz, der Berechnungsmodelle mit dynamischen Systemen verbindet, ist die *konservative Logik* von E. FREDKIN und T. TOFFOLI **[F-T]**, bei der Rechnungen durch ein (physikalisch realisierbares) dynamisches System ausgeführt werden, das die im Anfangszustand enthaltene Information so transformiert, daß die als Ergebnis gewünschte Information vom irrelevanten Rest separiert wird. Dies ist vergleichbar mit dem Zulaufen eines dynamischen Systems auf einen Attraktor: Falls man einen späteren Zustand mit beliebiger Genauigkeit kennt, läßt sich dadurch auch jeder frühere Zustand rekonstruieren, allerdings ist die Information darüber in den hinteren Dezimalstellen kodiert, wohingegen die relevante Information, die das Annähern an den Attraktor ausdrückt, in den vorderen Stellen steht.

Inwieweit solche Ansätze zu neuen, besseren Rechnerarchitekturen führen können, ist heute noch nicht abzusehen; sicher ist aber, daß die immer größer und komplexer werdenden massiv parallelen Systeme mit Methoden der traditionellen Informatik nicht beherrschbar sind und daß alle bisherigen erfolgreichen Ansätze zur Konstruktion und Anwendung solcher Rechner in irgendeiner Weise dynamische Systeme und deren Fähigkeit zur Selbstorganisation benutzen.

5.3 Komprimierung von Bilddaten

Wir kennen bislang nur den LORENZ-Attraktor als Beispiel eines chaotischen Attraktors, aber natürlich gibt es zahlreiche weitere Beispiele. Wie so häufig bei einer chaotischen Dynamik ist in der Tat fast *alles* möglich: Nach dem *Collagensatz* von BARNSLEY **[Ba]** etwa kann jede ebene Punktmenge beliebig genau durch den Attraktor eines zweidimensionalen diskreten dynamischen Systems angenähert werden. Dieses System besteht allerdings im Gegensatz zu den bisher betrachteten aus *mehreren* Transformationen, die alle simultan auf *jeden* Punkt des Bildes angewandt werden.

Die Grundidee besteht darin, daß man nach Selbstähnlichkeiten des Bildes sucht, nach Bildteilen also, die in ähnlicher Form verkleinert an anderen Stellen vorkommen. Das dynamische System besteht dann aus Transformationen, die solche Bildteile ineinander überführen. Bei geschickter Auswahl der Transformationen nähert sich das dynamische System, ausgehend von einem beliebigen Startbild, immer mehr an eine Approximation des gegebenen Bildes an. Daher kann man anstelle des Bildes auch das entsprechende dynamische System speichern oder übertragen, was bei realistischen Bildern im allgemeinen zu großen Einsparungen führt. In Abbildung 21 sind für ein Beispielbild das Original und die ersten fünf Iterationsschritte für seine Rekonstruktion aus einem dynamischen System mit 2 362 Transformationen zu sehen; Ausgangsbild für die Iteration war ein (nicht abgedrucktes) durchgehend schwarzes Quadrat. Obwohl bei der Speicherung des dynamischen Systems kein großer Wert auf Optimierung gelegt wurde und auch die Transformationen nicht nach dem bestmöglichen Verfahren ausgewählt wurden, benötigt man dafür weniger als 1/35 des Speicherplatzes, der für das Originalbild gebraucht wird. Mit größerem Aufwand und geringfügig größeren Abstrichen bei der Bildqualität lassen sich auch Kompressionsraten von bis zu 1:100 erreichen. Abb. 21

Natürlich ist diese *fraktale Bildkomprimierung* nicht das einzig mögliche Komprimierungsverfahren: Bei den meisten Anwendungen wie etwa dem digitalen Fernsehen, der digitalen Bildübertragung zwischen Computern, bei Photo-CDs oder für die Fingerabdruckdatei des FBI werden andere Verfahren verwendet. Bezüglich der erreichten Kompressionsraten kann die fraktale Komprimierung recht gut mithalten, und bei der subjektiven Beurteilung der Bildgüte hat sie sogar leichte Vorteile: Während Bilder bei starker Kompression mit anderen Methoden oft sehr flächig wirken, hat ein fraktaler Attraktor Details in jedem beliebig kleinen Bildteil. Das sind zwar im allgemeinen nicht die Details des Ausgangsbilds, aber sie wirken doch meist angenehmer als eine strukturlose Fläche. Der große Nachteil der fraktalen Komprimierung liegt in der Schwierigkeit, zu einem gegebenen Bild ein geeignetes dynamisches System zu finden. Noch vor einigen Jahren war dies nur mit menschlicher Beteiligung möglich; inzwischen gibt es auch erste Algorithmen, nach denen ein Computer selbständig ein solches System konstruieren kann. Diese Algorithmen sind allerdings noch nicht sonderlich gut und im übrigen auch ziemlich langsam. An ihrer Verbesserung wird vielerorts gearbeitet (auch an der Universität Mannheim), vielleicht wird es also bald Anwendungen geben, für die fraktale Komprimierung das Verfahren der Wahl ist. Einen Überblick über den derzeitigen Entwicklungsstand bietet etwa das Buch **[Fi]**; Abbildung 21 wurde mittels der dort angegebenen Programme berechnet.

6. Wohin führt die Suche nach Ordnung im Chaos?

Nach dieser Auflistung von Beispielen ist es an der Zeit, wieder zur Ausgangsfrage zurückzukehren, der Frage nach der Ordnung im Chaos. Wie wir gesehen haben, läßt sich auch nicht in jedem „mathematischen" Chaos eine Ordnung finden: Bereits ein dreidimensionales dynamisches System kann so komplex sein wie beispielsweise die gesamte Zahlentheorie, und natürlich kann man für ein solches System nur sehr wenige Voraussagen machen. Trotzdem sollte man dieses negative Resultat nicht überbewerten: Schließlich sind nach den GÖDELschen Sätzen auch viele zahlentheoretische Aussagen unentscheidbar, ohne daß dies zum Ende der Zahlentheorie geführt hätte: Viele interessante Sätze wurden seither bewiesen, und täglich kommen neue dazu; selbst die FERMAT-Vermutung, über deren Unentscheidbarkeit immer wieder spekuliert wurde, ist inzwischen durch die Arbeiten von WILES und TAYLOR wohl bewiesen. Entsprechend sind auch bei der sehr viel jüngeren Theorie chaotischer dynamischer Systeme noch viele neue und interessante Erkenntnisse zu erwarten.

Über die Art künftiger Ergebnisse und über die Methoden, mit denen sie erzielt werden, läßt sich natürlich nur spekulieren, aber zumindest ein Aspekt der bisherigen Forschung erscheint mir auch für die Zukunft wesentlich zu sein: Chaos ist immer nur *ein* möglicher Aspekt für das Verhalten eines Systems und kann nur dann wirklich verstanden werden, wenn man den Zusammenhang mit anderen Aspekten nicht aus den Augen verliert. Bei der logistischen Gleichung etwa kommt alle Symmetrie des fraktalen Attraktors (und damit auch der theoretische Ansatz zur Berechnung seiner fraktalen Dimension) von den Gesetzmäßigkeiten der Periodenverdoppelung, von Gesetzen also, die sich auf periodisches und somit nichtchaotisches Verhalten beziehen. Auch die KAM-Theorie beruht darauf, daß sie periodische Lösungen nichtchaotischer Systeme betrachtet und zeigt, daß einige von deren Gesetzmäßigkeiten noch erhalten bleiben, wenn man das System in eines mit chaotischer Dynamik deformiert. Deshalb erscheint es mir ziemlich unwahrscheinlich, daß eine *reine Chaostheorie* in der nahen Zukunft wesentliche Beiträge zum Verständnis chaotischer Phänomene leisten wird; die Fortschritte werden wohl weiterhin aus der allgemeinen Theorie der (nichtlinearen) dynamischen Systeme kommen.

Schaut man sich an, wie die bisherigen Fortschritte auf diesem Gebiet in den letzten Jahren zustande kamen, ist man versucht, die letzte Aussage noch einmal erheblich zu erweitern: Die Theorie der nichtlinearen Differentialgleichungen erlebte in den letzten Jahren einen ungeheuren Aufschwung, der unter anderem dazu führte, daß auf dem internationalen Mathematikerkongreß 1994 in Zürich drei von vier vergebenen Fieldsmedaillen an Forscher aus diesem Gebiet gingen. (Die Fieldsmedaille ist der „Ersatz“ für den nichtexistenten Nobelpreis für Mathematik; sie wird alle vier Jahre an im allgemeinen vier Mathematiker vergeben.) Alle drei Forscher haben, jeweils neben vielen anderen Arbeiten, auch Beiträge zu hier angesprochenen Problemkreisen geleistet: JEAN BOURGAIN zeigte durch eine Kombination von Methoden aus der analytischen Zahlentheorie, der harmonischen Analyse und der Theorie nichtlinearer Funktionenräume, daß die Lösungen einiger wichtiger nichtlinearer Differentialgleichungen der mathematischen Physik in nichtchaotischer Weise von ihren Anfangsbedingungen abhängen. PIERRE LOUIS LIONS, dessen Werk einen weiten Bogen zwischen nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen und der Wahrscheinlichkeitstheorie umspannt, zeigte unter anderem, daß Probleme wie Systeme sich bewegender und einander stoßender Teilchen zumindest *im Mittel,* das heißt für die Teilchendichten, gelöst werden können. Die Arbeiten von JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ schließlich geben Auskunft über die Grenzen zwischen den Einzugsbereichen verschiedener Attraktoren desselben dynamischen Systems und über das Stabilitätsverhalten dynamischer Systeme für die Parameterwerte, bei denen ein bislang stabiles System instabil wird; seine Methoden kommen aus der Geometrie, der Analysis und der Kombinatorik, dazu kommen Beispielrechnungen sowohl mit als auch ohne Computer.

Die Moral aus der Geschichte ist wohl, daß auch eine bloße Theorie der dynamischen Systeme nicht ausreicht; der allgemeine Trend der Mathematik, die (meist erst vor vierzig bis fünfzig Jahren gezogenen) starren Trennlinien zwischen den einzelnen Teilgebieten wieder einzureißen, ist wohl auch hier ein wesentlicher Motor der Entwicklung: Die FERMAT-Vermutung wurde bewiesen mit einer Kombination von Ideen aus der Zahlentheorie, der Geometrie, der Funktionentheorie, der Darstellungstheorie und aus anderen Teilgebieten der Mathematik, und entsprechend glaube ich, nicht zuletzt aufgrund der gerade kurz angerissenen Resultate, daß auch bei der Suche nach Ordnung im Chaos die wesentlichen Fortschritte aus der Entwicklung der Mathematik als *ganzer* kommen werden; wie bisher werden wohl die wichtigen neuen Erkenntnisse durch konsequenten Einsatz von Ideen aus so ziemlich allen Teilgebieten der Mathematik kommen, wobei – wie schon so oft in der Geschichte der Mathematik – sicherlich auch die Physik oftmals einen Weg weisen wird. Die von einigen Autoren propagierte eigenständige Chaostheorie, die sich teilweise sogar als moderne Alternative zur traditionellen Mathematik versteht, hatte zwar große Erfolge mit der *Veranschaulichung* chaotischer Phänomene, jedoch waren die dahinterstehenden Resultate oft schon Jahrzehnte vorher bekannt und verstanden; die „neue Dimension des Denkens" hat zumindest bislang nicht zu neuen Einsichten geführt, und ich kann mir nur schwer vorstellen, daß sich in Zukunft daran viel ändern wird.

Als Fazit können wir festhalten, daß es bei der Suche nach Ordnung im Chaos schon eine ganze Reihe von Erfolgen gab, meist dadurch, daß man Chaos zu anderen Phänomenen in Beziehung setzen konnte. Andererseits ist Chaos aber auch immer mit einem *Informationsverlust* verbunden ist, den keine noch so geniale Theorie rückgängig machen kann; die Erforschung chaotischer Phänomene stößt also immer wieder auf unüberwindliche Grenzen. Da wir aber noch weit davon entfernt sind, das Gebiet diesseits dieser Grenzen auch nur annähernd zu beherrschen, wird die Entwicklung mit Sicherheit weitergehen und die Suche nach Ordnung im Chaos wird noch zu manchen Erfolgen führen, die uns den vorhersagbaren Teil des Verhaltens dynamischer Systeme immer besser verstehen lassen.

Damit bleibt nur noch die eingangs gestellte Frage, was das alles mit dem Aufschwung der deutschen Wirtschaft zu tun haben könnte. Die vorgestellten wie auch die sonstigen Anwendungen chaotischer Dynamik sind noch weit davon entfernt, wirtschaftlich eine nennenswerte Rolle zu spielen, und auch für das Verständnis wirtschaftlicher Zusammenhänge hat die Theorie der dynamischen Systeme zwar der wirtschaftswissenschaftlichen Grundlagenforschung manche Impulse gegeben, sie kann aber sicher nicht die wirtschaftliche Entwicklung des nächsten Jahres vorhersagen oder gar steuern. Bleibt also nur zu hoffen, daß der nächste Aufschwung auch ohne eine aktive Rolle der Chaostheorie kommen wird.

[Ba] M. BARNSLEY: Fractals everywhere, *Academic Press, 1988*

[Bu] TH. BUZUG: Analyse chaotischer Systeme, *Bibliographisches Institut Mannheim,* 1994

[Ca] J.L. CASTI: Reality Rules I + II, *Wiley,* 1992

[Co] S. COLEMAN: Cycles and chaos in political party voting – a research note, *J. Math. Soc.* **18** (1993), 47–64

[CKP] B.A. COOMES, H. KOÇAK, K.J. PALMER: Periodic Shadowing, *in* P.E. KLOEDEN, K.J. PALMER [HRSG.]: Chaotic Numerics, *Am. Math. Soc, Contemporary Math.* **172** (1994), 115–130

[Fb] M.J. FEIGENBAUM: Universal Behavior in Nonlinear Systems, *Los Alamos Science* **1** (1980), 4–27; *nachgedruckt in* P. CVITANOVIĆ [HRSG.]: Universality in Chaos, *Bristol, New York* ^{2}1989, 49–84

[Fi] Y. FISHER [HRSG.]: Fractal Image Compression – Theory and Applications, *Springer 1995*

[Fr] V. FRANCESCHINI: A Feigenbaum sequence of bifurcations in the Lorenz model, *J. Stat. Phys.* **22** (1980), 397–406

[F-S] M. FRANK, T. STENGOS: Chaotic Dynamics in Economic Time Series, *J. Econ. Surveys* **2** (1988), 103–133

[F-T] E. FREDKIN, T. TOFFOLI: Conservative Logic, *Int. J. Theor. Phys.* **21** (1982), 219–253

[Gö] K. GÖDEL: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, *Monatsh. Math. Phys.* **38** (1931), 173–198

[Hak] H. HAKEN: Analogy between higher instabilities in fluids and lasers, *Phys. Lett.* **A53** (1975), 77–78

[Han] T. HANNAH: Does Chaos Theory Have Applications to Psychology?: The Example of Daily Mood Fluctuations, *Network* **8** (1990), 13–14

[Hi] D. HILBERT: Probleme der Grundlegung der Mathematik, *Math. Ann.* **102** (1930), 1–9

[Hln] R.C. HILBORN: Chaos and Nonlinear Dynamics, *Oxford University Press,* 1994

[Hls] W.D. HILLIS: New Computer Architectures and Their Relationship to Physics or Why Computer Science Is No Good, *Int. J. Theor. Phys.* **21** (1982), 255–262

[Ho] P. HOLMES: Poincaré, celestial mechanics, dynamical-systems theory and “chaos”, *Physics Reports* **193** (1990), 137–163

[HZHT] B. HASSARD, J. ZHANG, S.P. HASTINGS, W.C. TROY: A computer proof that the Lorenz equations have “chaotic” solutions, *Appl. Math. Lett.* **7** (1994), 79–83

[Ja] M.V. JAKOBSON: Stochastic behavior above Feigenbaum’s parameter value, *in* Dynamical Systems and Ergodic Theory, *Banach Center Publications* **23** (1989), 465–474

[Kan] K. KANEKO: Globally Coupled Chaos Violates the Law of Large Numbers but Not the Central-Limit Theorem, *Phys. Rev. Lett.* **65** (1990), 1391–1394

[Lan] O.E. LANFORD III: A computer-assisted proof of the Feigenbaum conjectures, *Bull. Am. Math. Soc.* **6** (1982), 427–434

[Lap] P.S. LAPLACE: Théorie analytique des probabilitées, *Paris,* 1820 *oder* Œuvres de Laplace, tome 7$^{\text{ème}}$, *Paris,* 1847

[Li] SIR JAMES LIGHTHILL, F.R.S.: The recently recognized failure of predictability in Newtonian dynamics, *Proc. R. Soc. Lond.* **A407,** 35–48

[Lor1] E.N. LORENZ: Deterministic Nonperiodic Flow, *J. Atmos. Sci.* **20** (1963), 130–141, *nachgedruckt in* P. CVITANOVIĆ [HRSG.]: Universality in Chaos, *Bristol, New York* ^{2}1989, 367–378

[Lor2] —: The predictability of hydrodynamic flow, *Trans. N.Y. Acad. Sci.* **25** (1963), 409–432

[Lor3] —: Computational chaos – a prelude to computational instability, *Physica* **D35** (1989), 299–317

[M] C. MOORE: Unpredictability and Undecidability in Dynamical Systems, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990), 2354–2357

[MM] K. MISCHAIKOW, M. MROZEK: Chaos in the Lorenz equations: A computer-assisted proof, *Bull. Am. Math. Soc.* **32** (1995), 66–72

[N-P] G. NICOLIS, I. PRIGOGINE: Self-Organization in Nonequilibrium Systems – From Dissipative Structures to Order through Fluctuations, *Wiley, 1977*

[Om] S. OMOHUNDRO: Modelling cellular automata with partial differential equations, *Physica* **D10** (1984), 128–134

[P] H. POINCARÉ: Les méthodes nouvelles de la méchanique céleste, *Paris,* 1892; *Neuauflage in englischer Sprache:* New methods in celestial mechanics, *American Institute of Physics,* 1993

[Sp] C. SPARROW: The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors, *Springer, Applied Mathematical Sciences* **41**, 1982

[St] A.M. STUART: Numerical analysis of dynamical systems, *Acta Numerica* 1994, 467–572

[Tu1] A.M. TURING: On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem, *Proc. London Math. Soc.* **42** (1937), 230–265 *und* **43** (1937), 544–546

[Tu2] —: The chemical basis of morphogenesis, *Proc. R. Soc. Lond.* **B641** (1952), 37–72 *oder in* P.T. SAUNDES [HRSG.]: Collected Works of A.M. Turing, Morphogenesis, *North-Holland,* 1992, 1–36