Seminar über Computeralgebra im SS 2003
Nichtlineare Gleichungssysteme und ihre Anwendungen

HEINZ KREDEL – Martin Schlichenmaier – WOLFGANG K. SEILER

1. Vortrag: Resultanten I

Die Resultante zweier Polynome ist eine Determinante, die genau dann verschwindet, wenn die beiden Polynome eine gemeinsame Nullstelle haben. Sie soll in diesem Vortrag zusammen mit ihren wichtigsten Eigenschaften eingeführt werden; insbesondere soll gezeigt werden, wie man sie nach einer Art EUKLIDischem Algorithmus deutlich effizienter berechnen kann als nach den aus der linearen Algebra bekannten Verfahren.

Interessant werden Resultanten vor allem, wenn die Koeffizienten der beiden Polynome selbst von Variablen abhängen. Im letzten Teil des Vortrags soll anhand einfacher Beispiele gezeigt werden, wie man damit Systeme von Polynomgleichungen lösen kann.

Literatur: Resultanten sind in vielen Algebralehrbüchern zu finden, vor allem in den älteren Büchern und in ganz neuen rechnerorientierten. Ein Klassiker ist etwa

B. L. VAN DER WAERDEN: Algebra I,

in vielen Auflagen bei Springer erschienen; in den meisten steht die Resultantentheorie in §§34–35. Ein neueres Buch, das sich auch ausführlich mit der Anwendung auf Gleichungssysteme befaßt, ist

COX/LITTLE/O'SHEA: Using Algebraic Geometry, *Springer,* 1998,

dessen drittes Kapitel eine sehr auführliche Einführung in die Resultantentheorie bietet.

2. Vortrag: Gröbnerbasen I

GRÖBNERbasen sind das nichtlineare Analogon zur Endgestalt eines linearen Gleichungssystems nach Anwendung des GAUSS-Algorithmus; der BUCHBERGER-Algorithmus konstruiert sie durch eine Kombination der Ideen hinter dem GAUSS-Algorithmus und dem EUKLIDischen Algorithmus. Da es für Polynome mehrerer Veränderlicher keine eindeutige Division mit Rest gibt, hängt alles ab von einer (bis zu einem gewissen Grad willkürlichen) Anordnung der Terme der Polynome.

Im Vortrag soll gezeigt werden, wie man nach Wahl einer solchen Ordnung Polynomdivision mit Rest durchführen kann und darauf aufbauend GRÖBNERbasen definiert.

Literatur: COX/LITTLE/O'SHEA: Ideals, Varieties and Algorithms, *Springer,* 1992, *Kapitel 2* mit Schwerpunkt auf §§2–6, wobei von §4 nur das Nötigste dargestellt werden sollte.

3. Vortrag: Gröbnerbasen II

In diesem Vortrag sollen zunächst einige Beispiele zum BUCHBERGER-Algorithmus gegeben werden, insbesondere für die lexikographische Ordnung. Dann soll gezeigt werden, daß für diese Ordnung bei einem nichtlinearen Gleichungssystem mit nur endlich vielen

Lösungen diese Lösungen aus der Endgestalt bestimmt werden können durch Nullstellenberechnung von Polynomen einer Veränderlichen.

Als weitere Anwendung soll gezeigt werden, wie man parametrische Kurven und Flächen in ihre implizite Form überführen kann.

Literatur: COX/LITTLE/O'SHEA: Ideals, Varieties and Algorithms, *Springer,* 1992, *Kapitel 2,* §§7+8

4. Vortrag: Resultanten II

Hier geht es um den Zusammenhang zwischen GRÖBNER-Basen und Resultanten sowie um effiziente Verfahren zur Berechnung von Resultanten.

Literatur: B. STURMFELS: Introduction to Resultants,
in: COX/STURMFELS [Hrsg.]: Applications of algebraic geometry, *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics* **58** (1998), S.25–39

5. Vortrag: Resultanten III

Mit Resultanten kann die Lösung eines Systems von Polynomgleichungen zurückgeführt werden auf die Nullstellenbestimmung für Polynome einer Veränderlichen. Letztere erfolgt allerdings bei Polynomen höheren Grades meist numerisch, und eine naive Kombination numerischer Nullstellenbestimmung mit Resultantenmethoden ist nicht möglich. In diesem Vortrag sollen symbolische und numerische Methoden verglichen werden und als erstes größeres Beispiel das Problem der Steuerung eines Roboterarms mit Resultanten gelöst werden.

Literatur: D. MANOCHA: Numerical methods for solving polynomial equations,
in: COX/STURMFELS [Hrsg.]: Applications of algebraic geometry, *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics* **58** (1998), S.41–66

Das Beispiel des Roboterarms mit sechs Freiheitsgraden ist ausführlicher und wohl auch etwas leichter lesbar behandelt in

M. RAGHAVAN: Manipilator kinematics,
in: R.W. BROCKET [Hrsg.]: Robotics, *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics* **41** (1990), S.21–47

6. Vortrag: Reelle Polynome einer Veränderlichen

Nicht nur für die Lösung von Gleichungssystemen mit Resultanten sondern beispielsweise auch bei der exakten Berechnung von Eigenvektoren oder bei vielen Algorithmen der rechnerischen Geometrie ist es wichtig, mit exakten Zahlen zu rechnen. Insbesondere müssen also auch Nullstellen von Polynomen *exakt* dargestellt werden.

Dies ist möglich, wenn man eine Nullstelle charakterisiert *erstens* durch das zugehörige Polynom oder, besser, einen möglichst kleinen Faktor davon, und *zweitens* durch ein Intervall, in dem es keine weitere Nullstelle gibt.

Im Vortrag soll zunächst gezeigt werden, wie man mit so dargestellten reellen Zahlen rechnen kann, d.h. wie man (via Resultanten) Polynome beispielsweise für die Summe oder das Produkt zweier solcher Zahlen findet, und wie man die Anzahl reeller Nullstellen eines Polynoms in einem gegebenen Intervall auf einfache Weise exakt berechnen kann (Sätze von STURM und DESCARTES).

Literatur: Die (sehr einfachen) Formeln für das Rechnen mit algebraischen Zahlen findet man in Beispiel 2.5 von

B. STURMFELS: Introduction to Resultants,
in: COX/STURMFELS [Hrsg.]: Applications of algebraic geometry, *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics* **58** (1998), S.25–39,

die Sätze von STURM und DESCARTES in §1.1 von

BENEDETTI/RISLER: Real algebraic and semi-algebraic sets, *Hermann,* 1990

7. Vortrag: Zusammenhang zwischen Nullstellen und Koeffizienten

In diesem Vortrag betrachten wir die $d+1$ Koeffizienten eines reellen Polynoms vom Grad d als Punkte in $\mathbb{R}^{d+1}$ und untersuchen, wie die Anzahl reeller Nullstellen vom Koeffiziententupel abhängt. Wie sich zeigen wird, gibt es Teilmengen von $\mathbb{R}^{d+1}$, in denen sich die Nullstellen als stetige und teilweise sogar differenzierbare Funktionen der Koeffizienten darstellen lassen.

Literatur: BENEDETTI/RISLER: Real algebraic and semi-algebraic sets, *Hermann,* 1990, §1.5+6

8. Vortrag: Zylindrische Zerlegung

Hier geht es darum, die Lösungsmenge eines beliebigen Systems reeller Polynomgleichungen so darzustellen, daß die Geometrie der Lösungsmenge klar wird; insbesondere soll auch die Lage der einzelnen Komponenten im $\mathbb{R}^n$ möglichst genau beschrieben werden. Die Lösungsmengen sind stets sogenannte semialgebraische Mengen; der Vortrag beginnt mit deren Definition. Danach werden die Resultate aus dem vorigen Vortrag benutzt, um die Struktur solcher Mengen zu beschreiben.

Literatur: BENEDETTI/RISLER: Real algebraic and semi-algebraic sets, *Hermann,* 1990, §2.1+2

Als Hintergrundmaterial interessant ist

G. COLLINS: Quantifier elimination by cylindrical algebraic decomposition – twenty years of progress
in: B. CAVENISH [Hrsg.]: Quantifier elimination and cylindrical algebraic decomposition, *Springer,* 1998, S. 8–23

9. Vortrag: Quantorenelimination und Entscheidbarkeit der Euklidischen Geometrie

Der Struktursatz aus dem letzten Vortrag kann auch logisch interpretiert werden über den Satz von TARSKI-SEIDENBERG, der zu Beginn des Vortrags bewiesen wird. Eine Umformulierung löst das sogenannte Problem der Quantorenelimination, was wiederum zu einem Entscheidungsalgorithmus für die EUKLIDische Elementargemetrie führt.

Literatur: BENEDETTI/RISLER: Real algebraic and semi-algebraic sets, *Hermann,* 1990, §2.3.2–4 und §2.3.8

A. TARSKI: A decision method for elementary algebra and geometry
in: B. CAVENISH [Hrsg.]: Quantifier elimination and cylindrical algebraic decomposition, *Springer,* 1998, S.24–84

Als Hintergrundmaterial eventuell interessant ist

SCHWABHÜSER, WOLFRAM; SZMIELEW, WANDA; TARSKI, ALFRED: Metamathematische Methoden in der Geometrie, *Springer (Hochschultext),* 1983

10. Vortrag: Quantorenelimination mit Gröbnerbasen und reelle Algebra

Hier soll gezeigt werden, daß die zu Beginn des Seminars behandelten GRÖBNERbasen einen alternativen Zugang liefern sowohl zur zylindrischen Zerlegung und zur Quantorenelimination als auch zu den Entscheidungsalgorithmen aus dem vorigen Vortrag.

Literatur: V. WEISPFENNING: A new approach to quantifier elimination for real algebra
in: B. CAVENISH [Hrsg.]: Quantifier elimination and cylindrical algebraic decomposition, *Springer,* 1998, S. 376–392

11. Vortrag: Das Problem des Klavierschiebers

Der Klavierschieber möchte einen Flügel aus einem Raum in einen anderen bringen. Natürlich muß er ihn dazu gelegentlich drehen oder hochkant nehmen, um durch die Türen zu kommen. Die zylindrische Zerlegung eines geeigneten $\mathbb{R}^n$, der sowohl die Position als auch die Lage des Flügels parametrisiert, kann entscheiden, ob es eine Möglichkeit gibt, von der Anfangsposition zur Endposition zu kommen und kann diesen Weg gegebenenfalls auch finden. In Anwendungen geht es natürlich meist nicht um Klaviere, sondern um mobile Roboter, die sich in einer statischen oder auch dynamischen Umgebung zielgerichtet bewegen sollen.

Literatur: BENEDETTI/RISLER: Real algebraic and semi-algebraic sets, *Hermann,* 1990, *Anhang D*

Als Hintergrundmaterial interessant ist

J. CANNY: The complexity of robot motion planning, *MIT Press,* 1988