Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

B6, B4.18

4. November 2020

6. Übungsblatt Algebra

Aufgabe 1: *(10 Punkte)*

Wir betrachten $R = \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

a) Zeigen Sie, daß R bezüglich der Addition und Multiplikation komplexer Zahlen ein kommutativer Ring ist!

b) Ist R ein Integritätsbereich?

c) Zeigen Sie, daß jede Einheit in R den Betrag eins hat und bestimmen Sie die Menge aller Einheiten!

d) Ist $R^\times$ eine zyklische Gruppe?

e) Welche der folgenden Teilmengen von R ist ein Ideal? Beweisen Sie entweder, daß es sich um ein Ideal handelt, oder zeigen Sie mit einem Gegenbeispiel, daß eine der Forderungen an ein Ideal verletzt ist!

$$I_1 = \{a + bi \in R \mid a \equiv 0 \bmod 2\}, \qquad I_2 = \{a + bi \in R \mid b \equiv 0 \bmod 2\},$$
$$I_3 = \{a + bi \in R \mid a \equiv b \equiv 0 \bmod 2\}, \qquad I_4 = \{a + bi \in R \mid a^2 + b^2 \equiv 0 \bmod 2\},$$
$$I_5 = \{a + bi \in R \mid b = 0\}, \qquad I_6 = \{a + bi \in R \mid a + b = 0\}$$

f) Welche der Ideale unter diesen Mengen sind Hauptideale?

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

Nun sei $R = \mathbb{Z}/10$.

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen in R der Polynome $f = 2X + 5$ und $g = 5X + 2$ aus $R[X]$!

b) Berechnen Sie das Produkt $fg \in R[X]$ und dessen Nullstellen!

c) Bestimmen Sie auch für $p = 3X + 5$ und $q = 7X + 2$ aus $R[X]$ alle Nullstellen von p, q und pq in R !

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

a) $f = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ sei ein primitives Polynom und p sei eine Primzahl, die alle a_i außer a_n teilt und deren Quadrat kein Teiler von a_0 ist. (Ein solches Polynom heißt p-Eisensteinsch.) Zeigen Sie, daß f irreduzibel ist!
Hinweis: Sie können ähnlich vorgehen wie beim Beweis, daß das Produkt zweier primitiver Polynome wieder primitiv ist.

b) Zeigen Sie: Ein Polynom $f = f(X) \in R[X]$ über einem Integritätsbereich R ist genau dann irreduzibel, wenn das Polynom $f(X + 1)$ irreduzibel ist.

c) Schreiben Sie $f = \dfrac{X^p - 1}{X - 1}$ als Polynom, und folgern Sie aus *a)* und *b)*, daß dieses für prime p irreduzibel ist!

Abgabe bis zum Dienstag, dem 10. November 2020, um 15.20 Uhr