

16. März 2022

## 5. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

### Aufgabe 1:

- Der simpliziale Komplex  $K$  habe die Ecken  $A = (1, 0)$ ,  $B = (0, 1)$ ,  $C = (-1, 0)$  und  $D = (0, -1)$ , die Kanten  $AB, AC, AD, CD$  und  $BC$ , sowie die Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle ADC$ . Bestimmen Sie die erste baryzentrische Unterteilung von  $K$ !
- Wie viele Ecken hat die zweite baryzentrische Unterteilung von  $K$ ?
- Bestimmen Sie die Homologiegruppen  $H_q(K^{(2)})$ !

### Aufgabe 2:

Zeigen Sie, daß jede Karte auf einem Torus mit höchstens sieben Farben so gefärbt werden kann, daß keine zwei benachbarten Gebiete die gleiche Farbe haben!

### Aufgabe 3:

- Zeigen Sie, daß  $A = \{(a + 3b, 2a - b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  eine Untergruppe vom Rang zwei von  $\mathbb{Z}^2$  ist!
- Der Homomorphismus  $f: A \rightarrow A$  bilde den Punkt  $(1, 2)$  ab auf  $(4, 1)$  und  $(3, -1)$  auf  $(-1, 5)$ . Berechnen Sie die Spur von  $f$ !
- Welchen Rang hat die Gruppe  $B = \{(6a + 3b, 4a + 2b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ?
- Welche Spur hat die Abbildung, die jeden Punkt  $(x, y)$  auf  $(2x, 2y)$  abbildet, als Homomorphismus  $A \rightarrow A$  bzw. als Homomorphismus  $B \rightarrow B$ ?

### Aufgabe 4:

Berechnen Sie für die folgenden Abbildungen der Kreislinie  $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  auf sich selbst die LEFSCHETZ-Zahlen:

- Drehung um  $90^\circ$
- Spiegelung an der  $x$ -Achse
- Spiegelung am Nullpunkt
- Die Abbildung, die den Punkt  $(\cos t, \sin t)$  abbildet auf  $(\cos 2t, \sin 2t)$ .
- Was ändert sich, wenn Sie die genannten Abbildungen auf der Kreisscheibe betrachten?