

9. März 2022

4. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1:

Finden Sie einen geometrischen simplizialen Komplex K , für den $|K|$ homöomorph zum Kreisring $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ ist, und berechnen Sie dessen Homologiegruppen!

Aufgabe 2:

- Ein (geometrischer) simplizialer Komplex K heißt zusammenhängend, wenn je zwei Ecken von K durch einen Kantenzug verbunden werden können. Zeigen Sie: K ist genau dann zusammenhängend, wenn der topologische Raum $|K|$ zusammenhängend ist.
- Der KRONECKER-Index einer 0-Kette $\sum_{i=1}^r \alpha_i P_i$ aus K mit Ecken P_i ist $\sum_{i=1}^r \alpha_i$. Zeigen Sie: Ist K zusammenhängend, so ist eine 0-Kette genau dann ein Rand, wenn ihr KRONECKER-Index verschwindet.
- Zwei 0-Zykeln eines zusammenhängenden simplizialen Komplexes liegen genau dann in derselben Homologiekategorie, wenn sie denselben KRONECKER-Index haben.
- Für einen zusammenhängenden simplizialen Komplex K ist $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$.
- Finden Sie ein Beispiel eines simplizialen Komplexes K mit $H_0(K) \cong \mathbb{Z}^2$ und $H_1(K) \cong \mathbb{Z}$!

Aufgabe 3:

Der abstrakte simpliziale Komplex \mathfrak{K} bestehe aus allen nichtleeren Teilmengen der Menge $\{A, B, C, D\}$, der Unterkomplex \mathfrak{L} aus allen diesen Mengen außer $\{A, B, C, D\}$ selbst.

- Finden Sie geometrische Realisierungen von \mathfrak{K} und \mathfrak{L} !
- Berechnen Sie dort den Stern und den Link von A !
- Berechnen Sie die Homologiegruppen der beiden Komplexe!
- Finden Sie eine ebene geometrische Realisierung von \mathfrak{L} !

Aufgabe 4:

Die Kettenabbildungen $\varphi, \varphi': \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $\psi, \psi': \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ zwischen den Kettenkomplexen \mathcal{C}, \mathcal{D} und \mathcal{E} seien homotop. Zeigen Sie, daß dann auch die Hintereinanderausführungen $\psi \circ \varphi$ und $\psi' \circ \varphi'$ homotope Kettenabbildungen zwischen \mathcal{C} und \mathcal{E} sind!