Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

23. Februar 2014

2. Übungsblatt Zahlentheorie

Aufgabe 1: *(3 Punkte)*

a) Für zwei natürliche Zahlen $a \geq b$ braucht man Tausend Divisonen, um $\operatorname{ggT}(a, b)$ nach dem Euklidischen Algorithmus zu berechnen. Wie viele Dezimalstellen hat b mindestens?

b) Gibt es auch Zahlen $\widetilde{a}$ und $\widetilde{b}$ mit jeweils einer Dezimalstelle mehr, so daß der Euklidische Algorithmus genau Tausend Divisionen benötigt?

Aufgabe 2: *(3 Punkte)*

Die Folge der Zahlen x_n sei definiert durch $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1}$ für $n \geq 1$. Finden Sie eine explizite Formel für x_n !

Aufgabe 3: *(3 Punkte)*

a) Die rationale Zahl x erfülle die Polynomgleichung $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ mit $a_i \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie: Stellt man x dar als einen gekürzten Bruch, so ist dessen Nenner ein Teiler von a_n !

b) Zur rationalen Zahl x gebe es natürliche Zahlen n, m derart, daß $x^n = m$ ist. Zeigen Sie, daß x dann eine ganze Zahl ist.

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß eine IBAN folgendermaßen überprüft werden kann: Man streiche vorne den Ländercode und die beiden Prüfziffern und hänge diese vier Zeichen hinten an. Danach werden alle Buchstaben nach dem Schema $A = 10$ bis $Z = 25$ in Zahlen umgewandelt. Für eine korrekte IBAN muß das Ergebnis eine Zahl $x \equiv 1 \bmod 97$ sein.

b) Aus Datenschutz- und Sicherheitsgründen wird in Informationen über Konto- oder Kartennummern oft ein Teil der Zeichen durch Sterne ersetzt. Sie finden einen Brief, in dem auf ein Konte mit IBAN DE13 **** **** **** **34 99 und BIC PRIMDE31 verwiesen wird. Auf dem Server der Bundesbank sehen Sie, daß dieser BIC zu einer Niederlassung der Primbank mit BLZ 2 3 5 7 11 13 gehört. Da diese Bank nur wenige Kunden hat, können Sie davon ausgehen, daß die Kontonummern dort höchstens sechsstellig sind. Rekonstruieren Sie die IBAN!

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

a) Ein Mathematiker möchte zur Feier seines Geburtstags die Kerzen (eine für jedes Lebensjahr) so auf ausgewählten Geburtstagstorten verteilen, daß die Anzahl auf jeder dieser Torten das Quadrat einer (festen) Primzahl p ist. Bei seinen Versuchen mit $p = 2, 3$ und 5 bleiben dabei aber jeweils p Kerzen übrig. Wie alt wird er?

b) Wie alt müßte er werden, bis ihm dies zum nächsten Mal passiert?

c) Einige Zeit versucht er dasselbe bei der Feier zum Geburtstag eines klassischen griechischen Mathematikers. Aus Mangel an Torten kann er hier allerdings nicht mit so kleinen Primzahlen arbeiten und versucht es deshalb mit $p = 7$ und $p = 11$. Wieder bleiben jeweils p Kerzen übrig. Wann wurde der griechische Mathematiker geboren?

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 1. März 2018, um 10.10 Uhr