

15. Februar 2017

1. Übungsblatt Zahlentheorie

Aufgabe 1: (2 Punkte)

Zeigen Sie: Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ist $\sqrt[n]{2}$ irrational!

Aufgabe 2: (4 Punkte)

- a) Zeigen Sie ohne Verwendung des Satzes von der eindeutigen Primzerlegung, daß das Quadrat einer natürlichen Zahl a genau dann durch drei teilbar ist, wenn dies für a selbst der Fall ist!
- b) Folgern Sie, daß $\sqrt{3}$ irrational ist!

Aufgabe 3: (4 Punkte)

- a) Zeigen Sie, daß für jede natürliche Zahl n gilt: $\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{n!}{i!} < \frac{1}{n}$!

Hinweis: Kürzen Sie die Summanden, und schätzen Sie die Summe ab durch eine geometrische Reihe!

- b) Schreiben Sie $\sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} = \frac{a_n}{n!}$ als Bruch mit Nenner $n!$, und zeigen Sie mit Hilfe von a), daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{a_n}{n!} < e < \frac{a_n + 1}{n!}$.
- c) Folgern Sie, daß $e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$ eine irrationale Zahl ist!

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Berechnen Sie die größten gemeinsamen Teiler der folgenden Zahlen und stellen Sie diese als ganzzahlige Linearkombinationen der Ausgangszahlen dar:

- a) 17 und 81 b) 15 und 1005 c) 1234 und 4321

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Zu ihrem großen Leidwesen konnten die Mitglieder des Männergesangsvereins *Altöttinger Brummbass* von 1858 am gestrigen Valentinstag nicht alleine losziehen, ohne den Familienfrieden zu gefährden. Jedes Mitglied brachte daher, falls vorhanden, seine Frau mit, und wenn das Paar Kinder hatte, waren auch die dabei. Um zehn Uhr morgens brachen achtundvierzig Personen auf; die größte Familie hatte sieben Mitglieder. Um halb elf Uhr erreichte der Zug einen Stand, der Erfrischungen und Blumen verkaufte. Jeder Mann konsumierte dort Bier im Wert von dreizehn Euro. Wegen des Valentinstags schenkte er, falls er nicht alleine unterwegs ist, seiner Frau einen Blumenstrauß für fünf Euro, und falls er Kinder hatte, spendierte er jedem ein Eis für zwei Euro. Insgesamt nahm der Stand dabei dreihundert Euro ein. Was können Sie über die Anzahl der Männer, Frauen und Kinder sagen?

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 22. Februar 2017, um 10.10 Uhr