Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

20. Mai 2014

13. Übungsblatt Zahlentheorie

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Entscheiden Sie, ob die Kongruenzen $x^2 \equiv 99 \bmod 991$ und/oder $x^2 \equiv 77 \bmod 991$ Lösungen haben! (*Hinweis:* 991 ist prim,)

b) Bestimmen Sie in den lösbaren Fällen alle Lösungen! (*Hinweis:* Benutzen Sie Aufgabe 3*b)* vom dritten Übungsblatt!)

Aufgabe 2: *(3 Punkte)*

a) N sei eine natürliche Zahl mit letzter Dezimalziffer n; durch Streichen dieser Ziffer entstehe die Zahl m. Zeigen Sie: Genau dann ist N durch sieben teilbar, wenn $m-2n$ durch sieben teilbar ist!

b) Zeigen Sie damit, daß 10024 durch sieben teilbar ist!

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

a) Berechnen Sie im Körper $\mathbb{F}_{19}$ die Elemente $5/17$ und 3^6 !

b) Zeigen Sie, daß die Zwei eine primitive Wurzel modulo 19 ist!

c) Geben Sie für jede mögliche Ordnung eines Elements von $\mathbb{F}_{19}^\times$ ein $x \in \mathbb{F}_{19}$ an, das genau diese Ordnung hat!

d) Wie viele Elemente hat die prime Restklassengruppe modulo 76?

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) Finden Sie den Bruch mit einstelligem Nenner, der die beste Approximation zu $5/17$ gibt!

b) Gegen welche Zahl konvergiert der Kettenbruch $[4;\overline{2,4}] = 4 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\ddots}}}$?

c) Finden Sie $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x^2 - 7y^2 = 1$!

d) p/q sei Konvergente des Kettenbruchs zu $\log n$.
Was können Sie über $|\log n - p/q|$ sagen?

Aufgabe 5: *(3 Punkte)*

a) Schreiben Sie 15 im Ring $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i$ als Produkt irreduzibler Elemente!

b) Ist diese Darstellung eindeutig?

Abgabe bis zum Dienstag, dem 27. Mai 2014, um 11.55 Uhr