

13. Mai 2014

12. Übungsblatt Zahlentheorie

Aufgabe 1: (7 Punkte)

- Dividieren Sie in $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i$ die Zahl $3 + 4i$ mit Rest durch $1 + 2i$!
- Was ist der ggT von $3 + 4i$ und $1 + 2i$?
- Berechnen Sie in $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i$ den ggT von $17 + 4i$ und $5 - 10i$!
- Dividieren Sie in \mathcal{O}_{-2} die Zahl $1 + 5\sqrt{-2}$ mit Rest durch $1 - 3\sqrt{-2}$!
- Dividieren Sie in \mathcal{O}_{-3} die Zahl 2 mit Rest durch $1 + \sqrt{-3}$!
- Dividieren Sie in \mathcal{O}_2 die Zahl $1 + 5\sqrt{2}$ mit Rest durch $1 - 3\sqrt{2}$!

Aufgabe 2: (4 Punkte)

- Finden Sie in $\mathbb{Q}[\sqrt{-13}]$ ein Element z , so daß für alle $q \in \mathcal{O}_{-13}$ gilt $N(z - q) > 1$!
- Finden Sie in \mathcal{O}_{-13} zwei Elemente x, y derart, daß es keine Elemente $q, r \in \mathcal{O}_{-13}$ gibt mit $x = qy + r$ und $N(r) < N(y)$!

Aufgabe 3: (4 Punkte)

- Berechnen Sie die Quaternion $\frac{1}{1 + i + j + k}$!
- Dem Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ werde die Quaternion $q_{\vec{v}} = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ zugeordnet. Drücken Sie das Produkt $q_{\vec{v}} q_{\vec{w}}$ zweier solcher Quaternionen aus durch das Vektor- und das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$!
- Bestimmen Sie alle Quaternionen q mit $q^2 = -1$!

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Eine Quaternion $a + ib + jc + kd$ heiße *ganz*, wenn $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen sind; sie heiße *Einheit*, wenn zusätzlich auch ihr multiplikatives Inverses ganz ist. Sie heiße *irreduzibel*, wenn sie nicht als Produkt zweier ganzer Quaternionen geschrieben werden kann, von denen keine eine Einheit ist.

- Bestimmen Sie alle Einheiten unter den Quaternionen.
- Zeigen Sie, daß $1 \pm 2i$, $1 \pm 2j$ und $1 \pm 2k$ irreduzibel sind!
- Im Ring der ganzen Quaternionen ist

$$\begin{aligned} 5 &= (1 + 2i)(1 - 2i) = (1 + 2j)(1 - 2j) = (1 + 2k)(1 - 2k) \\ &= (2 + i)(2 - i) = (2 + j)(2 - j) = (2 + k)(2 - k). \end{aligned}$$

Gibt es irgendwelche zwei unter den zwölf Faktoren in diesen Zerlegungen, die sich nur durch eine Einheit unterscheiden?

Abgabe bis zum Dienstag, dem 20. Mai 2014, um 11.55 Uhr