Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

6. Mai 2014

11. Übungsblatt Zahlentheorie

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*

a) Berechnen Sie die ersten drei Konvergenten der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{e}$!

b) Geben Sie zwei rationale Zahlen a, b an, so daß mit Sicherheit $a < \sqrt{e} < b$ ist. Dabei sollte $b - a$ möglichst klein sein.

Aufgabe 2: *(7 Punkte)*

a) Stellen Sie das Element $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ in der Form $a + b\sqrt{2}$ dar!

b) Finden Sie alle Einheiten im Ring $\mathcal{O}_{-1} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i$! $(i = \sqrt{-1})$

c) Bestimmen Sie alle Elemente von $\mathcal{O}_{-1}$, die zu einem festen Element $a + bi$ assoziiert sind!

d) Zeigen Sie, daß alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^6 = 1$ in $\mathcal{O}_{-3}$ liegen und dort Einheiten sind!

Aufgabe 3: *(3 Punkte)*

$D = n^2$ sei eine Quadratzahl. Wir definieren auf $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ eine Ringstruktur, die die Multiplikation in den Ringen $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{D}$ nachmacht, durch

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \quad \text{und} \quad (a, b) \cdot (a', b') = (aa' + bb'D, ab' + a'b)\,.$$

Zeigen Sie, daß dieser Ring kein Integritätsbereich ist!

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

a) In der Hauptordnung $\mathcal{O}_{-3}$ von $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ ist $4 = 2 \cdot 2 = (1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3})$. Zeigt dies, daß $\mathcal{O}_{-3}$ nicht faktoriell ist?

b) In der Hauptordnung $\mathcal{O}_{-13}$ von $\mathbb{Q}[\sqrt{-13}]$ ist $14 = 2 \cdot 7 = (1 + \sqrt{-13})(1 - \sqrt{-13})$. Zeigt dies, daß $\mathcal{O}_{-3}$ nicht faktoriell ist?

Abgabe bis zum Dienstag, dem 13. Mai 2014, um 11.55 Uhr