

25. Mai 2022

### 13. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

#### Aufgabe 1:

Untersuchen Sie, ob die jeweils angegebenen topologischen Räume homöomorph sind, und beweisen Sie Ihre Aussage:

- a) Der Rand eines  $n$ -Simplex und der eines  $m$ -Simplex für  $n \neq m$
- b)  $\mathbb{R}^n$  und  $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i: 0 < x_i < 1\}$
- c) Die Oberfläche eines Würfels mit Ausnahme einer Ecke und  $\mathbb{R}^2$
- d) Ein Torus und ein MÖBIUS-Band
- e)  $\mathbb{R}^2$  ohne Nullpunkt und die Oberfläche einer Kugel
- f) Das Produkt zweier offener  $n$ -Simplexes und das offene  $2n$ -Simplex

#### Aufgabe 2:

$X$  und  $Y$  seien topologische Räume,  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow X$  seien stetige Abbildungen, und  $A \subset X$  sei HAUSDORFFsch bzw. kompakt bzw. zusammenhängend bzw. zusammenziehbar.

- a) Hat dann auch  $f(A)$  die entsprechende Eigenschaft?
- b) Wie steht es mit  $g^{-1}(A)$ ?

#### Aufgabe 3:

Mit welcher der folgenden Topologien ist  $\mathbb{R}^n$  HAUSDORFFsch, kompakt, zusammenhängend bzw. zusammenziehbar?

- a) der „üblichen“ Topologie
- b) der diskreten Topologie
- c) der trivialen Topologie
- d) der Topologie, deren abgeschlossene Mengen genau die endlichen Teilmengen sowie  $\mathbb{R}^n$  selbst sind!

#### Aufgabe 4:

Das dreidimensionale Polyeder  $P$  sei homotop zu einer Kreislinie. Bestimmen Sie die alternierende Summe seiner Ecken, Kanten und Flächen!

#### Aufgabe 5:

Beweisen oder widerlegen Sie:

- a) Jede stetige Abbildung  $f: T \rightarrow T$  eines Torus auf sich selbst hat einen Fixpunkt.
- b) Der Torus ist homöomorph zum Produkt zweier Kreislinien.
- c) Der Torus ist homotop zum Produkt zweier Kreislinien.
- d) Der Torus ist homotop zu einer Kugeloberfläche.
- e) Jede abgeschlossene echte Teilmenge eines Torus ist zusammenziehbar.

#### Aufgabe 6:

Der topologische Raum  $X_n \subset \mathbb{R}^2$  mit  $n \in \{7, 8, 9, 0\}$  sehe aus wie die Ziffer  $n$ . Finden Sie eine Triangulierung von  $X_n$  und berechnen Sie seine Homologie!