Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

B6, B4.08

18. Mai 2022

12. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1:

Bei einem Zwei-Personen-Nullsummenspiel habe der erste Spieler die reinen Strategien $\pi_1, \ldots, \pi_n$, und der zweite Spieler habe $\omega_1, \ldots, \omega_m$.

a) Zeigen Sie, daß es genau dann ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien gibt, wenn gilt

$$\min_{i=1}^{n} \max_{j=1}^{m} a^{(1)}(\pi_i, \omega_j) = \max_{j=1}^{m} \min_{i=1}^{n} a^{(1)}(\pi_i, \omega_j)\,!$$

b) S_1 und S_2 seien die Mengen der gemischten Strategien der beiden Spieler. Zeigen Sie, daß

$$\left\{(s_1^*, s_2^*) \in S_1 \times S_2 \;\middle|\; \min_{s_1 \in S_1} \max_{s_2 \in S_2} a^{(1)}(s_1, s_2) = \max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} a^{(1)}(s_1, s_2) = a^{(1)}(s_1^*, s_2^*)\right\}$$

konvex und abgeschlossen in $S_1 \times S_2$ ist!

c) Unter welchen Bedingungen hat das Spiel eine von der Identität verschiedene Symmetrie?

d) Welchen Grad hat $a^{(1)}$ als Polynom in den den baryzentrischen Koordinaten von S_1 und S_2?

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie die Homologie der folgenden topologischen Räume:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1 \lor 4 \le x^2 + y^2 \le 16\} \\
X_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \in [0, 1] \cup [2, 3] \land 2 \le y \le 3\} \\
X_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \in [0, 1] \cup [2, 3] \land 2 \le |y| \le 3\} \\
X_4 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 8\} \\
X_5 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \land 0 \le z \le 3\}
\end{aligned}$$

b) $K_1, \ldots, K_5$ seien geometrische simpliziale Komplexe, so daß $|K_i|$ homöomorph ist zu X_i. Weiter sei e_i die Anzahl der Ecken von K_i, k_i die der Kanten und f_i die der Dreiecke. Was können Sie über die Zahlen $e_i - k_i + f_i$ aussagen?

c) Finden Sie für X_1, X_2 und X_3 je ein Beispiel eines möglichen Komplexes K_i!

Aufgabe 3:

a) Ein Häufungspunkt einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkten eines topologischen Raums X ist ein Punkt $x \in X$ mit der Eigenschaft, daß es für jede Umgebung U von x unendlich viele Indizes n gibt, für die x_n in U liegt. Zeigen Sie: Falls $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge hat, ist deren Grenzwert ein Häufungspunkt der Folge.

b) Ist X 1-abzählbar, so gibt es zu jedem Häufungspunkt x eine Teilfolge, die gegen x konvergiert.

c) Ein Häufungspunkt einer Teilmenge M eines topologischen Raums X ist ein Punkt $x \in X$ mit der Eigenschaft, daß jede Umgebung von x mindestens einen Punkt aus M enthält. Zeigen Sie: M ist genau dann abgeschlossen, wenn jeder Häufungspunkt von M in M liegt.

Besprechung am Dienstag, dem 24. Mai 2022, um 15.30 Uhr