Wolfgang K. Seiler — B6, B4.08
Tel. 2515

4. Mai 2022

10. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1:

a) X sei ein Hausdorffscher topologischer Raum, und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine konvergente Folge. Zeigen Sie: Wenn eine Teilfolge dieser Folge gegen den Punkt $x \in X$ konvergiert, so auch die gesamte Folge.

b) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, daß dies ohne die Hausdorff-Bedingung nicht mehr gelten muß!

c) Zeigen Sie, daß auch die Konvergenz der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ notwendig ist!

d) Zeigen Sie, daß ein topologischer Raum X genau dann Hausdorffsch ist, wenn jede konvergente Folge einen eindeutig bestimmten Grenzwert hat!

Aufgabe 2:

J sei eine Teilmenge von $\{1, 2, \ldots, \ell\}$,

$$P = \left\{ p \in \mathbb{R}^\ell \;\middle|\; p_h \geq 0 \;\forall h \text{ und } \sum_{h=1}^{\ell} p_h = 1 \right\} \quad \text{und} \quad P_\varepsilon = \left\{ p \in P \;\middle|\; p_h \geq \varepsilon \;\forall h \in J \right\} .$$

Für welche $\varepsilon \geq 0$ ist P_ε homöomorph zu P?

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel: Jede stetige Abbildung $f\colon T \to T$ eines Torus T hat einen Fixpunkt.

b) Zeigen Sie: Jede nicht injektive stetige Abbildung $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ hat einen Fixpunkt.

c) $f \in \mathbb{C}[X]$ sei ein Polynom mit komplexen Koeffizienten. Wie muß f aussehen, wenn die durch f definierte Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ keinen Fixpunkt hat?

Besprechung am Dienstag, dem 10. Mai 2022, um 15.30 Uhr