WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

B6, B4.08

27. April 2022

9. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1:

X und Y seien topologische Räume. Zeigen Sie:

a) Eine Abbildung $f: X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn das Urbild jeder abgeschlossenen Teilmenge von Y abgeschlossen in X ist.

b) $f: X \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. Zeigen Sie: Für jedes $a \in \mathbb{R}$ sind $\{x \in X \mid f(x) > a\}$ und $\{x \in X \mid f(x) < a\}$ offen, während $\{x \in X \mid f(x) \geq a\}$, $\{x \in X \mid f(x) = a\}$ und $\{x \in X \mid f(x) \leq a\}$ abgeschlossen sind.

Aufgabe 2:

Entscheiden Sie, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ kompakt sind, und finden Sie für die kompakten Mengen jeweils ein reelle Zahl c, so daß die Menge im Inneren des Würfels $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq c, |y| \leq c, |z| \leq c\}$ liegt!

a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x+y \leq 10,\ 0 \leq x-y \leq 10,\ z = x+y\}$

b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+2y+3z \leq 10\}$

c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x-2y+3z \leq 10\}$

d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^4+z^8 \leq 16\}$

e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^4 \leq 16,\ x-2y+3z \leq 10\}$

f) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^4 \leq 16,\ x-2y+3z^2 \leq 10\}$

Aufgabe 3:

Zeigen Sie:

a) Faßt man $\mathbb{R}^{n+m}$ auf als Produkt $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, so stimmt die Produkttopologie überein mit der Standardtopologie.

b) Ist X eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und Y eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^m$, so ist $X \times Y$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+m}$.

Aufgabe 4:

a) $Z_1, Z_2, \dots$ sei eine unendliche Folge kompakter Teilmengen eines topologischen Raums X. Beweisen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel, daß dann auch die Vereinigung aller Z_i *bzw.* der Durchschnitt aller Z_i kompakt ist!

b) Was ändert sich, wenn die Z_i eine aufsteigende Folge bilden, also $Z_1 \subset Z_2 \subset Z_3 \subset \cdots$?

c) Was ändert sich, wenn man zusätzlich noch annimmt, daß alle Z_i in einer kompakten Teilmenge Z liegen?

d) Was ändert sich, wenn die Z_i eine absteigende Folge bilden, also $Z_1 \supset Z_2 \supset Z_3 \supset \cdots$?

Besprechung am Dienstag, dem 3. Mai 2022, um 15.30 Uhr