Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

23. März 2022

6. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1:

Eine stetige Abbildung $f: X \to Y$ heißt *nullhomotop,* wenn es einen Punkt $z \in Y$ gibt, so daß f homotop ist zur Abbildung, die jeden Punkt $x \in X$ auf z abbildet. Zeigen Sie:

a) Jede stetige Abbildung eines topologischen Raums in eine konvexe Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ ist nullhomotop.

b) Ein topologischer Raum X ist genau dann zusammenziehbar, wenn die identische Abbildung $\mathrm{id}: X \to X$ nullhomotop ist.

c) Jede konvexe Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ ist zusammenziehbar.

d) $\mathbb{R}^n$ ist zusammenziehbar

e) Trotzdem gibt es fixpunktfreie Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, z.B. die Translationen. Warum widerspricht dies nicht der Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes?

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, daß Homotopie von Abbildungen sowie Homotopie von topologischen Räumen Äquivalenzrelationen sind!

Aufgabe 3:

Für zwei Korrespondenzen $f: X \to\!\!\to Y$ und $g: Y \to\!\!\to Z$ sei die Hintereinanderausführung definiert als

$$g \circ f: \begin{cases} X \to\!\!\to Z \\ x \mapsto \bigcup\limits_{y \in f(x)} g(y) \end{cases} .$$

Zeigen Sie:

a) $(g \circ f)^+(U) = f^+\big(g^+(U)\big)$ für alle Teilmengen $U \subseteq Z$.

b) $(g \circ f)^-(U) = f^-\big(g^-(U)\big)$ für alle Teilmengen $U \subseteq Z$.

c) Sind f und g halbstetig nach oben, so auch $g \circ f$.

d) Sind f und g halbstetig nach unten, so auch $g \circ f$.

Besprechung am Dienstag, dem 29. März 2022, um 15.30 Uhr