

16. März 2022

5. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1:

- Der simpliziale Komplex K habe die Ecken $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (-1, 0)$ und $D = (0, -1)$, die Kanten AB, AC, AD, CD und BC , sowie die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ADC$. Bestimmen Sie die erste baryzentrische Unterteilung von K !
- Wie viele Ecken hat die zweite baryzentrische Unterteilung von K ?
- Bestimmen Sie die Homologiegruppen $H_q(K^{(2)})$!

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, daß jede Karte auf einem Torus mit höchstens sieben Farben so gefärbt werden kann, daß keine zwei benachbarten Gebiete die gleiche Farbe haben!

Aufgabe 3:

- Zeigen Sie, daß $A = \{(a + 3b, 2a - b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ eine Untergruppe vom Rang zwei von \mathbb{Z}^2 ist!
- Der Homomorphismus $f: A \rightarrow A$ bilde den Punkt $(1, 2)$ ab auf $(4, 1)$ und $(3, -1)$ auf $(-1, 5)$. Berechnen Sie die Spur von f !
- Welchen Rang hat die Gruppe $B = \{(6a + 3b, 4a + 2b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$?
- Welche Spur hat die Abbildung, die jeden Punkt (x, y) auf $(2x, 2y)$ abbildet, als Homomorphismus $A \rightarrow A$ bzw. als Homomorphismus $B \rightarrow B$?

Aufgabe 4:

Berechnen Sie für die folgenden Abbildungen der Kreislinie $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ auf sich selbst die LEFSCHETZ-Zahlen:

- Drehung um 90°
- Spiegelung an der x -Achse
- Spiegelung am Nullpunkt
- Die Abbildung, die den Punkt $(\cos t, \sin t)$ abbildet auf $(\cos 2t, \sin 2t)$.
- Was ändert sich, wenn Sie die genannten Abbildungen auf der Kreisscheibe betrachten?