Wolfgang K. Seiler — B6, B4.08
Tel. 2515

9. März 2022

4. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1:
Finden Sie einen geometrischen simplizialen Komplex K, für den $|K|$ homöomorph zum Kreisring $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$ ist, und berechnen Sie dessen Homologiegruppen!

Aufgabe 2:

a) Ein (geometrischer) simplizialer Komplex K heißt zusammenhängend, wenn je zwei Ecken von K durch einen Kantenzug verbunden werden können. Zeigen Sie: K ist genau dann zusammenhängend, wenn der topologische Raum $|K|$ zusammenhängend ist.

b) Der Kronecker-Index einer 0-Kette $\sum\limits_{i=1}^{r} a_i P_i$ aus K mit Ecken P_i ist $\sum\limits_{i=1}^{r} a_i$. Zeigen Sie: Ist K zusammenhängend, so ist eine 0-Kette genau dann ein Rand, wenn ihr Kronecker-Index verschwindet.

c) Zwei 0-Zykeln eines zusammenhängenden simplizialen Komplexes liegen genau dann in derselben Homologieklasse, wenn sie denselben Kronecker-Index haben.

d) Für einen zusammenhängenden simplizialen Komplex K ist $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$.

e) Finden Sie ein Beispiel eines simplizialen Komplexes K mit $H_0(K) \cong \mathbb{Z}^2$ und $H_1(K) \cong \mathbb{Z}$!

Aufgabe 3:
Der abstrakte simpliziale Komplex $\mathfrak{K}$ bestehe aus allen nichtleeren Teilmengen der Menge $\{A, B, C, D\}$, der Unterkomplex $\mathfrak{L}$ aus allen diesen Mengen außer $\{A, B, C, D\}$ selbst.

a) Finden Sie geometrische Realisierungen von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$!

b) Berechnen Sie dort den Stern und den Link von A!

c) Berechnen Sie die Homologiegruppen der beiden Komplexe!

e) Finden Sie eine ebene geometrische Realisierung von $\mathfrak{L}$!

Aufgabe 4:
Die Kettenabbildungen $\varphi, \varphi' : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $\psi, \psi' : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ zwischen den Kettenkomplexen $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ und $\mathcal{E}$ seien homotop. Zeigen Sie, daß dann auch die Hintereinanderausführungen $\psi \circ \varphi$ und $\psi' \circ \varphi'$ homotope Kettenabbildungen zwischen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{E}$ sind!

Besprechung am Dienstag, dem 15. März 2022, um 15.30 Uhr