WOLFGANG K. SEILER B6, B4.08
Tel. 2515

23. Februar 2022

2. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1:

a) X und Y seien zwei topologische Räume, und $X \times Y$ trage die Produkttopologie. Zeigen Sie, daß die Projektionen $(x, y) \mapsto x$ und $(x, y) \mapsto y$ von $X \times Y$ auf X und auf Y stetig sind!

b) $X \times Y$ ist genau dann HAUSDORFFsch, wenn sowohl X als auch Y HAUSDORFFsch sind.

c) X sei HAUSDORFFsch, und $f: X \to Y$ sei eine stetige Abbildung. Muß dann auch Y HAUSDORFFsch sein?

Aufgabe 2:

a) X sei ein zusammenhängender topologischer Raum, und $f: X \to Y$ sei eine surjektive stetige Abbildung. Muß dann auch Y zusammenhängend sein?

b) $X = U \cup V$ sei eine Darstellung eines topologischen Raums X als Vereinigung zweier disjunkter offener Teilmengen U und V. Zeigen Sie: Jede zusammenhängende Teilmenge Z von X liegt ganz in U oder ganz in V.

c) X und Y seien zusammenhängende topologische Räume, und $X \times Y = U \cup V$ sei eine Darstellung ihres Produkts als Vereinigung zweier disjunkter offener Teilmengen U und V. Zeigen Sie: Liegt ein Punkt $(x_0, y_0) \in X \times Y$ in U, so auch jeder Punkt (x_0, y) mit $y \in Y$ und jeder Punkt (x, y_0) mit $x \in X$.

d) Zeigen Sie: Sind X und Y zwei topologische Räume, so ist $X \times Y$ genau dann zusammenhängend, wenn sowohl X als auch Y zusammenhängend sind.

e) Gilt eine entsprechende Aussage auch für Wegzusammenhang?

Aufgabe 3:

a) $f: X \to Y$ sei eine stetige surjektive Abbildung, und Y sei kompakt. Zeigen oder widerlegen Sie, daß dann auch X kompakt sein muß!

b) X sei ein beliebiger topologischer Raum, und ∞ stehe für einen Punkt, der nicht in X enthalten ist. Weiter sei $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$, und eine Teilmenge U von $\widehat{X}$ heiße offen, wenn U eine offene Teilmenge von X ist oder wenn $\infty \in U$ und $\widehat{X} \setminus U$ eine kompakte Teilmenge von X ist. Zeigen Sie, daß $\widehat{X}$ durch diese Definition zu einem kompakten topologischen Raum wird! ($\widehat{X}$ heißt Ein-Punkt-Kompaktifizierung oder ALEXANDROFF-Kompaktifizierung von X.)

c) Zeigen Sie, daß $\widehat{\mathbb{R}}$ homöomorph zur Kreislinie ist!

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie: Eine bijektive stetige Abbildung $f: X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn das Bild jeder abgeschlossenen Menge $A \subseteq X$ abgeschlossen in Y ist.

b) Ist X kompakt und Y HAUSDORFFsch, so ist jede bijektive stetige Abbildung $f: X \to Y$ ein Homöomorphismus.

c) Finden Sie eine surjektive stetige Abbildung $f: X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen und eine abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ derart, daß $f(A)$ nicht abgeschlossen ist!

Besprechung am Dienstag, dem 1. März 2022, um 15.30 Uhr