WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

B6, B4.08

16. Februar 2022

1. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1:

a) Gegeben seien drei Teilmengen $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ und $Z \subseteq \mathbb{R}^p$. Zeigen Sie: Ist X homöomorph zu Y und Y homöomorph zu Z, so ist auch X homöomorph zu Y.

b) Zeigen Sie, daß die Teilmenge $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 = 1 \text{ und } x \neq 1\right\}$ von $\mathbb{R}^2$ homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist!

c) Zeigen Sie, daß keine zwei der folgenden vier Teilmengen von $\mathbb{R}$ homöomorph sind:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}, & B &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x^2 < 3\}, \\ C &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \le x \le 3\}, & D &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \le x^2 \le 3\} \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

a) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sei mit der Spurtopologie versehen. Entscheiden Sie für jede der drei Mengen $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2 < x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2 < x^2 < 3\}$ und $C = \{1\}$, ob sie offen, abgeschlossen, beides oder keins von beiden ist!

b) Zeigen Sie, daß die Spurtopologie auf $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ die diskrete Topologie ist!

Aufgabe 3:

a) X sei eine Menge, und $\mathcal{A}$ sei eine Menge von Teilmengen von X, für die gilt:

1.) $X \in \mathcal{A}$ und $\emptyset \in \mathcal{A}$

2.) Ist I eine beliebige Indexmenge und ist $Z_i \in \mathcal{A}$ für alle $i \in I$, so liegt auch der Durchschnitt $\bigcap\limits_{i\in I} Z_i$ der Z_i in $\mathcal{A}$.

3.) Sind für eine natürliche Zahl r die Mengen $Z_1, \ldots, Z_r$ Elemente von $\mathcal{A}$, so auch ihre Vereinigung $\bigcup_{i=1}^r Z_i$.

Weiter sei $\mathcal{T} = \left\{U \in \mathfrak{P}(X) \;\middle|\; X \setminus U \in \mathcal{A}\right\}$. Zeigen Sie, daß $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum ist!

b) Für $X = \mathbb{R}$ bestehe $\mathcal{A}$ aus allen endlichen Teilmengen sowie aus $\emptyset$ und $\mathbb{R}$ selbst. Zeigen Sie, daß alle Bedingungen aus *a)* erfüllt sind!

c) Ist der zugehörige topologische Raum $(X, \mathcal{T})$ HAUSDORFFsch?

d) Y sei $\mathbb{R}^n$ mit der üblichen Topologie. Ist eine der identischen Abbildungen $X \to Y$ und $Y \to X$ stetig?

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie, daß jede einelementige Teilmenge eines HAUSDORFF-Raums abgeschlossen ist!

b) Zeigen Sie, daß jeder topologische Raum mit der diskreten Topologie HAUSDORFFsch ist!

Aufgabe 5:

a) Für $X = \{i, s\}$ sei $\mathcal{T} = \left\{\emptyset, \{i\}, X\right\}$. Zeigen Sie, daß $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum ist!

b) Ist dieser Raum HAUSDORFFsch?

c) $\mathbb{R}^{n\times n}$ sei die Menge aller reeller $n \times n$-Matrizen, versehen mit der üblichen reellen Topologie, und $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to X$ bilde eine Matrix A ab auf i, wenn sie invertierbar ist, und auf s sonst. Zeigen Sie, daß f eine stetige Abbildung ist!

d) Zeigen Sie, daß eine Teilmenge $U \subseteq X$ genau dann offen ist, wenn $f^{-1}(U)$ offen ist!

Besprechung am Dienstag, dem 21. Februar 2022, um 15.30 Uhr