Lösung von Aufgabe 4 des vierten Übungsblatts

Die Randabbildungen des Komplexes $\mathcal{C}$ seien ∂_q, die von $\mathcal{D}$ entsprechend ∂'_q und die von $\mathcal{E}$ bezeichnen wir mit ∂''_q.

Da die Kettenabbildungen φ und φ' homotop sind, gibt es für jedes $q \geq 0$ einen Homomorphismus $\gamma_q\colon C_q \to D_{q+1}$, mit dem

$$\varphi_q - \varphi'_q = \partial'_{q+1} \circ \gamma_q + \gamma_{q-1} \circ \partial_q$$

ist. Entsprechend gibt es wegen der Homotopie von ψ und ψ' Homomorphismen $\gamma'\colon D_q \to E_{q+1}$, so daß gilt

$$\psi_q - \psi'_q = \partial''_{q+1} \circ \gamma'_q + \gamma'_{q-1} \circ \partial'_q.$$

Zum Beweis, daß $\psi \circ \varphi$ und $\psi' \circ \varphi'$ homotop sind, brauchen wir Homomorphismen $\widetilde{\gamma}_q\colon C_q \to E_{q+1}$, so daß für jedes q gilt

$$\psi_q \circ \varphi_q - \psi'_q \circ \varphi'_q = \partial''_{q+1} \circ \widetilde{\gamma}_q + \widetilde{\gamma}_{q-1} \circ \partial_q.$$

Um die Differenzen $\varphi - \varphi'$ und $\psi - \psi'$ ins Spiel zu bringen, schreiben wir

$$\psi_q \circ \varphi_q - \psi'_q \circ \varphi'_q = \psi_q \circ \varphi_q - \psi_q \circ \varphi' + \psi_q \circ \varphi' - \psi'_q \circ \varphi'_q = \psi_q \circ (\varphi_q - \varphi'_q) + (\psi_q - \psi'_q) \circ \varphi'_q.$$

Einsetzen der obigen Audrücke für die Differenzen macht daraus

$$\begin{aligned} &\psi_q \circ (\partial'_{q+1} \circ \gamma_q + \gamma_{q-1} \circ \partial_q) + (\partial''_{q+1} \circ \gamma'_q + \gamma'_{q-1} \circ \partial'_q) \circ \varphi'_q \\ &= \psi_q \circ \partial'_{q+1} \circ \gamma_q + \psi_q \circ \gamma_{q-1} \circ \partial_q + \partial''_{q+1} \circ \gamma'_q \circ \varphi'_q + \gamma'_{q-1} \circ \partial'_q \circ \varphi'_q. \end{aligned}$$

Was wir brauchen ist eine Summe mit zwei Summanden, von denen der eine links ∂''_{q+1} stehen hat und der andere rechts ∂_q. Zwei der vier Summanden sind von dieser Art, bei den beiden anderen steht der Randoperator in der Mitte.

Nun sind aber ψ und φ' Kettenabbildungen, d.h.

$$\psi_q \circ \partial'_{q+1} = \partial''_{q+1} \circ \psi_{q+1} \quad \text{und} \quad \partial'_q \circ \varphi'_q = \varphi'_{q-1} \circ \partial_q.$$

Damit ist $\psi_q \circ \varphi_q - \psi'_q \circ \varphi'_q$ gleich

$$\begin{aligned} &= \partial''_{q+1} \circ \psi_{q+1} \circ \gamma_q + \psi_q \circ \gamma_{q-1} \circ \partial_q + \partial''_{q+1} \circ \gamma'_q \circ \varphi'_q + \gamma'_{q-1} \circ \varphi'_{q-1} \circ \partial_q. \\ &= \partial''_{q+1} \circ (\psi_{q+1} \circ \gamma_q + \gamma'_q \circ \varphi'_q) + (\psi_q \circ \gamma_{q-1} + \gamma'_{q-1} circ \varphi'_{q-1}) \circ \partial_q. \end{aligned}$$

Setzen wir also $\widetilde{\gamma}_q = \psi_{q+1} \circ \gamma_q + \gamma'_q \circ \varphi'_q$, so ist

$$\psi_q \circ \varphi_q - \psi'_q \circ \varphi'_q = \partial''_{q+1} \circ \widetilde{\gamma}_q + \widetilde{\gamma}_{q-1} \circ \partial_q,$$

wie gewünscht. Damit ist die Homotopie von $\psi \circ \varphi$ und $\psi' \circ \varphi'$ gezeigt.