Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

16. September 2016

2. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*
X und Y seien topologische Räume und $X \times Y$ trage die Produkttopologie. Zeigen Sie:

a) Die Projektionen $p_1: X \times Y \to X$ und $p_2: X \times Y \to Y$ sind stetig.
b) Sind X und Y Hausdorffsch, so auch $X \times Y$.
c) Sind X und Y Hausdorffsch, so ist der Graph $\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} \subseteq X \times Y$ einer stetigen Abbildung $f: X \to Y$ abgeschlossen.
d) Ist X Hausdorffsch und ist $f: X \to X$ stetig, so ist die Menge $\{x \in X \mid f(x) = x\}$ der Fixpunkte von f abgeschlossen.

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

a) $f: X \to Y$ sei eine surjektive stetige Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen. Zeigen Sie: Wenn X wegzusammenhängend ist, dann auch Y.
b) Zeigen Sie: Das Produkt $X \times Y$ zweier wegzusammenhängender Räume X und Y ist wegzusammenhängend.
c) Gilt dies auch für zusammenhängende Räume? *(Hinweis: Für jeden Punkt $x \in X$ ist $\{x\} \times Y$ homöomorph zu Y.)*

Aufgabe 3: *(3 Punkte)*

a) $f: X \to Y$ sei eine stetige surjektive Abbildung, und Y sei kompakt. Zeigen oder widerlegen Sie, daß dann auch X kompakt sein muß!
b) Zeigen oder widerlegen Sie: Sind X und Y kompakte topologische Räume, so auch $X \times Y$ (bezüglich der Produkttopologie).

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Eine bijektive stetige Abbildung $f: X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn das Bild jeder abgeschlossenen Menge $A \subseteq X$ abgeschlossen in Y ist.
b) Ist X kompakt und Y Hausdorffsch, so ist jede bijektive stetige Abbildung $f: X \to Y$ ein Homöomorphismus.
c) Finden Sie eine surjektive stetige Abbildung $f: X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen und eine abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ derart, daß $f(A)$ nicht abgeschlossen ist!

Aufgabe 5: *(3 Punkte)*
Seit Eulers Zeiten hat sich an den Königsberger Brücken viel geändert; insbesondere wurden alle sieben während des zweiten Weltkriegs zerstört. Im heutigen Kaliningrad gibt es nur noch fünf von Eulers sieben Brücken: Von beiden Ufern des Pregel führt heute nur noch je eine Brücke auf den Kneiphof.

a) Ist es nun möglich, einen Weg zu finden, der jede der fünf Brücken genau einmal überquert?
b) Gibt es einen solchen Weg mit gleichem Anfangs- und Endpunkt?
c) Bevor sich der Pregel in zwei Arme teilt, wird er ebenfalls von einer Brücke überquert. Wie ändern sich die Antworten bei *a)* und *b)*, wenn man einen Weg über alle sechs Brücken sucht?

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 22. September 2016, um 15.25 Uhr