WOLFGANG K. SEILER A5, C201
Tel. 2515

9. September 2016

1. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß die Teilmenge

$$X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1 \text{ und } y \neq 1\right\}$$

von $\mathbb{R}^2$ homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist!

b) Zeigen Sie, daß keine zwei der folgenden vier Teilmengen von $\mathbb{R}$ homöomorph sind:

$$\begin{array}{ll} A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}, & B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x^2 < 3\}, \\ C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \le x \le 3\}, & D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \le x^2 \le 3\} \end{array}$$

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

a) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sei mit der Spurtopologie versehen. Entscheiden Sie für jede der folgenden Mengen, ob sie offen, abgeschlossen, beides oder keins von beiden ist:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2 < x < 3\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2 < x^2 < 3\}, \quad C = \{1\}$$

b) Zeigen Sie, daß die Spurtopologie auf $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ die diskrete Topologie ist!

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

a) k sei ein Körper und $k[X_1, \ldots, X_n]$ sei die Menge aller Polynome in n Veränderlichen mit Koeffizienten aus k. Für jede Teilmenge $M \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ sei

$$V(M) = \left\{x \in k^n \;\middle|\; f(x) = 0 \text{ für alle } f \in M\right\}.$$

Zeigen Sie, daß k^n ein topologischer Raum wird, wenn wir verlangen, daß genau die Mengen $V(M)$ abgeschlossen sind!

b) Wie lassen sich die abgeschlossenen Mengen im Fall $n = 1$ einfacher beschreiben?

c) Ist k^n HAUSDORFFsch?

d) Speziell für $k = \mathbb{R}$ sei X der $\mathbb{R}^n$ mit der gerade definierten Topologie und Y sei der $\mathbb{R}^n$ mit der üblichen Topologie. Ist eine der identischen Abbildungen $X \to Y$ und $Y \to X$ stetig?

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß jede einelementige Teilmenge eines HAUSDORFF-Raums abgeschlossen ist!

b) Umgekehrt sei X ein topologischer Raum, in dem jede einelementige Teilmenge abgeschlossen ist. Muß X notwendigerweise HAUSDORFFsch sein?

c) Zeigen Sie daß jeder einelementige, nicht aber jeder zweielementige topologische Raum HAUSDORFFsch ist!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 15. September 2016, um 15.25 Uhr