WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

23. Mai 2014

13. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1: *(10 Punkte)*
k sei ein Körper und $X = k^n$. Die ZARISKI-Topologie auf X ist jene Topologie, für die die Mengen $D(f) = \{(x_1, \dots, x_n) \in k^n \mid f(x_1, \dots, x_n) \neq 0\}$, wobei f alle Polynome aus $k[X_1, \dots, X_n]$ durchläuft, eine Basis der offenen Mengen bilden. Zeigen Sie:

a) $D(f) \cap D(g) = D(fg)$

b) Die abgeschlossenen Teilmengen von x sind genau die Mengen der Form

$$V(f_1, \dots, f_r) = \{(x_1, \dots, x_n) \in k^n \mid f_1(x_1, \dots, x_n) = \cdots = f_r(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

mit $f_1, \dots, f_r \in k[X_1, \dots, X_n]$.

c) X ist quasikompakt, aber nicht kompakt.

d) X ist zusammenhängend.

e) Die abgeschlossenen Mengen in der ZARISKI-Topologie auf $\mathbb{R}^n$ sind genau die Mengen $V(f)$ mit $f \in k[X_1, \dots, X_n]$.

f) Ist die ZARISKI-Topologie auf $\mathbb{R}^n$ gröber oder feiner als die Standardtopologie, oder ist sie keins von beiden?

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*
Bestimmen Sie für $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ die LEFSCHETZ-Zahlen folgender Abbildungen $X \to X$:

a) Die Identität

b) Die Abbildung $(x, y) \mapsto (y, x)$

c) Die Abbildung $(x, y) \mapsto (y, -x)$

d) Wie sehen die LEFSCHETZ-Zahlen für die entsprechenden Selbstabbildungen des topologischen Raums $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ aus?

Aufgabe 3: *(2 Punkte)*
Zeigen Sie: Ein topologischer Raum ist genau dann HAUSDORFFsch, wenn jede konvergente Folge einen eindeutig bestimmten Grenzwert hat.

Aufgabe 4: *(3 Punkte)*
Der topologische Raum $X_n \subset \mathbb{R}^2$ mit $n \in \{7, 8, 9, 0\}$ sehe aus wie die Ziffer n. Finden Sie eine Triangulierung von X_n und berechnen Sie seine Homologie!

Abgabe bis zum Freitag, dem 30. Mai 2014, um 11.55 Uhr