Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

7. März 2014

4. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1: *(3 Punkte)*

a) Finden Sie eine echte Untergruppe von $\mathbb{Z}^2$, die selbst Rang zwei hat!

b) Zeigen Sie: Für jede solche Untergruppe $H < \mathbb{Z}^2$ ist die Faktorgruppe $\mathbb{Z}^2/H$ endlich.

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

Der abstrakte simpliziale Komplex $\mathfrak{K}$ bestehe aus n Ecken $P_1, \dots, P_n$, den Kanten P_iP_{i+1} für $i = 1, \dots, n-1$ und P_1P_i für $i = 2, \dots, n$, sowie den Dreiecken $\triangle P_1P_iP_{i+1}$ für $i = 2, \dots, n-1$.

a) Skizzieren Sie für $n = 6$ eine geometrische Realisierung dieses Komplexes in $\mathbb{R}^2$!

b) Bestimmen Sie die Ränge aller Ketten-, Zykel- und Rändergruppen!

c) Berechnen Sie die Homologiegruppen von $\mathfrak{K}$!

Aufgabe 3: *(12 Punkte)*

Triangulieren Sie die folgenden topologischen Räume, und berechnen Sie jeweils die alternierende Summe „Ecken – Kanten + Dreiecke“ sowie die Ränge der Homologiegruppen:

a) Der Kreisring $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$

b) Das Möbius-Band: Es entsteht, indem man bei einem Rechteck zwei gegenüberliegende Seiten so verklebt, daß jeweils die diagonal entgegengesetzten Ecken miteinander identifiziert werden.

Hinweis: Insbesondere bei der Berechnung der ersten Homologie sollten Sie eher inhaltlich als formal argumentieren; andernfalls erhalten Sie schnell sehr lange Ausdrücke.

Abgabe bis zum Freitag, dem 14. März 2014, um 11.55 Uhr