

21. Februar 2014

2. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

Aufgabe 1: (10 Punkte)

X und Y seien topologische Räume und $X \times Y$ trage die Produkttopologie. Zeigen Sie:

- Die Projektionen $p_1: X \times Y \rightarrow X$ und $p_2: X \times Y \rightarrow Y$ sind stetig.
- Sind X und Y HAUSDORFFsch, so auch $X \times Y$.
- Sind X und Y 1-abzählbar, so auch $X \times Y$.
- Sind X und Y HAUSDORFFsch und 1-abzählbar und ist $f: X \rightarrow Y$ stetig, so ist der Graph

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} \subseteq X \times Y$$

abgeschlossen.

- Ist X HAUSDORFFsch und 1-abzählbar und ist $f: X \rightarrow X$ stetig, so ist die Menge

$$\{x \in X \mid f(x) = x\}$$

der Fixpunkte von f abgeschlossen.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

- Ist der topologische Raum X HAUSDORFFsch, so ist jede einelementige Teilmenge von X abgeschlossen.
- Umgekehrt sei X ein topologischer Raum, in dem jede einelementige Teilmenge abgeschlossen ist. Muß X notwendigerweise HAUSDORFFsch sein?
- Zeigen Sie daß jeder einelementige, nicht aber jeder zweielementige topologische Raum HAUSDORFFsch ist!

Aufgabe 3: (5 Punkte)

- $f: X \rightarrow Y$ sei eine surjektive stetige Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen. Zeigen Sie: Wenn X wegzusammenhängend ist, dann auch Y .
- Zeigen Sie: Das Produkt $X \times Y$ zweier wegzusammenhängender Räume X und Y ist wegzusammenhängend.
- Gilt dies auch für zusammenhängende Räume? (*Hinweis: Für jeden Punkt $x \in X$ ist $\{x\} \times Y$ homöomorph zu Y .*)

Abgabe bis zum Freitag, dem 28. Februar 2014, um 11.55 Uhr