

14. Februar 2014

## 1. Übungsblatt Topologie und Gleichgewichte

### Aufgabe 1: (6 Punkte)

a) Zeigen Sie, daß die Teilmenge

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ und } y \neq 1\}$$

von  $\mathbb{R}^2$  homöomorph zu  $\mathbb{R}$  ist!

b) Zeigen Sie, daß keine zwei der folgenden vier Teilmengen von  $\mathbb{R}$  homöomorph sind:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}, & B &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x^2 < 3\}, \\ C &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}, & D &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x^2 \leq 3\} \end{aligned}$$

### Aufgabe 2: (4 Punkte)

$X$  sei eine Menge und  $\mathcal{A}$  eine Menge von Teilmengen von  $X$ , für die gilt:

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}$  und  $X \in \mathcal{A}$
2. Der Durchschnitt beliebig vieler Mengen aus  $\mathcal{A}$  liegt wieder in  $\mathcal{A}$ .
3. Die Vereinigung zweier Mengen aus  $\mathcal{A}$  liegt wieder in  $\mathcal{A}$ .

Zeigen Sie, daß  $X$  zum topologischen Raum wird mit der Menge

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U \in \mathcal{A}\}!$$

### Aufgabe 3: (4 Punkte)

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  sei mit der Spurtopologie versehen. Entscheiden Sie für jede der folgenden Mengen, ob sie offen, abgeschlossen, beides oder keins von beiden ist:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2 < x < 3\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2 < x^2 < 3\}, \quad C = \{1\}, \quad D = \mathbb{Z}$$

### Aufgabe 4: (6 Punkte)

- a)  $X$  sei ein topologischer Raum und  $f : X \rightarrow Y$  sei eine surjektive Abbildung. Wir definieren die *Quotiententopologie* auf  $Y$  durch die Vorschrift, daß  $U \subseteq Y$  genau dann offen sein soll, wenn  $f^{-1}(U) \subseteq X$  offen ist. Zeigen Sie, daß dies in der Tat eine Topologie definiert!
- b) Wir führen auf  $\mathbb{R}$  eine Äquivalenzrelation ein durch die Vorschrift  $a \sim b$  genau dann, wenn es ein  $c \neq 0$  gibt, so daß  $a = bc$  ist. Bestimmen Sie die Menge  $\mathbb{R}/\sim$  aller Äquivalenzklassen und deren Quotiententopologie unter der natürlichen Projektion!

Abgabe bis zum Freitag, dem 21. Februar 2014, um 11.55 Uhr